ترجمة

الدكتور داود سليمان المنير

На арабском языке

١٩٨٠

المقدمة

إن علم الميكانيكا الإنشائية ، بالمعنى الواسع للكلمة ، هو العلم الذى يبحث مسائل حساب مقاومة وجسوءة واستقرار الإنشاءات والقطع الإنشائية . ويضم مجموعة من المواد العلمية وهى : مقاومة المواد — وتبحث مقاومة وجسوءة واستقرار القطع الإنشائية المنفردة ، نظرية المرونة — وتبحث نفس المسائل السابقة ولكنها تعطى حلولا أكثر دقة وضبطا بالمقارنة مع ما تعطيه مقاومة المواد ، نظرية اللدونة — وتتعلق ببحث طرق تحديد الاجهادات والانفعالات فى المواد اللدنة والمواد المرنة — اللدنة ، وأخيراً نظرية الإنشاءات — وتبحث مقاومة وجسوءة واستقرار الإنشاء عامة وأجزائه المنفردة ، المؤلفة من عدد القطع الإنشائية البسيطة . وغالباً ما تسمى المادة العلمية الأخيرة كذلك بالميكانيكا الإنشائية (بالمعنى المحدد للكلمة) .

وقد كان العالم والفنان الإيطالى العظيم ليوناردو دافنشى (١٤٥٢ — ١٥١٩) الذى أجرى بعض البحوث فى حقل الميكانيكا ، قد دون عدداً من الأفكار الصحيحة المتعلقة بمقاومة المواد ، ولكنها لم تنتشر على نطاق واسع ، وبقيت محفوظة فى المخطوطات . وكان من المستحيل فى ذلك الوقت ، أن يتحدث المرء عن تطور مجموعة المواد العلمية الكاملة ، التى يتألف منها علم الميكانيكا الإنشائية الحديث (بالمعنى الواسع لهذه الكلمة) بل كان من المحتمل فقط ، حل بعض مسائل مقاومة القطع الإنشائية المنفردة .

ويعتبر العالم الفيزيائى والرياضى والفلكى الشهير جاليليو جاليلى (١٥٦٤ — ١٦٤٢) أول من وضع مبادئ علم مقاومة المواد ، وقد عاش بعد عصر ليوناردو

:افتشى بقليل ، عندما أدى تطور العلاقات البحرية الدولية فى ذلك الوقت ، إلى طرح مسألة زيادة الحمولة الطنية للسفن ، وتغيير تصميمها . وقد أثبت جاليلى الذى عكف على بحث هذه المسألة بأنه عند توسيع حجوم السفن عن طريق الزيادة النسبية المباشرة لكافة أبعاد أجزائها فقط ، لا يمكن فى هذه الحالة تأمين مقاومتها اللازمة . وأثبت أيضاً بأن مقاومة الأجسام المتماثلة هندسياً، الواقعة تحت تأثير وزنها الذاتى ، تختلف من جسم لآخر .

وبدراسة مقاومة العتبات للإنحناء ، توصل جاليلى إلى نتائج هامة لم تفقد أهميتها إلى يومنا هذا ، ولكنه لم يتمكن من وضع نظرية الإنحناء الصحيحة لأنه انطلق من فكرة خاطئة ، تفيد بوجود إجهادات شد فقط (متساوية فى المقدار) فى جميع ألياف العتبة . ولم يكن فى ذلك الوقت ، يعلم بالقانون الفيزيائى ، الذى يحدد العلاقة بين الاجهادات والإنفعالات .

وبعد مضى فترة من الزمن على ذلك (فى عام ١٦٧٨) ، توصل العالم روبرت هوك إلى وضع القانون المذكور فى أبسط صيغة له ، وينص على ما يلى : الشد يساوى القوة المؤثرة .

ولم تتضح حقيقة وجود إجهادات انضغاط أيضاً ، بالإضافة إلى إجهادات الشد فى مقطع العتبة ، كما لم يتم التوصل إلى الحل الصحيح لمسألة الانحناء التى وضعها جاليلى ، إلا نتيجة للتجارب الشاملة الأكثر دقة ، التى أجريت بعد ذلك بوقت متأخر جداً ، فى النصف الثانى من القرن الثامن عشر ، حين طرحت الصناعة المتطورة أمام العلم عدداً من المسائل الجديدة .

وكذلك ساعد تقدم الرياضيات العليا والميكانيكا ، مساعدة كبيرة فى تطور علم مقاومة المواد فى القرن الثامن عشر . وقد كان لأبحاث العالمين أويلر ولاجرانج . أهمية بالغة فى هذا المجال .

وقد أدى النمو السريع للصناعة فى القرن التاسع عشر ، واستخدام المحركات البخارية وإنشاء السكك الحديدية والجسور والسدود والقنوات والسفن الكبيرة والمبانى الضخمة ، إلى التطور السريع لعلم مقاومة المواد . وبعد ظهور الإنشاءات الهندسية المعقدة ومحاولة تخفيض تكاليف إنشائها ، اضطر العلماء إلى البحث عن طرق جديدة

لحساب المقاومة . وقد أدى كل ذلك إلى ظهور علم مستقل هو علم الميكانيكا الإنشائية (أو نظرية الإنشاءات) .

ان الأنواع الرئيسية من الإنشاءات ، التى يبحثها علم الميكانيكا الإنشائية هى : الجمالونات ، العقود ، الجدران المحتجزة والاطر أو الهياكل .

وقد استخدم أبسط أنواع الجمالونات فى الأزمنة الغابرة . وتستخدم الجمالونات فى الوقت الحاضر فى بناء أو إنشاء الجسور (الجمالونات الجسرية) ، وسقوف المبانى (الجمالونات السقفية) ، والأوناش الرحالة ، وأوناش الأبراج ، وأبراج خطوط نقل القدرة الكهربائية ، وأبراج هوائيات محطات اللاسلكى وفى غيرها من الإنشاءات الأخرى .

إن الأنظمة العقدية كانت تستخدم فى بناء الجسور (القناطر) الحجرية فى روما القديمة ، ولكن نظرية تصميمها لم تكن معروفة فى ذلك الوقت . وفى النصف الثانى من القرن التاسع عشر أصبحت الأنظمة العقدية (العقود) تستخدم فى إنشاء الجسور المعدنية ، أما فى القرن العشرين فقد تم استخدامها فى بناء الجسور الخرسانية المسلحة . وتستخدم الأنظمة العقدية فى الوقت الحاضر ، على نطاق واسع فى تغطية الأبواع الواسعة فى المبانى المتنوعة .

لقد استخدمت الجدران المحتجزة التى تمنع التربة من الإنهيار أو الإنزلاق . فى مختلف المجالات الإنشائية وعلى مرّ القرون .

وفى القرن العشرين استخدمت الاطر على نطاق واسع فى الإنشاءات المعدنية . وبصورة رئيسية فى الهياكل الخرسانية المسلحة .

ويقترن تطور علم الميكانيكا الإنشائية فى الاتحاد السوفييتى بالنمو العام السريع للاقتصاد الوطنى برمته ، وبزيادة عدد المعاهد الدراسية الفنية العليا ومعاهد الأبحاث العلمية ، وبوجود عدد كبير من هيئات التصميم .

إن المدى الهائل للحركة الإنشائية فى الاتحاد السوفييتى ، وضع أمام علم الميكانيكا الإنشائية عدداً من المسائل الجديدة والمعقدة . وأصبح من الضرورى إيجاد طرق لحساب وتصميم الإنشاءات غير المألوفة من حيث تعقيدها وحجومها ومقادير الأحمال المؤثرة عليها .

ونشير هنا باختصار إلى المسائل الأساسية للميكانيكا الإنشائية ، التى تمكن العلماء السوفييت من حلها بنجاح .

وقد وضعت بالتفصيل نظرية حساب الأنظمة (الإنشاءات) المعقدة غير المحددة إستاتيكياً ، الأمر الذى جعل طرق حسابها تصبح بسيطة وسهلة بحيث أخذت تستخدم على نطاق واسع فى عمليات التخطيط والتصميم .

وقد كرس عدد من الأبحاث الهامة للعلماء السوفييت لدراسة الأنابيب الرقيقة الجدران ، التى استخدمت على نطاق واسع فى صناعة الطائرات وفى مجالات إنشائية أخرى .

إن حل عدد من المسائل المهمة المتعلقة بحساب استقرار الإنشاءات له أهمية عملية كبيرة للغاية بالنسبة للإنشاء .

وفى السنوات الأخيرة تطور كثيراً فرع ديناميكا الإنشاءات الهندسية ، الذى استقل حالياً عن علم الميكانيكا الإنشائية وأصبح مادة علمية قائمة بذاتها . واستقل كذلك فرعا ميكانيكا بناء السفن وميكانيكا بناء الطائرات وأصبحا مادتين علميتين قائمتين بذاتهما .

وقد كان لأبحاث العلماء السوفييت أهمية بالغة فى تطوير مسائل الميكانيكا الإنشائية المشار إليها . ومن هؤلاء العلماء : أ . كريلوف ، ب . جاليركين ، أ . جفوزديف ، ب . جيموتشكين ، إ . رابينوفيتش ، ن . ستريليتسكى ، إ . بروكوفييف ، ن . بيزوخوف ، ن . بيليابيف ، ف . بولوتين ، ق . زافرييف ، أ . سميرنوف ، س . بونوماريوف ، ف . فلاسوف ، م . فيلونينكو — بورودينتش ، ب . بابكوفيتش ، ن . سنيتكو وغيرهم .

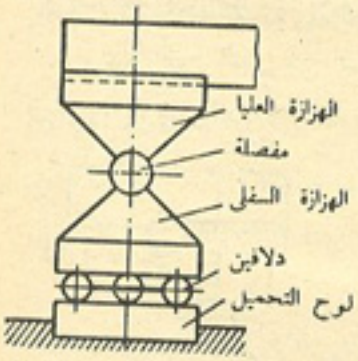
الفصل الأول

التحليل الكينماتى للإنشاءات

البند ١ — ١ : المساند

يتطرق كتاب الميكانيكا الإنشائية إلى بحث حساب الأنظمة (الإنشاءات) المستقرة هندسياً ، أى تلك الإنشاءات التى لا يمكن إزاحة أية نقطة من نقاطها الخاصة إلا بتشويه أنظمتها . ويتم تأمين استقرار مثل هذه الإنشاءات أو الأنظمة (استقرارها الهندسى) بالنسبة للأرض * باستخدام المساند . وتنشأ فى المساند ردود فعل ، تمثل مع الأحمال المؤثرة ، نظاماً متوازناً للأحمال الخارجية المؤثرة على الإنشاء . وسوف نبحث هنا أنواع المساند المختلفة ، التى تستخدم فى الإنشاءات (الأنظمة) المستوية .

إن النوع الأول من هذه المساند مبين فى الشكل ١ — ١ ، ويتألف من هزازتين (عليا وسفلى) يوجد بينهما عمود صغير ، يقدم بدور مفصلة أسطوانية ** . ويسمح هذا العمود بدوران الهزازة العليا حول الهزازة السفلى . ويمكن فى نفس الوقت أن تتحرك الهزازة العليا (مع الهزازة السفلى المحمولة على دلافين) على امتداد مستوى التحميل ، الذى يسمى بلوح التحميل .



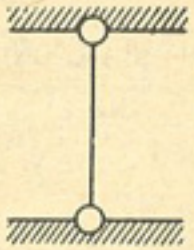
الشكل ١ — ١

* يقصد بكلمة « الارض » هنا ، كل نظام مستقر أو كل قاعدة مستقرة هندسياً .

** فى المواضيع المقبلة عند حساب الأنظمة أو الإنشاءات المستوية ، سوف نسمى « المفصلة الأسطوانية » بـ « المفصلة » فقط .

وهكذا يكون للمسند المذكور درجتان من حرية الحركة (تغير الوضع) .

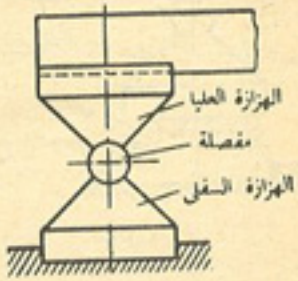
إن الاحتكاك الذى ينشأ فى المسند . يهمل عادة عند الحساب ، ولذلك فإن رد فعل مثل هذا المسند ، يكون بمثابة قوة تمر خلال مركز المفصلة ، وتكون عمودية على اتجاه الإزاحة التحملية للدلافين ، أى عمودية على السطح العلوى للوح التحميل . وتحدد هذه القوة بپارامتر واحد (أى بكمية واحدة متغيرة القيمة) وهو مقدارها فقط . ويسمى المسند المذكور بالمسند المتحرك أو بالمسند المفصلى المتحرك . ويعبر عنه تخطيطياً بواسطة قضيب واحد ، ذى طرفين مفصليين * (متصلين بمفصلتين مثاليتين خاليتين من الاحتكاك) كما هو مبين فى الشكل ١ — ٢ .



الشكل ١ — ٢

إن القضيب الذى يمثل تخطيطياً المسند المفصلى المتحرك ، يعتبر اصطلاحيا لا نهائى الطول ، ويمكن إزاحة النقطة العليا لمثل هذا القضيب على امتداد خط مستقيم فقط ، عمودى على محوره (الخط المستقيم هو عبارة عن محيط لنصف قطر لانهائى الطول) . وهذا الأمر يطابق كلياً تلك الشروط التى يوجد فيها المسند المفصلى المتحرك الحقيقى . ولا تدخل فى الحساب الانفعالات الذاتية للمسند . أى أن القضيب الساند ، يعتبر اصطلاحياً لا نهائى الجسوءة .

ويمتاز النوع الثانى من المسند (شكل ١ — ٣) عن النوع الأول ، بكون الهزازة السفلى مثبتة وغير قابلة للإزاحة . ولهذا المسند درجة واحدة من حرية الحركة ، ويسمى بالمسند الثابت أو بالمسند المفصلى الثابت . ورد فعل هذا المسند ، عبارة عن قوة تمر خلال مركز المفصلة . وقد تكون هذه القوة بأى اتجاه ، لذلك فإنها تحدد بواسطة پارامترين هما المقدار والاتجاه (أو تحدد بقيمتى مركبتيها ، ومثلا المركبة الرأسية والمركبة الأفقية ، وهذا

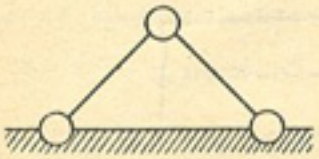


الشكل ١ — ٣

* أحياناً يتكون المسند المفصل المتحرك من قطعة رأسية (عمود) متصلة من طرفيها بمفصلتين ، وفى هذه الحالة يسمى المسند المذكور بالمسند البندول .

ما يحمل نفس المدلول السابق) .

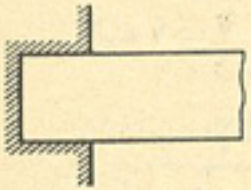
ويعبر تخطيطياً عن النوع الثانى من المسند بواسطة قضيبين ، تتصل أطرافهما بمفصلات مثالية ، بحيث تكون المفصلة العليا مشتركة بين القضيبين (شكل ١ — ٤) . ومثل هذا الرسم التخطيطى يحدد نقطة تأثير أو تسليط رد فعل المسند (مركز المفصلة العليا) ، مع ترك اتجاهه مجهولا .



الشكل ١ — ٤

وفى الرسم التخطيطى للمسند المفصلى الثابت ، يمكن تحديد اتجاهات القضيبين بصورة اختيارية تماماً ، وذلك لأنه فى الإمكان تحليل القوة (رد الفعل) إلى مركبتين فى أى اتجاهين .

والنوع الثالث من المسند ، هو المسند الذى يسمى بالمسند المبيت * أو بالتثبيتة (شكل ١ — ٥) ، ودرجة حرية حركته تساوى صفراً . ويحدد رد فعل هذا المسند بثلاثة پارامترات وهى مثلا ، مقدار واتجاه القوة المارة فى أية نقطة يتم اختيارها ، وعزم القوة حول هذه النقطة .



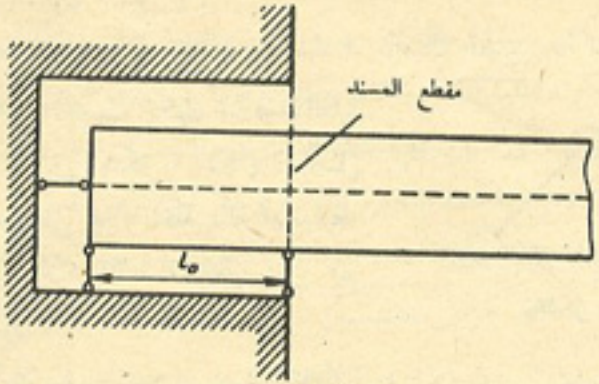
الشكل ١ — ٥

ويمكن اعتبار رد فعل هذا ، بمثابة مجموع العزم الرد فعلى فى المسند المبيت (مقطع المسند) ، ورد فعل المسند المفصلى الثابت .

ويمكن التعبير تخطيطياً عن النوع الثالث من المسند ، بثلاثة قضبان (شكل ١ — ٦) . ولكى نستطيع اعتبار المسند المبيت جاسئاً تماماً ، يجب أن تكون المسافة l_1 صغيرة جداً ، أو يجب اعتبار قسم العتبة الممتد على مسافة l_2 ، لا نهائى الجسوءة .

ونشير هنا إلى أن عدد القضبان فى الرسم التخطيطى لأى مسند ، يساوى دائماً عدد البارامترات التى تحدد رد الفعل الكلى لذلك المسند .

* وهو المسند المحصور أو المبنى فى داخل الجدار — المترجم .



الشكل ١ – ٦

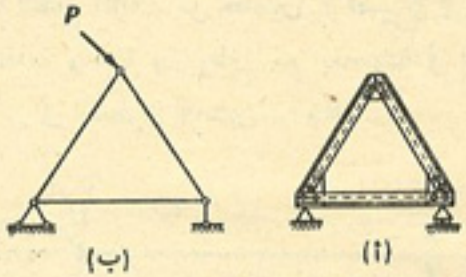
البند ١ – ٢ : شروط الاستقرار الهندسى للإنشاءات الإطارية

إن الإنشاءات الإطارية (الهيكلية) هى الإنشاءات المؤلفة من قطع أو قضبان منفردة – تكون مستقيمة عادة – مربوطة مع بعضها البعض بواسطة اللحام أو البرشام أو المسامير أو الأنواع الأخرى من الوصلات . وتعتبر الجمالونات المستوية ، أحد أنواع الإنشاءات المذكورة .

وفى أكثر الحالات تكون وصلات الجمالون الإطارى جاسئة – غير مفصلية . ان الحساب الدقيق للجمالون الذى يحتوى على وصلات جاسئة ، هو حساب معقد للغاية ، وذلك لأنه يعتبر إنشاء (نظاماً) يحتوى على عدة قوى مجهولة غير محددة إستاتيكياً . وإذا استعضنا نظريا عن الوصلات الجاسئة للجمالون ، بوصلات مفصلية (مفصلات) ، لأصبح حساب الجمالون أبسط كثيراً من السابق ، ويمكن عند ظروف معينة ، إجراء هذا الحساب باستخدام المعادلات الاستاتيكية وحدها . وقد بينت المعطيات التجريبية والأبحاث النظرية ، بأن مثل هذه الاستعاضة ممكنة ، وذلك لأنه عند تسليط الأحمال المركزة فى الوصلات ، نرى بأن الإجهادات الناشئة فى الجمالون ذى الوصلات المفصلية ، لا تختلف إلا قليلا عن الإجهادات الناشئة فى الجمالون ذى الوصلات الجاسئة . ولهذا فإننا عند حساب وتصميم الجمالونات

فيما بعد ، سنعتبرها جمالونات ذات قطع متصلة اتصالا مفصلياً ، أى ذات وصلات مفصلية .

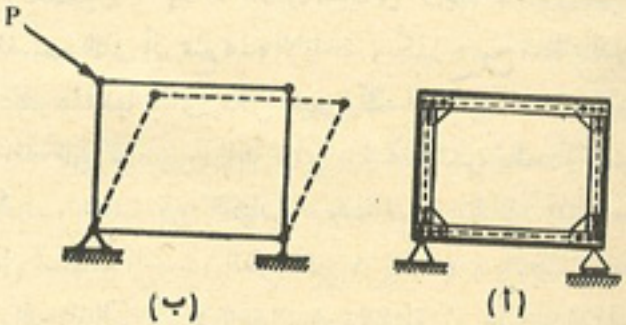
وإذا استبدلنا الوصلات الجاسئة للنظام أو الإنشاء ، المؤلف من ثلاث قطع مستقيمة (قضبان) ، المبين فى الشكل (١ – ٧ ، أ) بوصلات مفصلية ، فإن النظام سيبقى مستقراً هندسياً (شكل ١ – ٧ ، ب) . أى أنه سيبقى إنشاء لا يمكن تغيير شكله ، إلا بتشويه القطع التى يتألف منها .



الشكل ١ – ٧

وإذا استبدلنا الوصلات الجاسئة بوصلات مفصلية (مفصلات) فى النظام أو الإنشاء المبين فى الشكل (١ – ٨ ، أ) ، المؤلف من أربع قطع (قضبان) ، فسوف نحصل على نظام يمكن تغيير شكله الهندسى (شكل ١ – ٨ ، ب) . أى نحصل على نظام يمكن تغيير شكله بدون تشويه القطع التى يتألف منها .

إن أبسط أنواع الإنشاءات (الجمالونات) ذات الوصلات المفصلية ،

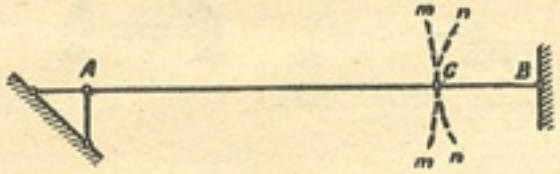


الشكل ١ – ٨

المستقرة هندسياً ، والمؤلفة من قطع منفردة ، هو الإنشاء (الجمالون) المؤلف من ثلاث قطع (قضبان) متصلة مع بعضها البعض اتصالا مفصلياً ، على هيئة مثلث (شكل ١ — ٧ ، ب) .

والآن نأتى إلى إثبات القوانين التى تمكننا من إيجاد الأنظمة (الإنشاءات) المستقرة هندسياً ، التى يتألف كل منها من أكثر من ثلاث قطع متصلة مع بعضها اتصالا مفصلياً .

لنبحث مقدماً النظام المؤلف من قطعتين أو قضيبين (شكل ١ — ٩) ، موضوعين على استقامة واحدة ومربوطين مع بعضهما فى الوصلة C ، ومثبتين من طرفيهما الآخرين فى النقطتين الثابتتين A و B .

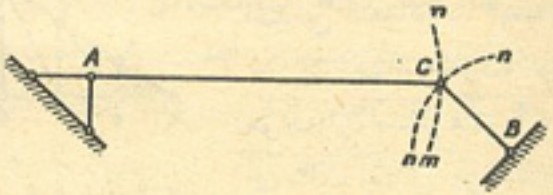


الشكل ١ — ٩

وإذا فصلنا القضيبين AC و BC فى نقطة C ، فسوف تتحرك النهاية C العائدة للقضيب AC ، على امتداد القوس الدائرى $m — m$ ، أما النهاية C العائدة للقضيب BC ، فسوف تتحرك على امتداد القوس الدائرى $n — n$. ولهذين القوسين الدائريين مماس مشترك فى نقطة C . وهكذا نجد بأنه إذا أزيحت النقطة C العائدة لأحد القضيبين ، إزاحة صغيرة للغاية فى الاتجاه العمودى على المستقيم AB ، فلا يمكن للقضيب الثانى أن يمنع هذه الإزاحة . وهكذا يصبح النظام الذى نبحثه الآن ، نظاماً غير مستقر هندسياً ، أى يمكن تغيير شكله الهندسى ، وذلك لأن شكله يمكن أن يتغير مع بقاء طول القضيبين ثابتاً ، أى عند عدم تشوه قطعه أو قضبانه .

وفى الأبواب التالية من الكتاب سوف نسمى النظام المؤلف من قضيبين موضوعين على استقامة واحدة (انظر شكل ١ — ٩) ، بالنظام اللحظى التغير ، وذلك لأنه فى اللحظة التى تلى الإزاحة الصغيرة للنقطة C على امتداد المستقيم العمودى على AB ، يتحول هذا النظام إلى نظام مستقر .

وتتغير الحالة إذا لم يكن القضيبان AC و BC واقعين على استقامة واحدة (شكل ١ — ١٠) ، حيث لا يكون للقوسين الدائريين $m — m$ و $n — n$ مماس مشترك بينهما ، ولهذا السبب نجد بأن الوصلة C لا يمكن أن تتعرض لأية إزاحة مهما كانت صغيرة ، بدون تشوه القضيبين .



الشكل ١ — ١٠

وينتج من ذلك ، أن أية وصلة جديدة تضاف إلى تركيب النظام المستقر هندسياً ، يمكن أن تربط به بواسطة قضيبين يجب أن لا يكون محوراهما واقعين على استقامة واحدة *

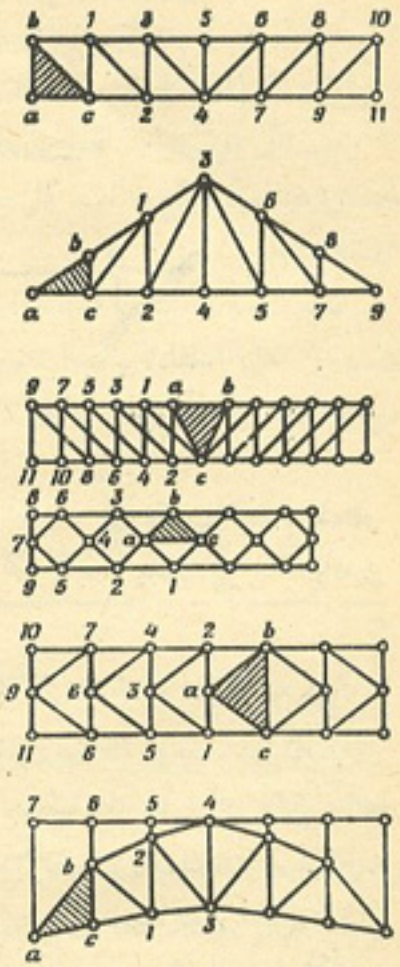
وبالتالى فإن الأنظمة الناجمة عن المثلث المفصلى بطريقة الربط المتتالى للوصلات ، حيث ترتبط الوصلة الجديدة مع الوصلتين السابقتين بواسطة قضيبين غير موضوعين على استقامة واحدة ، ستكون عبارة عن أنظمة مستقرة هندسياً ، أى يكون بنيانها الهندسى غير متغير (مستقر) . وتسمى مثل هذه الأنظمة (الجمالونات) بالأنظمة البسيطة ، لتميزها عن الأنظمة المعقدة ، التى تتكون عادة نتيجة لتغيير شكل الأنظمة البسيطة ، وخاصة باستبدال بعض القضبان بقضبان أخرى ، أو بإضافة أحد الأنظمة إلى نظام آخر .

وتعتبر الجمالونات المبينة فى الشكل ١ — ١١ ، من الأنظمة البسيطة . فإن كل جمالون من هذه الجمالونات ، مكون بطريقة الربط المتتالى للوصلات المفصلية الإضافية ، كما ذكرنا أعلاه ، مع المثلث المفصلى الأصلى abc ، حسب الترتيب

* يمكن ربط الوصلة الجديدة أيضاً ، بواسطة عدد أكبر من القضبان ، ولكن يمكن أن يصبح النظام فى هذه الحالة ، نظاماً غير محدد استاتيكياً (راجع البند ١ — ٣) .

المبين على الرسم بالأرقام . ويمكن اعتبار أية وصلات مفصلية مؤلفة من ثلاث قضبان ، بمثابة مثلثات أساسية أو أصلية ، مثل المثلث abc ، وذلك عند مراجعة الاستقرار الهندسى للجمالونات البسيطة .

إن الجمالون المؤلف من مثلثات فقط ، هو جمالون مستقر هندسياً ، ويمكن اعتبار أى مثلث مفصلى من مثلثاته ، بمثابة مثلث أصلى . ويمكن مراجعة الاستقرار الهندسى للجمالونات البسيطة ، بطريقة عكسية ، أى بحذف الوصلات المفصلية وصلة بعد أخرى ، مع القضيبين اللذين يربطان كلا منها مع القسم المتبقى من الجمالون . فإذا حصلنا نتيجة لذلك على نظام بهيئة مثلث مفصلى ، يكون الجمالون الذى نبحثه ، مستقراً هندسياً .



الشكل ١ — ١١

والآن نضع العلاقة بين عدد الوصلات وعدد القضبان ، اللازمة للحصول على جمالون بسيط . إن هذا الجمالون ، كما هو معروف ، يتألف من مثلث مفصلى أساسى (أصلى) ، تضاف إليه وصلات مفصلية جديدة على التوالى ، بحيث تربط كل وصلة مع الوصلات الأخرى بواسطة قضيبين غير واقعين على استقامة واحدة .

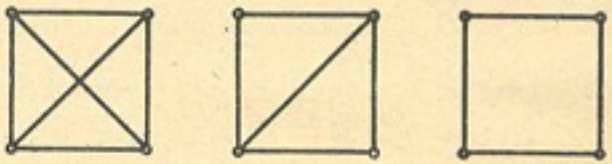
نرمز إلى عدد قضبان هذا الجمالون بالحرف S ، والى عدد الوصلات بالحرف K. ويحتوى المثلث الأصلى على ثلاث وصلات وثلاثة قضبان ، وترتبط كل وصلة من الوصلات المضافة ، التى يبلغ عددها ($K - 3$) بواسطة قضيبين فقط . ولذلك يكون العدد الكلى للقضبان فى الجمالون البسيط ، المستقر هندسياً ، مساوياً لما يلى :

$$S = 3 + 2\,(K - 3)$$

أو

$$S = 2K - 3 \qquad (1-1)$$

أما إذا كان عدد القضبان أقل من ذلك ، أى $S < 2K - 3$ فهذا يدل على أن الجمالون من حيث تركيبه ، لا يحتوى على العدد اللازم من القضبان لتأليف أو تكوين النظام المستقر هندسياً . إذن يصبح النظام فى هذه الحالة ، غير مستقر هندسياً . ومن أمثلة هذا النظام ، الإنشاء الرباعى الزوايا المبين فى الشكل (١ — ١٢ ، أ) ،



(أ) (ب) (ج)

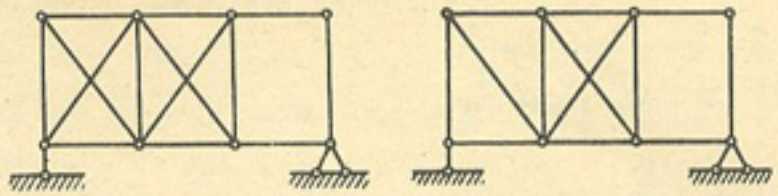
الشكل ١ — ١٢

الذى عدد قضبانه S يساوى 4 وعدد وصلاته K يساوى 4 أيضاً ، وينتج من ذلك ما يلى :

$$S = 4 < 2K - 3 = 2 \times 4 - 3 = 5$$

ويمكن تحويل هذا النظام إلى نظام مستقر ، بإضافة قضيب خامس قطرى (شكل ١ — ١٢ ، ب) . وإذا أضفنا بعد ذلك القطر الثانى — القضيب السادس (شكل ١ — ١٢ ، ج) ، فسوف لا تكون له أية علاقة بالاستقرار الهندسى للنظام ، أى أنه يعتبر زائداً من هذه الناحية . ويتضح من هذا المثال ، بأنه يمكن وجود أنظمة مستقرة هندسياً ، يزيد عدد قضبانها على $2K - 3$ ، أى $S > 2K - 3$

وهنا نلاحظ بأن العلاقة $S \geqq 2K - 3$ ، هى شرط ضرورى لاستقرار الجمالون ، ولكنه مع ذلك شرط غير كاف . ونجد مثلا بأن الجمالون المبين فى الشكل (١ — ١٣ ، أ) هو جمالون غير مستقر هندسياً ، بالرغم من أن عدد قضبانه يساوى $2K - 3$.



(ب) (أ)

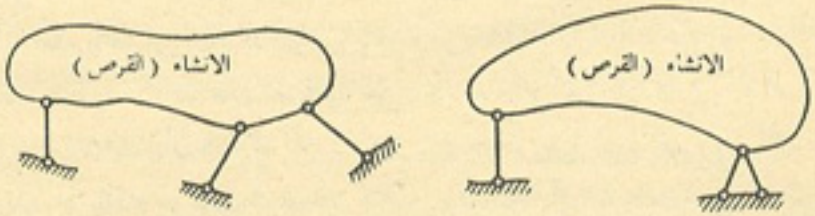
الشكل ١ — ١٣

ويبين الشكل (١ — ١٣ ، ب) جمالوناً غير مستقر ، عدد قضبانه هو $S > 2K - 3$. إن سبب عدم استقرار هذه الجمالونات ، يعود إلى أن أقسامها اليمنى تمثل إنشاءات رباعية الزوايا ، مفصلية الوصلات .

وبالإضافة إلى ذلك ، نجد بأن الإنشاءات (الأنظمة) الإطارية ، التى ينطبق عليها الشرط $S = 2K - 3$ ، قد تكون لحظية التغير .

ونأتى الآن إلى بحث مسألة ربط الإنشاء (النظام) المستقر هندسياً ، مع الأرض بواسطة المساند .

فى أحيان كثيرة يستند الإنشاء (الذى يمكن اعتباره بمثابة قرص مستو) على مسندين مفصليين ، أحدهما ثابت والآخر متحرك (شكل ١ — ١٤ ، أ) . ويعتبر هذا الارتباط بين الإنشاء والأرض ، ارتباطاً مستقراً هندسياً . وليس من الضرورى أن يرتبط قضيبان من القضبان الساندة الثلاثة ، بمفصلة مشتركة واحدة ، لأن قضبان الإنشاء المستقر هندسياً ، قد لا تحتوى على مفصلات مشتركة (شكل ١ — ١٤ ، ب) .

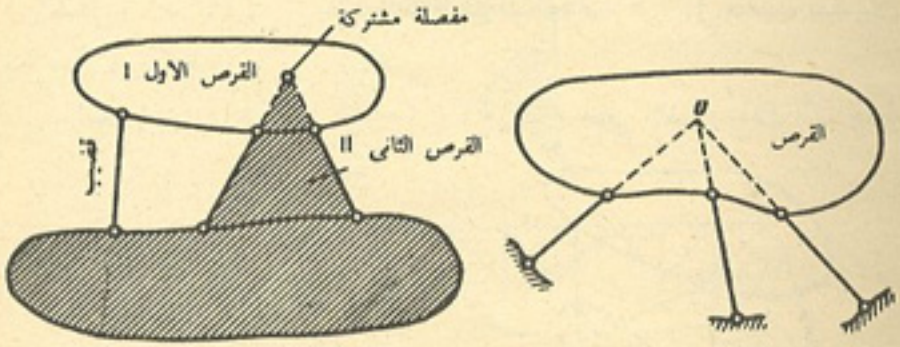


(ب) (أ)

الشكل ١ — ١٤

وإذا كانت كافة القضبان الساندة مرتبة بحيث تتقاطع اتجاهاتها فى نقطة واحدة (١ — ١٥ ، أ) ، عندئذ تعتبر هذه النقطة بمثابة المركز اللحظى ، الذى يمكن للإنشاء (النظام) بأجمعه أن يتحرك حوله حركة دورانية متناهية الصغر (فى الواقع قد تكون هذه الحركة الدورانية محددة ، ولكنها صغيرة) . وبعد هذه الحركة ، سوف لا تتقاطع كافة القضبان الساندة فى نقطة واحدة ، وسوف لا يمكن حدوث أية حركة فيما بعد ، إلا بتشويه القضبان الساندة .

وللإنشاء المربوط مع الأرض بهذه الطريقة ، حركة لحظية (تغير لحظى) ، لذا لا يجوز ترتيب القضبان الساندة بهذا الشكل (يتضح فيما بعد من بند ٤ — ٦ ؛ بأن تأثير الأحمال الخارجية ، ولو كانت صغيرة ، على الإنشاء أو النظام اللحظى التغير ، قد يؤدى إلى نشوء إجهادات كبيرة جداً) . وهكذا يمكن تثبيت الإنشاء فى الأرض



(ب) (أ)

الشكل ١ — ١٥

تثبيتاً مستقراً ، بواسطة ثلاثة قضبان لا تتقاطع فى نقطة واحدة وغير متوازية مع بعضها البعض (وذلك لأن اتجاهات القضبان المتوازية تتقاطع فى نقطة واحدة تقع فى اللانهاية) .

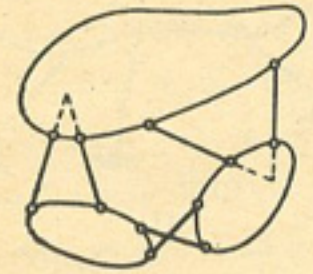
وبتطبيق هذا المبدأ على أى نظامين (قرصين) مستقرين هندسياً ومربوطين مع بعضهما البعض ، يمكن صياغة القاعدة التالية : يمكن لكل قرصين أن يشكلا نظاماً مستقراً هندسياً ، إذا ربطا مع بعضهما البعض بواسطة ثلاثة

قضبان ، لا تتقاطع محاورها فى نقطة واحدة وغير متوازية مع بعضها البعض .

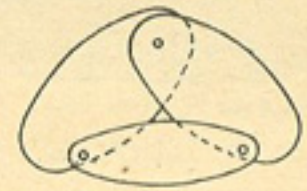
وإذا وضعنا مفصلة فى نقطة تقاطع أى قضيبين من القضبان الثلاثة ، وربطنا المفصلة مع القرص ، فإن النظام لا يصبح غير مستقر هندسياً ، ولكن ذلك يجعل فى الإمكان اعتبار النظام مؤلفاً من قرصين مربوطين مع بعضهما البعض بواسطة مفصلة مشتركة واحدة وقضيب واحد (شكل ١ — ١٥ ، ب) . إذن يمكن أن نربط مع القرص قرصاً ثانياً بشكل مستقر هندسياً ، بواسطة مفصلة مشتركة بينهما ، وقضيب واحد لا يمر اتجاهه خلال هذه المفصلة .

ويمكن ربط ثلاثة أقراص مع بعضها البعض وجعلها نظاماً واحداً مشتركاً مستقراً هندسياً ، بربطها على هيئة مثلث باستخدام ثلاث مفصلات غير واقعة على استقامة واحدة (شكل ١ — ١٦) ، أو باستخدام ستة قضبان كما هو مبين فى الشكل (١ — ١٧) ، وذلك لأنه يمكن الاستعاضة عن كل مفصلة بقضيبين يتقاطعان فى مركزها .

والنظام المبين فى شكل (١ — ١٨) ، هو نظام لحظى التغير ، وذلك لأن نقاط



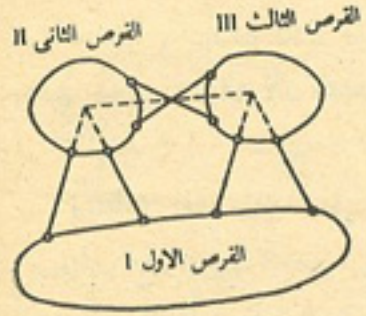
الشكل ١ — ١٧



الشكل ١ — ١٦

تقاطع محاور القضبان التى تربط كل زوج من الأقراص ، تقع على استقامة واحدة . وهذا النظام يشبه النظام المبين فى شكل (١—٩) .

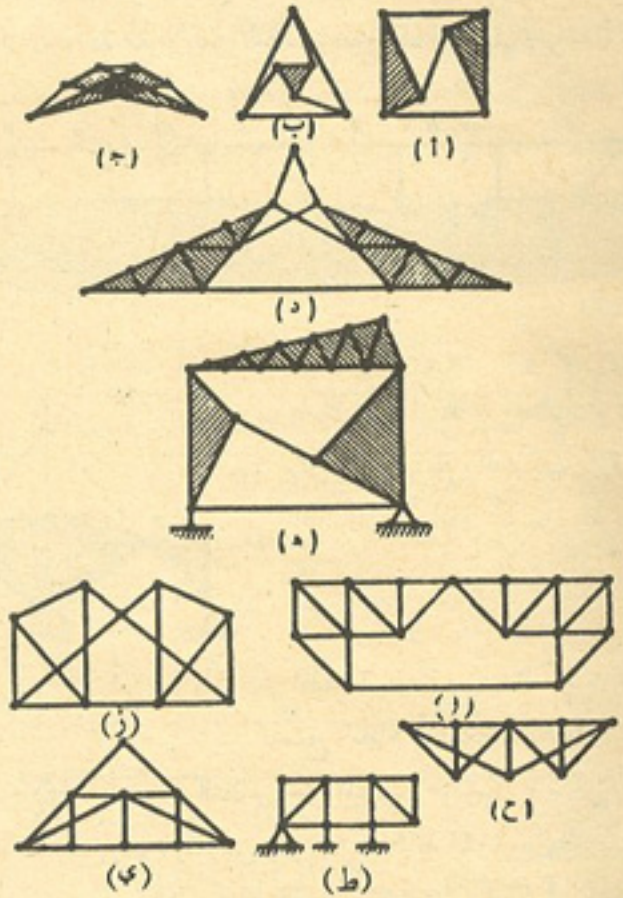
وهكذا إذا ربطنا ثلاثة أقراص مع بعضها بواسطة ستة قضبان ، بحيث نضع بين كل زوج من الأقراص قضيبين ،



الشكل ١ — ١٨

نقاط تقاطعهما غير واقعة على استقامة واحدة ، فسوف نحصل على نظام مستقر هندسياً .

ويبين شكل (١—١٩) عدداً من الأنظمة ، المكونة باستخدام الطرق المذكورة أعلاه .

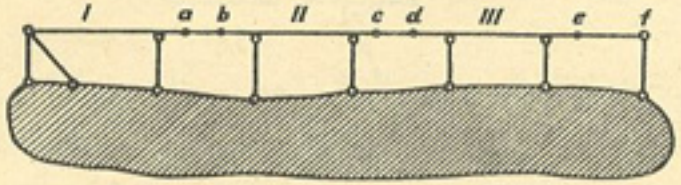


الشكل ١ — ١٩

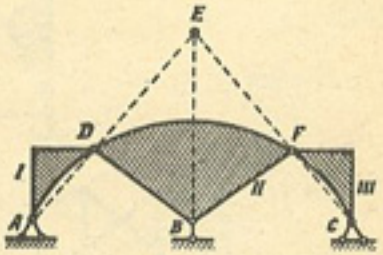
والنظام المبين فى شكل (١ — ٢٠) ، هو عبارة عن أحد الأشكال المحتملة للعتبة المتعددة الأبواع المحددة استاتيكياً (إن الأنظمة المماثلة لهذا النظام موضحه بالتفصيل فى بند ٢—٩) . والآن نحقق الاستقرار الهندسى لهذا النظام . وللقيام بذلك نقتطع من العتبة جزءاً ما (قرصاً) مستقراً هندسياً ، ومربوطاً مع الأرض ربطاً ثابتاً بواسطة ثلاثة قضبان ، ثم نحاول التأكد من أن كل جزء من بقية أجزاء

العتبة المستقرة هندسياً ، يكون مرتبطاً مع الجزء (القرص) الذى يليه ، بواسطة ثلاثة قضبان .

ونجد فى النظام الذى نبحثه بأن القضيب رقم I ، يرتبط مع الأرض ارتباطاً ثابتاً بواسطة ثلاثة قضبان لا تتقاطع فى نقطة واحدة وغير متوازية مع بعضها البعض ، والقضيب رقم II يرتبط مع الأرض بقضيبين ومع القضيب رقم I بواسطة القضيب ab ،



الشكل ١ — ٢٠



الشكل ١ — ٢١

يشكل أيضاً نظاماً مستقراً . ويرتبط القضيب رقم III مع القضيب رقم II بنفس الطريقة السابقة (بواسطة القضيب cd وقضيبين ساندين) ، وأخيراً يرتبط الجزء الأخير ef مع القضيب III بواسطة المفصلة e والقضيب الساند (القائم) . إذن يصبح النظام بأجمعه ، نظاماً مستقراً هندسياً .

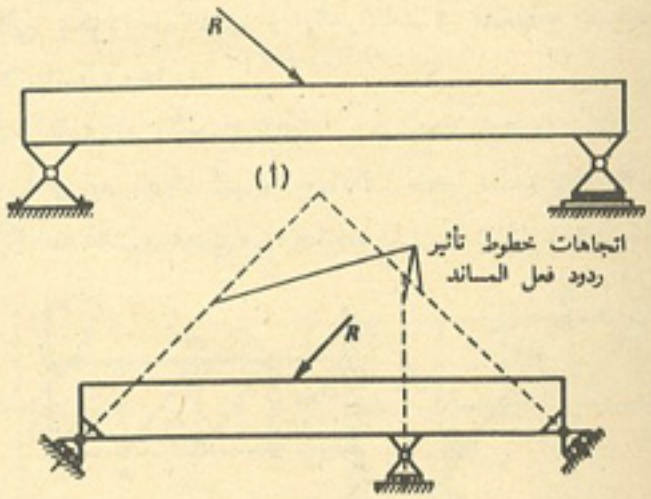
ونبحث الآن أحد أمثلة النظام غير المستقر هندسياً (شكل ١ — ٢١) . يمكن اعتبار القرص رقم I والقرص رقم III ، بمثابة القضيبين الساندين AD و CF للقرص رقم II . وبذلك يكون القرص رقم II مرتبطاً أو مثبتاً فى الأرض بواسطة ثلاثة قضبان هى AD ، CF والقضيب الرأسى الساند B ، ومحاور هذه القضبان تتقاطع فى نقطة E . إذن يصبح النظام ، نظاماً لحظى التغير .

البند ١ — ٣ : الإنشاءات (الأنظمة) الإطارية المحددة استاتيكياً ، المستقرة هندسياً

لقد بينا أعلاه بأن رباط الإنشاء مع الأرض ، الذى يعبر عنه تخطيطياً بواسطة ثلاثة قضبان لا تتقاطع فى نقطة واحدة ، هو رباط مستقر هندسياً . وهذا الرباط محدد استاتيكياً ، وذلك لأن عدد القوى (الإجهادات) فى هذه القضبان ، يساوى عدد المعادلات الاستاتيكية (مثلا ، $\Sigma X = 0$ ، $\Sigma Y = 0$ و $\Sigma M = 0$) ، التى يمكن وضعها للقوى المؤثرة فى نفس المستوى ، الموجودة فى حالة توازن .

إن الإنشاء لا يعتبر محدداً استاتيكياً ، بالنسبة للمساند ، إلا عندما يكون عدد البارامترات التى تحدد ردود الفعل عند هذه المساند ، مساوياً ثلاثة . وهذا الشرط ينطبق مثلا ، على النوعين التاليين من المساند :

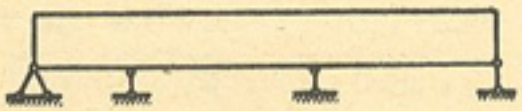
(١) المجموعة المؤتلفة المكونة من مسند مفصلى متحرك ومسند مفصلى ثابت — للإنشاءات المستندة على نقطتين ، أى المحمولة على مسندين (شكل ١ — ٢٢ ، أ) ،



الشكل ١ — ٢٢

(٢) المجموعة المؤتلفة المكونة من ثلاثة مساند مفصلية متحركة (شكل ١ — ٢٢ ، ب) — عند وجود ثلاث نقاط للارتكاز فى الإنشاء ، وهنا يجب أن لا تتقاطع اتجاهات ردود فعل المساند الثلاثة ، فى نقطة واحدة ، وأن لا تكون متوازية مع بعضها البعض .

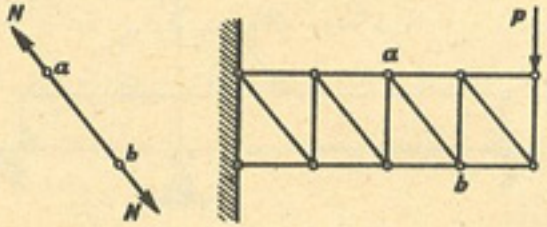
إن وجود أربعة قضبان ساندة وأكثر فى النظام (الإنشاء) المستقر هندسياً ، ثلاثة منها لا تتقاطع اتجاهات محاورها فى نقطة واحدة ، وغير متوازية مع بعضها البعض ، يدل على أن الإنشاء غير محدد ستاتيكياً (شكل ١—٢٣) . ولا يمكن حساب الإنشاء غير المحدد استاتيكياً ، بواسطة المعادلات الاستاتيكية وحدها ، لأن ذلك يتطلب وضع معادلات إضافية على دراسة التشوهات أو الانفعالات الخاصة به .



الشكل ١ — ٢٣

وبعد بحث مسألة المساند ، نأتى الآن إلى بحث الشروط التى يجب أن تتوفر فى الإنشاءات الإطارية (الجمالونات) المحددة استاتيكيا بالذات ، أى تلك الإنشاءات التى يمكن إيجاد القوى أو الإجهادات فى قطعها (قضبانها) بواسطة المعادلات الاستاتيكية وحدها .

وعند تأثير القوى أو الأحمال المركزة ، فى وصلات (مفصلات) الجمالون المفصلى ، تنشأ فى قضبانه المستقيمة إجهادات طولية فقط (إجهادات انضغاط أو شد) . ولإثبات ذلك ، نفصل من الجمالون المبين فى شكل (١ — ٢٤ ، أ) ،

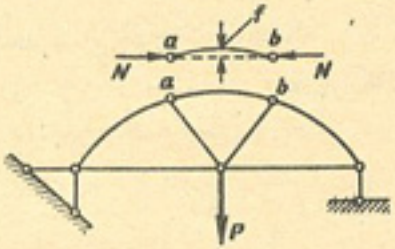


(ب) (أ)

الشكل ١ — ٢٤

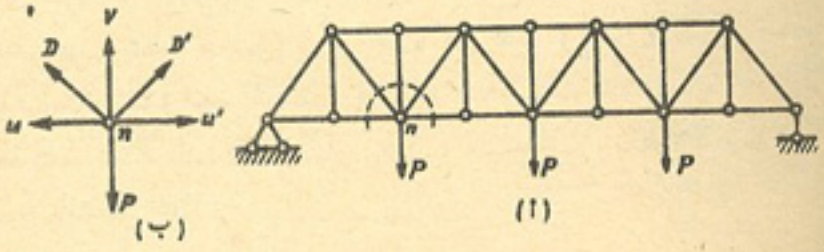
القضيب ab (شكل ١ — ٢٤ ، ب) ونبحث شروط توازنه .

إذا لم يؤثر على القضيب ab أى حمل خارجى تأثيراً مباشراً ، عندئذ لا يكون القضيب فى حالة توازن إلا إذا كانت القوى N ، المؤثرة فيه من خلال المفصلتين a و b ، متساوية فى المقدار ومتعاكسة فى الاتجاه . أن القوى N تمر فى مركزى المفصلتين ، وذلك لأننا اعتبرنا القضبان موصولة (مربوطة) مع بعضها بمفصلات مثالية (مفصلات لا احتكاكية) . إذن تكون القوى N متجهة على امتداد المستقيم المار بمركزى المفصلتين a و b ، لذا فإنها تؤدى إلى نشوء إجهادات طولية فقط ، فى المقاطع العرضية للقضيب ab . أما إذا احتوى الجمالون على قضبان منحنية ، عندئذ تنشأ فى المقاطع العرضية لهذه القضبان ، بالإضافة إلى الاجهادات الطولية ، عزوم انحناء تؤدى إلى نشوء إجهادات إضافية فيها . والقيم القصوى لهذه العزوم تساوى $M_{max} = Nf$ (شكل ١ — ٢٥) .



الشكل ١ — ٢٥

وإذا كان الجمالون بأجمعه فى حالة توازن عند تأثير الأحمال الخارجية فى وصلاته (شكل ١ — ٢٦ ، أ) ، عندئذ تكون كل وصلة من وصلاته (شكل ١ — ٢٦ ، ب) ، موجودة فى حالة توازن أيضاً . أى تكون الأحمال



(ب) (أ)

الشكل ١ — ٢٦

الخارجية المؤثرة فى الوصلة ، والإجهادات الداخلية فى القضبان ، المجتمعة معاً فى هذه الوصلة ، فى حالة توازن متبادل .

وتؤثر فى كل وصلة من وصلات الجمالون ، مجموعة من القوى المتلاقية فى نقطة واحدة . ولهذه المجموعة من القوى ، من الناحية الاستاتيكية ، معادلتان للتوازن ، وهما :

$$\Sigma X = 0 \quad \text{و} \quad \Sigma Y = 0$$

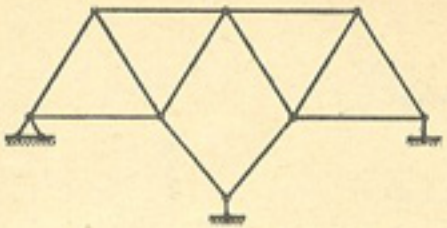
وإذا احتوى الجمالون على K من الوصلات ، يمكن أن يوضع لها عدد من معادلات التوازن يساوى $2K$ ، وبواسطة هذه المعادلات يمكن إيجاد الإجهادات فى جميع قضبان الجمالون . وإيجاد ثلاثة ردود فعل مجهولة عند المساند . ومن هذه المعادلات يمكن إيجاد كل معادلات التوازن الأخرى لأجزاء الجمالون المنفردة (مثل مجموعة الوصلات) أو للجمالون بأجمعه ككل ، ولهذا السبب لا تعطى أية شروط جديدة لتحديد الإجهادات المجهولة . إذن سوف يكون الجمالون محدداً استاتيكياً ، إذا كان عدد قضبانه S مساوياً لضعف عدد وصلاته ، ناقصاً ثلاثة ، أى :

$$S = 2K - 3 \qquad (1-2)$$

إن العلاقة الناجمة بين عدد قضبان الجمالون المحدد استاتيكياً وبين عدد وصلاته ، تنطبق مع العلاقة أو الصيغة (1 — 1) المتعلقة بالاستقرار الهندسى للجمالون .

وبالتالى فإن كل جمالون بسيط مكون من مثلث مفصلى مع إضافة وصلات أخرى على التوالى (بحيث ترتبط كل واحدة مع الأخرى بواسطة قضيبين غير واقعين على استقامة واحدة) . هو عبارة عن نظام (إنشاء) مستقر هندسياً ، ومحدد استاتيكياً فى نفس الوقت . وإذا قمنا عند حساب عدد قضبان الجمالون S ، بأخذ القضبان الساندة فى الاعتبار أيضاً ، عندئذ نجد بأن العلاقة $S=2K-3$ ، تصبح بالشكل التالى :

$$S_{tot} = 2K \qquad (1-3)$$



الشكل ١ — ٢٧

ومن الملائم استخدام هذه الصيغة عندما يكون الإنشاء، بغض النظر عن كونه غير مستقر هندسياً (أى عدد قضبانه S أقل من $2K-3$) ، مثبتاً فى الأرض تثبيتاً يجعله يشكل معها نظاماً واحداً ، مستقراً هندسياً ومحدداً استاتيكياً . ويبين الشكل (١ — ٢٧) مثالا لهذا الإنشاء، وفيه $K = 8$ ، وعدد القضبان S يساوى ١٢ (بدون حساب القضبان الساندة) . وهكذا نجد بأن الإنشاء لا يفى بالشرط (1 — 1) وهو $S = 2K - 3$ (وذلك لأن عدد القضبان فى هذه الحالة يساوى ١٢ بينما يجب أن يكون مساوياً ١٣ ، لأن $2K - 3 = 2 \times 8 - 3 = 13$) . إذن يكون الإنشاءغير مستقر هندسياً . ولكن العدد الكلى لقضبان الإنشاء S_{tot} مع القضبان الساندة ، الذى يساوى ١٦ ، يفى بالشرط (3 — 1) ولذلك فإن هذا الإنشاءقد يكون (وهو هنا بالفعل) إنشاء مستقراًهندسياً ومحدداً استاتيكياً* .

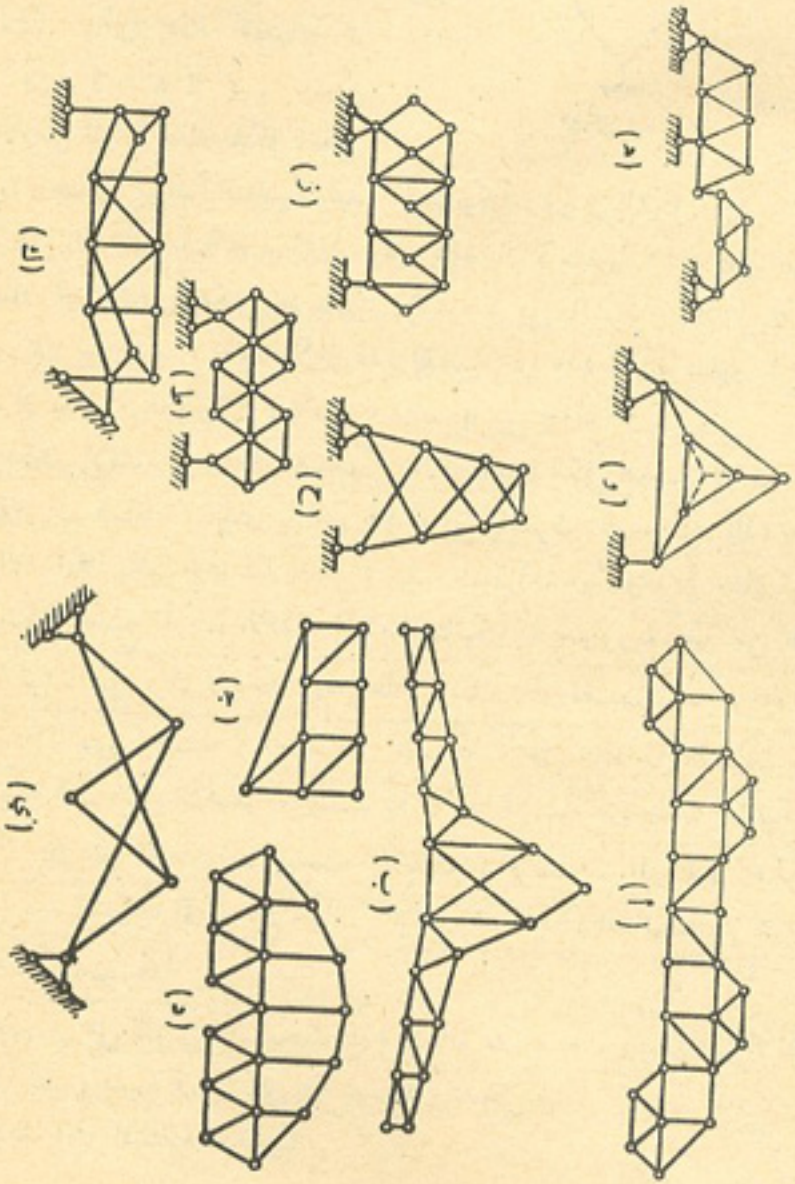
وتكون جميع قضبان الإنشاء المحدد استاتيكياً ، ضرورية حتماً من ناحية الاستقرار الهندسى ، أى لا يوجد فى مثل هذا الإنشاء، أى قضيب زائد عن الحاجة .

وإذا احتوى الإنشاء (النظام) فى مجموعته ، على عدد من القضبان يزيد على العدد الضرورى الأصغر ، عندئذ يكون هذا الإنشاء غير محدد استاتيكياً .

أن نظرية الإنشاءات تبحث الأنظمة (الإنشاءات)المستقرة هندسياً فقط ، بعد تصنيفها إلى نوعين هما : الإنشاءات المحددة استاتيكياً والإنشاءات غير المحددة استاتيكياً .

ونقترح على القارئ أن يبحث هذه المسألة مع نفسه ، ويبين أى الأنظمة (الإنشاءات) المبينة فى الشكل (١ — ٢٨) تدخل ضمن النوعين المذكورين من الإنشاءات المستقرة هندسياً .

* إن طرق بحث مثل هذا النوع من الإنشاءات ، مبينة فى البند (٤ — ٦) .



الشكل ٢ – ١

الفصل الثانى

العتبات

البند ٢ – ١ : معلومات عامة

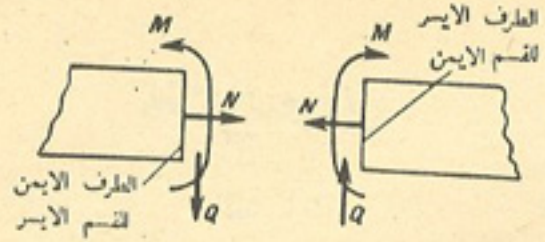
يعرف القارئ الذى درس علم مقاومة المواد ، طرق تحديد الإجهادات الداخلية الناشئة فى المقاطع العرضية للعتبات البسيطة المحددة استاتيكياً ، وتخطيط الرسوم البيانية للإجهادات ، الناجمة عن تأثير الأحمال الساكنة (الثابتة) على العتبات . إن هذه الطرق بالذات تستخدم فى علم الميكانيكا الإنشائية أيضاً .

وعند تحديد قيم الإجهادات الداخلية فى العتبات ، سوف نتبع القواعد التالية :

سنعتبر قوة القص Q موجبة ، عندما يكون اتجاهها فى الطرف الايسر للجزء الأيمن من العتبة من الأسفل إلى الأعلى ، وعندما يكون اتجاهها فى الطرف الأيمن للجزء الأيسر من العتبة من الأعلى إلى الأسفل . وسوف نعتبر عزم الانحناء M موجباً ، عندما يكون اتجاهه فى الطرف الأيسر للجزء الأيمن من العتبة فى اتجاه عقرب الساعة ، وعندما يكون اتجاهه فى الطرف الأيمن للجزء الأيسر من العتبة فى عكس اتجاه عقرب الساعة .

وعندما لا يكون اتجاه الأحمال عمودياً على محور العتبة (بل مائلا بزاوية معينة) ، تنشأ فى مقاطعها العرضية ، بالإضافة إلى قوى القص وعزوم الانحناء ، قوى طولية أيضاً ، يرمز إليها بالحرف N . وتعتبر القوة الطولية موجبة ، إذا أدت إلى حدوث شد فى مقاطع العتبة ، وسالبة إذا أدت إلى حدوث انضغاط فيها .

ويبين الشكل (٢ – ١) الاتجاهات الموجبة لقوة القص والقوة الطولية وعزم الانحناء فى المقطع العرضى للعتبة . ويتضح من الشكل بأنه عند تأثير عزم الانحناء الموجب ، تتعرض الألياف العليا للعتبة إلى الانضغاط (انتقلص) ، أما الألياف



الشكل ٢ – ١

السفلى فتتعرض إلى الشد (التمدد) . إن قوة القص الموجبة تدير كل جزء من أجزاء العتبة حول طرفها الآخر ، باتجاه عقرب الساعة .

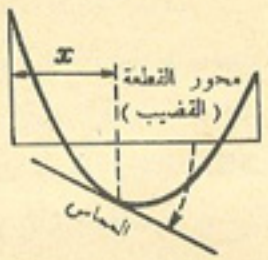
وعند تخطيط الرسوم البيانية لقوى القص والقوى الطولية ، توضع قيمها الموجبة إلى أعلى محور الرسم البيانى (محور السينات) ، أما قيمها السالبة فتوضع إلى أسفل المحور المذكور . ومن المفيد أن توضع على الأقسام المستقلة لهذه الرسوم البيانية ، علاقات الإجهادات الداخلية المناظرة . أما عند تخطيط الرسوم البيانية لعزوم الانحناء ، فتوضع قيمها الموجبة إلى أسفل محور الرسم البيانى ، وتوضع قيمها السالبة إلى أعلى هذا المحور . ونتيجة لذلك ، تصبح الرسوم البيانية لعزوم الانحناء ، واقعة فى جهة الألياف المشدودة للعتبة° .

ويمكن تحديد علامة قوة القص بواسطة الرسم البيانى لعزوم الانحناء وذلك باتباع القاعدة التالية : تكون قوة القص فى المقطع المعطى موجبة ، إذا كان من الضرورى لانطباق محور العتبة مع مماس الرسم البيانى لعزوم الانحناء ، تدوير محور العتبة فى إتجاه عقرب الساعة . ويجب تدوير المحور دائمًا ، بحيث لا تزيد زاوية الدوران على ٩٠° .

لنفرض مثلا ، أنه يراد تحديد علامة قوة القص فى المقطع x من العتبة ، التى خطط الرسم البيانى لعزوم انحنائها ، فى الشكل (٢ – ٢) . فى هذه الحالة ، لكى نجعل محور العتبة ينطبق مع مماس الرسم البيانى لعزوم الانحناء ، يجب تدوير

° فى علم مقاومة المواد ، تخطط الرسوم البيانية لعزوم الانحناء عادة ، فى جهة الألياف المضغوطة .

المحور فى اتجاه عقرب الساعة (وهذا الدوران موضح فى الشكل على هيئة سهم منقط) ، إذن تكون قوة القص فى المقطع المذكور ، موجبة العلامة . أما فى المقطع الواقع قرب الطرف الأيمن للعتبة ، فتكون قوة القص سالبة العلامة ، وذلك لأنه لكى نجعل محور العتبة ينطبق مع المماس ، يجب تدوير المحور فى عكس اتجاه عقرب الساعة (انظر إلى الشكل ٢ – ٢) .



الشكل ٢ – ٢

إن قوة القص Q تساوى (من حيث القيمة والعلامة) ، مجموع مساقط كافة القوى الخارجية المؤثرة فى القسم الأيسر للعتبة ، على المستوى العمودى لمحورها ، المار فى المقطع العرضى المبحوث ، أو تساوى مجموع مساقط كافة القوى الخارجية (على نفس المستوى العمودى) ، المؤثرة فى القسم الأيمن للعتبة ، بعكس العلامة :

$$Q = \sum_{left} Y = - \sum_{right} Y \qquad (2 - 1)$$

وفى هذه الحالة تكون مساقط كافة القوى الخارجية على المستوى العمودى على محور العتبة موجبة العلامة ، عندما يكون اتجاهها من الأسفل إلى الأعلى .

إن عزم الانحناء M يساوى (من حيث القيمة والعلامة) ، مجموع عزوم كافة القوى الخارجية المؤثرة فى القسم الأيسر للعتبة ، حول المحور z (المار فى مركز ثقل المقطع العرضى المبحوث للعتبة ، بصورة عمودية على مستوى تأثير القوى الخارجية) ، أو يساوى مجموع عزوم كافة القوى الخارجية المؤثرة فى القسم الأيمن للعتبة ، مأخوذة بعلامة معاكسة :

$$M = \sum_{left} M_z = - \sum_{right} M_z^{*} \qquad (2 - 2)$$

° يمكن حذف الرمز الدليل z .

وفى هذه الحالة تكون عزوم القوى الخارجية ، موجبة العلامة ، عندما تؤثر القوى فى اتجاه عقرب الساعة .

والقوة الطولية N تساوى (من حيث القيمة والعلامة) ، مجموع مساقط كافة القوى الخارجية ، المؤثرة فى القسم الأيسر للعتبة ، على محور العتبة ، أو تساوى مجموع مساقط كافة القوى الخارجية (على نفس المحور) ، المؤثرة فى القسم الأيمن للعتبة ، مأخوذة بعكس العلامة :

$$N = \sum_{left} X = - \sum_{right} N \qquad (2 - 3)$$

وفى هذه الحالة ، تكون مساقط القوى الخارجية على محور العتبة ، موجبة العلامة إذا كانت مؤثرة من اليمين إلى اليسار .

وتوجد علاقات معينة بين الرسوم البيانية للعزوم M وقوى القص Q والحمل المؤثر على العتبة . وتساعد هذه العلاقات ، على مراجعة صحة الرسوم البيانية ، وتسهل عملية تخطيطها . وتستخدم هذه العلاقات ليس بالنسبة للعتبات فحسب ، بل وللإنشاءات الإطارية أيضًا ، ولذلك فإنها تعتبر ذات أهمية كبيرة فى علم الميكانيكا الإنشائية .

إن العلاقة الأساسية تكون على الشكل التالى :

$$Q = \frac{dM}{dx} \qquad (2 - 4)$$

أى إن قوة القص تساوى المشتقة الأولى لعزم الانحناء ، على امتداد العتبة (نظرية جورافسكى) . وفى هذه الحالة تنطبق قاعدة العلامات المذكورة سابقًا فى هذا الفصل ، على قوة القص Q وعلى العزم M ، بينما يكون الاتجاه الموجب للمحور x ، من اليسار إلى اليمين .

وبالإضافة إلى ذلك ، توجد العلاقة التالية :

$$q = \frac{dQ}{dx} \qquad (2 - 5)$$

أى إن شدة الحمل الموزع بصورة عمودية على محور العتبة ، تساوى المشتقة الأولى

لقوة القص على امتداد العتبة ، وفى هذه الحالة يعتبر الحمل الموزع موجبًا ، إذا كان اتجاهه من الأسفل إلى الأعلى .

ومن العلاقتين المذكورتين أعلاه ، نستطيع مباشرة أن نستنتج ما يلى (لن نقدم الإثبات هنا) :

(١) إن قوى القص السالبة ، تناظر القيم المتناقصة لعزم الانحناء M ، المشار إليها بزيادة احداثيات الرسم البيانى لعزم الانحناء (من اليسار إلى اليمين) ، أما قوى القص Q الموجبة فتناظر نقصان إحداثيات الرسم البيانى لعزم الانحناء M .

(٢) كلما زاد ميل مماس الرسم البيانى لعزم الانحناء M ، كلما زادت القيمة المطلقة لقوة القص Q . والقيمة العددية لقوة القص ، تساوى ظل الزاوية المحصورة بين هذا المماس ومحور العتبة .

(٣) تكون قيمة عزم الانحناء إما كبرى أو صغرى ، فى المقاطع التى تكون فيها قيمة قوة القص مساوية للصفر .

(٤) إن الرسم البيانى لعزم الانحناء M ، بين حملين مركزين (إذا لم يوجد بينهما حمل موزع) ، يكون على شكل خط مستقيم (على العموم مائل) ، أما الرسم البيانى لقوة القص Q ، فيكون على شكل خط مستقيم أفقى

(٥) فى أقسام العتبة ، المعرضة لتأثير الأحمال الموزعة بانتظام ، يكون الرسم البيانى للعزم M على هيئة قطع مكافىء مخروطى ، أما الرسم البيانى لقوة القص Q ، فيكون على هيئة خط مستقيم مائل .

(٦) عند تأثير الحمل الموزع ، يكون تحدب الرسم البيانى للعزم M ، متجهًا دائمًا فى نفس اتجاه ذلك الحمل .

(٧) فى نقاط تأثير الأحمال المركزة ، العمودية على محور العتبة ، تظهر انكسارات فى الرسم البيانى للعزوم M ، وطفرات فى الرسم البيانى لقوة القص Q . وعندما تكون الأحمال متجهة إلى الأسفل ، فإن الطفرة الحاصلة فى الرسم البيانى لقوة القص Q ، عند الانتقال من اليسار إلى اليمين ، يجب أن تتجه إلى الأسفل أيضًا ، وعندما تكون الأحمال متجهة إلى الأعلى ، يجب أن تتجه الطفرة إلى الأعلى أيضًا ، ويكون مقدار الطفرة مساويًا لمقدار الحمل .

(٨) إن تغير قيمة عزم الانحناء فى أى قسم من أقسام العتبة ، يساوى مساحة الرسم البيانى لقوى القص فى ذلك القسم (على شرط أن لا تؤثر على العتبة فى ذلك القسم ، أية عزوم خارجية) .

(٩) إن تغير قيمة قوة القص فى أى قسم من أقسام العتبة ، يساوى مساحة الرسم البيانى للحمل الموزع بانتظام ، فى ذلك القسم .

وسوف نبحث فى هذا الفصل طرق تحديد الإجهادات الناشئة فى المقاطع العرضية للعتبات البسيطة المحددة استاتيكيا ، نتيجة لتأثير الأحمال المتنقلة ، وكذلك طرق تحديد الإجهادات الناشئة فى المقاطع العرضية للعتبات المتعددة الأنواع ، المحددة استاتيكيا ، نتيجة لتأثير الأحمال الساكنة والأحمال المتنقلة . وسوف نقابل الأحمال المتنقلة ، عند حساب الجسور (الكبارى) والأوناش وغيرها من الإنشاءات الهندسية . ومن أمثلة هذه الأحمال ، القطار المتحرك على جسر حديدى ، والونش المتنقل على العارضة الخاصة به (عارضة الونش) ، وغير ذلك .

وتعتمد الإجهادات فى قطع الإنشاء المختلفة (وكذلك الانفعالات) على وضع الحمل المتنقل . ولتحديد إجهادات التصميم القصوى ، يجب أن نختار من جميع الأوضاع الممكنة للحمل ، الوضع الذى يجعل القطعة المصممة خاضعة لأسوأ الظروف . فمثلا ، عند إختيار أبعاد المقطع العرضى لقطعة من قطع الجمالون ، يجب وضع الحمل المتنقل المعين ، فى الوضع الذى يؤدى إلى نشوء إجهادات قصوى فى القطعة المذكورة . إن وضع الحمل على هذه الصورة ، يسمى بالوضع غير الملائم أو بالوضع الخطر . ويمكن دائمًا إيجاد الوضع الخطر للحمل المتنقل ، بالنسبة لكل قطعة من قطع الجمالون ولكل مقطع عرضى من مقاطع العتبة وإلى آخره .

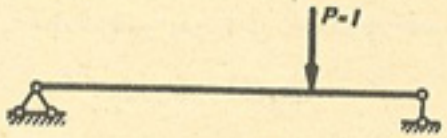
وهذا لا ينطبق على الإجهادات الداخلية فى قطع الإنشاء فحسب ، بل وينطبق كذلك على ردود فعل المساند وانحناء العتبات وغير ذلك .

إن حساب (تصميم) الإنشاء المعرض لتأثير الأحمال المتنقلة ، يصبح سهلا إلى درجة كبيرة ، بتطبيق مبدأ تراكب القوى (principle of superposition) ،

الذى يتلخص فى امكانية جمع (تراكب) القوى الداخلية والإجهادات والانفعالات ، الناجمة عن تأثير الأحمال المختلفة على الإنشاء . وينتج عن ذلك ، أنه إذا زاد أحد الأحمال بعدد معيّن من المرات ، فإن الإجهادات والانفعالات الناجمة عنه ، تزداد أيضًا بنفس العدد من المرات .

وعلى سبيل المثال ، إذا أثرت على الإنشاء فى نفس الوقت ، مجموعتان من الأحمال ، فإن الإجهاد الناجم عن ذلك فى أية قطعة من قطع الإنشاء ، سيساوى مجموع الإجهادات الناجمة فيها ، عند تأثير كل مجموعة من المجموعتين على انفراد* .

وسوف نبدأ بحث تأثير الاحمال المتنقلة على الإنشاء ، بدراسة أبسط الحالات ، عندما يتحرك على العتبة حمل رأسى واحد فقط P ، قيمته مساوية للوحدة (شكل ٢ — ٣) . وسوف نبحث كيفية تغير مختلف العوامل التى نقوم بدراستها



الشكل ٢ — ٣

(مثل رد فعل المسند ، الإجهاد فى قطعة الجمالون ، عزم الانحناء فى مقطع معين من مقاطع العتبة ، إنحناء العتبة عند نقطة معينة وغير ذلك من العوامل الأخرى) عند تحرك أو تنقل الحمل $P = 1$ على العتبة . وسوف نعبر تخطيطياً عن القانون الموضوع فى هذه الحالة ، الخاص بتغير العامل المبحوث ، تبعاً لوضع الحمل المتنقل أو المتحرك $P = 1$.

إن الرسم البيانى الذى يعبر عن قانون تغير أى عامل من العوامل المختلفة (مثل

* إن مبدأ تراكب القوى ينطبق على الحالة التى تؤثر فيها على الإنشاء ، بالإضافة إلى الأحمال المركزة ، العزوم ودرجات الحرارة والأحمال الموزعة وغيرها .

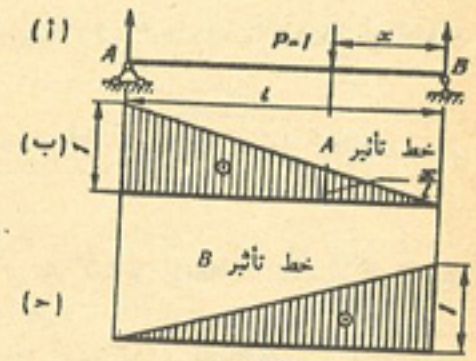
ولا يستخدم مبدأ تراكب القوى عند حساب تحدب العتبات مع الانحناء ، وكذلك عندما لا تخضع مادة الإنشاء لقانون هوك ، وفى حالات أخرى غيرها .

عزم الانحناء فى المقطع) عند تحرك الحمل $P = 1$ على العتبة ، يسمى بخط تأثير ذلك العامل . (يمكن رسم خطوط تأثير الإجهادات أو الانفعالات ، للحالات التى تتحرك فيها على العتبة وحدة عزوم الانحناء أو القوة الطولية وغير ذلك) .

ويجب تمييز خط التأثير عن الرسم البيانى ، لأنهما فى الحقيقة مفهومان متناقضان تماماً . وفى الواقع ، نجد بأن الإحداثيات الرأسية للرسم البيانى ، تمثل طبيعة توزيع العامل المبحوث (مثل عزم الانحناء) على مختلف مقاطع العتبة ، عند الوضع الساكن للحمل ، أما الإحداثيات الرأسية لخط التأثير ، فهى على عكس ذلك ، تمثل طبيعة تغير العامل (مثلا ، نفس العزم بالذات) الذى ينشأ فى مقطع معين من مقاطع العتبة ، عند تأثير الحمل $P = 1$ ، المتحرك على طول العتبة .

البند ٢ – ٢ : خطوط تأثير ردود فعل المساند فى العتبات البسيطة والعتبات الكابولية

لنفرض بأن الحمل $P = 1$ يتحرك على إمتداد العتبة البسيطة AB (شكل ٢–٤ ، أ) . نرمز إلى المسافة من المسند الأيمن إلى موضع الحمل بالرمز x. إن هذه المسافة سوف تتغير عند انتقال الحمل ، فى حدود تتراوح بين الصفر (عندما يكون الحمل $P = 1$ واقعاً على المسند الأيمن) وبين l (عندما يكون الحمل واقعاً على المسند الأيسر) .



الشكل ٢ – ٤

والآن نحدد قيمة رد فعل المسند A تبعا للمسافة x. وللقيام بذلك ، نستخرج مجموع عزوم كافة القوى حول المسند الأيمن :

$$\Sigma M_B = Al - Px = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$A = \frac{Px}{l} ,$$

ولكن بما أن $P = 1$ ، إذن :

$$A = \frac{1 \times x}{l} = \frac{x}{l}$$

وهذه المعادلة تعطينا قانون تغير قيمة رد فعل المسند A ، تبعاً لوضع الحمل $P = 1$.

وبالتعبير عن هذا القانون تخطيطياً ، نحصل على خط تأثير رد فعل المسند A. وبما أن الكمية المتغيرة x تدخل فى معادلة من الدرجة الأولى ، إذن يكون خط التأثير عبارة عن خط مستقيم (شكل ٢ – ٤ ، ب) :

عند $x = 0$ نجد بأن $A = 0$

وعند $x = l$ نجد بأن $A = \frac{l}{l} = 1$

أن الاحداثيات الرأسية $\frac{x}{l}$ لخط تأثير رد فعل المسند ، هى عبارة عن كميات لأبعدية ، وذلك لأن أبعاد x و l متساوية تماماً .

وقبل البدء فى رسم خط تأثير رد فعل المسند A ، يجب اختيار مقاييس رسم معين . وعلى سبيل المثال ، إذا اتخذنا مقياس رسم يساوى الوحدة ، أى ١ سم = ١ ، عندئذ يجب أن نضع على المسند الأيسر (حيث $A = 1$) ، المقدار ١ سم .

إن قيمة الإحداثى الرأسى لخط تأثير رد فعل المسند A ، المقاسة على مسافة x من المسند الأيمن ، تساوى $\frac{x}{l}$. أن القيمة العددية لهذا الإحداثى الرأسى ، تساوى قيمة رد فعل المسند A ، فى اللحظة التى يكون فيها الحمل $P = 1$ واقعاً على مسافة x من المسند الأيمن . أو بعبارة أخرى ، إن الإحداثى الرأسى لخط تأثير رد فعل المسند A ، يمثل قيمة رد فعل A ، فى اللحظة التى يكون فيها الحمل المتنقل $P = 1$، واقعاً فوق الإحداثى المذكور . ولكى نتمكن من إيجاد قيمة رد فعل A

عند الوضع المعين للحمل $P = 1$ ، باستخدام خط التأثير ، يجب أن نقيس الاحداثى الرأسى لخط التأثير ، تحت ذلك الحمل (بمقياس الرسم المتخذ).

وإذا أثر على العتبة الحمل P_1 ، وأردنا حساب رد فعل المسند A ، الناجم عن تأثير هذا الحمل ، يجب أن نضرب قيمة الإحداثى الرأسى لخط التأثير ، المقاسة تحت الحمل (والتى تعطى أو تمثل قيمة رد فعل A الناجم عن تأثير الحمل $P = 1$) ، فى قيمة الحمل P_1. وعندما تؤثر على العتبة مجموعة من الأحمال الرأسية المركزة ، يجب إيجاد قيم ردود فعل المسند A الناجمة عن كل حمل من الاحمال على انفراد (بضرب الإحداثى الرأسى الواقع تحت الحمل فى قيمة ذلك الحمل) ، ثم جمع ردود الفعل الناجمة عن الأحمال المنفردة ، فنحصل بذلك على رد الفعل الكلى ، الناجم عن تأثير تلك المجموعة من الأحمال المركزة .

ونرسم الآن خط تأثير رد فعل المسند B. ولأجل ذلك ، نستخرج مجموع العزوم حول المفصلة المركزية للمسند الأيسر A :

$$\Sigma M_A = -Bl + P(l - x) = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$B = \frac{P(l-x)}{l} = \frac{1(l-x)}{l} = \frac{l-x}{l}$$

وهذه المعادلة تمثل قانون تغير قيمة رد فعل B عند انتقال الحمل $P = 1$. ونقوم الآن بالتعبير عن هذا القانون تخطيطياً :

عند $x = 0$ نجد بأن $B = \frac{l}{l} = 1$

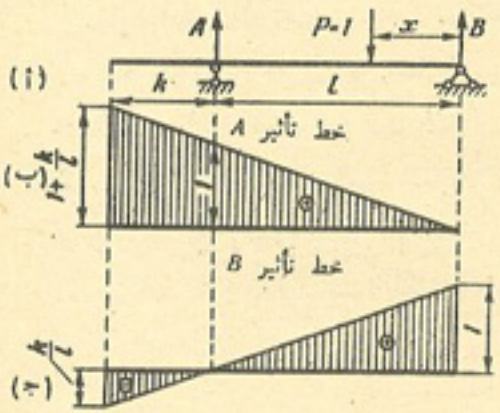
وعند $x = l$ نجد بأن $B = \frac{l-l}{l} = 0$

ويبين الشكل (٢ — ٤ ، جـ) خط تأثير رد فعل المسند B . والإحداثيات الرأسية لخط التأثير هذا ، هى عبارة عن قيم لابعدية ، ومقياس الرسم لهذه الإحداثيات ، يجب أن يكون نفس مقياس الرسم المأخوذ لإحداثيات خط تأثير رد فعل المسند A . إن قيمة الإحداثى الرأسى لخط تأثير رد فعل B ، تساوى قيمة رد فعل هذا ، فى اللحظة التى يكون فيها الحمل $P = 1$، واقعاً فوق ذلك الإحداثى . إذن

لتحديد قيمة رد فعل B ، عند الوضع المعلوم للحمل $P = 1$ على العتبة ، يجب قياس الإحداثى الرأسى لخط التأثير تحت هذا الحمل .

أن خطوط التأثير المبينة فى الشكل ٢ — ٤ ب و جـ ، واضحة بحيث يمكن فهمها بمجرد النظر اليها . مثلا ، يمكن لأول وهلة ، معرفة وضع الحمل P_1 الذى تكون عنده قيمة رد فعل المسند المناظر ، أكبر ما يمكن . ولكى نحصل من الحمل P_1 على أكبر قيمة ممكنة لرد الفعل A ، يجب وضع الحمل المذكور فوق المسند الأيسر (فوق الإحداثى الرأسى الأكبر لخط تأثير رد فعل A) . ولكى نحصل على أكبر قيمة لرد الفعل B ، يجب وضع الحمل P_1 فوق المسند الأيمن ، أى فوق الإحداثى الرأسى الأكبر لخط تأثير رد فعل B .

أن كل من خطوط التأثير ، يعطى فكرة عن تغير ذلك العامل الذى رسم له هذا الخط ، دون غيره من بقية العوامل . مثلا ، نجد بأن خط تأثير رد فعل A ، يبين تغير رد فعل المسند A فقط ، أما خط تأثير رد فعل B ، فيبين تغير رد فعل B فقط .



الشكل ٢ — ٥

نأتى الآن إلى رسم خطوط تأثير ردود فعل المساند ، للعتبة الكابولية المبينة فى الشكل (٢ — ٥ ، أ) . ولتحديد رد فعل المسند A ، نضع المعادلة التالية :

$$\Sigma M_B = Al - Px = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$A = \frac{Px}{l} = \frac{1 \times x}{l} = \frac{x}{l}$$

وهذه المعادلة تطابق المعادلة التى حصلنا عليها سابقاً ، للعتبة غير الكابولية (البسيطة) ، مع فارق واحد وهو أن قيمة x تغيرت فى المعادلة المذكورة من الصفر إلى l ، أما فى هذه الحالة فإنها تتغير من الصفر إلى $l + k$ ، حيث k تمثل

طول الكابول الأيسر (الجزء المتدلى الأيسر للعتبة) .

والآن نحدد الإحداثيات الرأسية لخط التأثير :

عند $x = 0$ نجد بأن $A = 0$

وعند $x = l$ نجد بأن $A = \frac{l}{l} = 1$

وعند $x = l + k$ نجد بأن $A = \frac{l+k}{l} = 1 + \frac{k}{l}$

وبوضع الإحداثيات الرأسية التى حصلنا عليها ، نرسم خط تأثير رد فعل A (شكل ٢ — ٥ ، ب) . وهنا نلاحظ بأنه لرسم خط التأثير هذا ، ليس من الضرورى حساب الإحداثى الرأسى الثالث (عند $x = l + k$) ، أى تكفى معرفة إحداثيين رأسيين فقط ، وذلك لأن خط التأثير يمثل خطاً مستقيماً فقط ، ولرسم الخط المستقيم تكفى معرفة إحداثيين رأسيين فقط (مثلا عند $x = 0$ و $x = l$) .

وبمقارنة خط التأثير الذى رسمناه ، مع الخط المبين فى الشكل (٢ — ٤ ، ب) نجد بأنه يمكن بسهولة الحصول على خط تأثير رد فعل المسند A فى العتبة الكابولية ، من خط التأثير المرسوم للعتبة غير الكابولية (البسيطة) . ولكن يجب فقط ، مدّ الخط المستقيم الذى يمثل خط تأثير العتبة البسيطة ، إلى أن يتقاطع مع المستقيم العمودى المار فى نهاية الكابول (الجزء المتدلى من العتبة) .

ولرسم خط تأثير رد فعل B ، نضع المعادلة التالية :

$$\Sigma M_A = -Bl + P(l - x) = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$B = \frac{P(l-x)}{l} = \frac{1(l-x)}{l} = \frac{l-x}{l}$$

وبمقارنة هذه المعادلة مع المعادلة التى حصلنا عليها سابقاً ، للعتبة غير الكابولية (البسيطة) ، نجد بأنهما متماثلتان ، ولا تختلفان إلا فى حدود تغير x فقط .

والآن نحدد الإحداثيات الرأسية لخط التأثير :

عند $x = 0$ نجد بأن $B = \frac{l}{l} = 1$

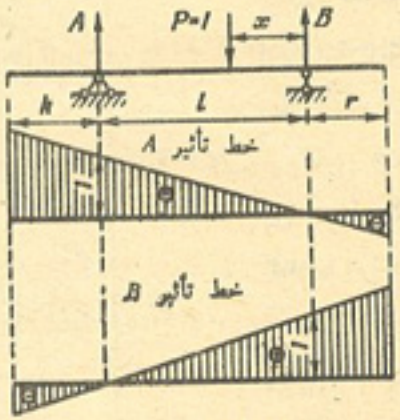
عند $x = l$ نجد بأن $B = \frac{l-l}{l} = 0$

وعند $x = l + k$ نجد بأن $B = \frac{l-(l+k)}{l} = -\frac{k}{l}$

وبوضع الإحداثيات التى حصلنا عليها ، كما فى الشكل (٢ — ٥ ، جـ) ، نرسم خط تأثير رد فعل B . وكما هى الحالة بالنسبة لرد الفعل A ليس من الضرورى هنا أيضاً ، حساب الإحداثى الرأسى الثالث للخط المستقيم (عندما $x = l + k$) .

ويمكن الحصول على خط تأثير رد فعل B للعتبة الكابولية ، من خط تأثير العتبة غير الكابولية (البسيطة) ، وذلك بمد الخط الأخير إلى أن يتقاطع مع المستقيم العمودى المار فى نهاية الكابول .

أن الإحداثيات الرأسية السالبة لخط تأثير رد فعل المسند B ، تشير إلى أنه عندما يكون الحمل $P = 1$ واقعاً فوقها ، يكون رد فعل المسند B سالباً ، أى متجهاً إلى الأسفل .



الشكل ٢ — ٦

ويمكن بطريقة مماثلة رسم خطوط تأثير ردود فعل العتبة ، التى يكون كابولها موجوداً فى الجهة اليمنى . ويبين الشكل (٢ — ٦) خطوط تأثير ردود فعل المساند ، لعتبة محمولة على مسندين وتحتوى على كابولين . ونقترح على القارىء أن يقوم بنفسه بوضع المعادلات اللازمة لرسم خطوط التأثير هذه .

البند ٢ — ٣ : خطوط تأثير عزوم الانحناء وقوى القص ، للعتبة البسيطة والعتبة الكابولية

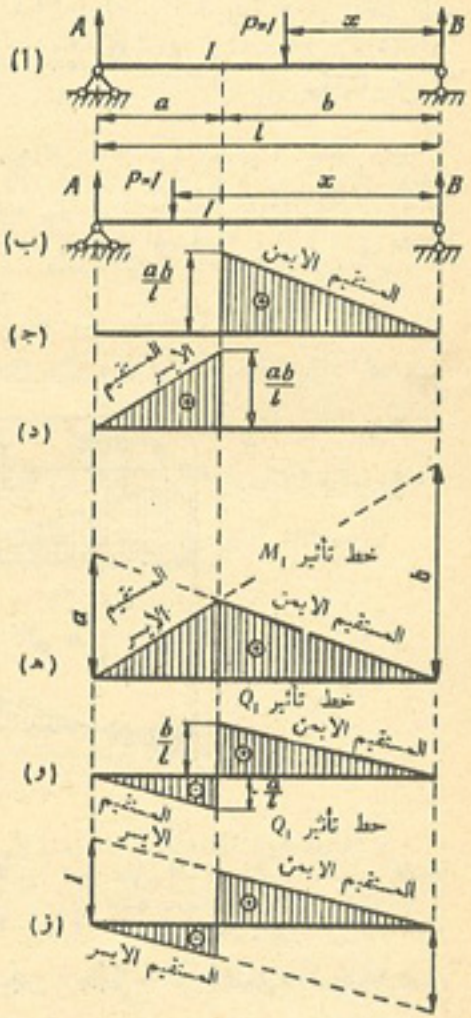
سوف نبحث الآن طرق رسم خطوط تأثير عزوم الانحناء وقوى القص، للعتبة البسيطة .

نبدأ برسم خط تأثير عزم الانحناء للمقطع I ، الواقع على مسافة a من المسند الأيسر للعتبة ، وعلى مسافة b من المسند الأيمن (شكل ٢—٧ ، أ) .

إن عزم الانحناء المؤثر فى المقطع ، يساوى المجموع الجبرى لعزوم القوى الخارجية المؤثرة إلى يسار المقطع ، حول مركز ثقل المقطع قيد البحث ، أو يساوى مجموع عزوم القوى المؤثرة إلى يمين المقطع ، مأخوذاً بعكس العلامة (راجع الصيغة 2 — 2)

وطالما كان الحمل واقعاً إلى يمين المقطع I (شكل ٢—٧ ، أ) ، أى طالما كانت $x \leqslant b$ ، نجد بأنه توجد إلى يسار المقطع I قوة واحدة فقط ، هى رد فعل A ، لذا فإن عزم الانحناء فى المقطع I يساوى ما يلى :

$$M_I = Aa$$



الشكل ٢ — ٧

إذن يمكن الحصول على خط تأثير العزم M_I من خط تأثير رد الفعل A ، بضرب إحداثيات الأخير ، فى المسافة a .

وبالتعويض عن A بقيمتها المستخرجة فى البند (٢ — ٢) ، نحصل على ما يلى :

$$M_I = \frac{x}{l}\, a$$

ولتخطيط الرسم البيانى للمعادلة الأخيرة ، يجب حساب قيمتين من قيم العزم M_I :

عند $x = 0$ نجد بأن $M_I = 0$

وعند $x = b$ نجد بأن $M_I = \frac{ab}{l}$

وطبقاً لهذه المعطيات ، نرسم الخط المستقيم المسمى بالقسم الأيمن لخط تأثير العزم M_I (شكل ٢ — ٧ ، جـ) . أن الإحداثيات الرأسية لهذا المستقيم ، تدل على قيم عزم الانحناء فى المقطع I ، عندما يكون الحمل $P = 1$ واقعاً إلى يمين هذا المقطع ، أى عندما تكون $x \leqslant b$.

وعندما يكون الحمل واقعاً إلى يسار المقطع I (شكل ٢ — ٧ ، ب) أى عندما تكون $x \geqslant b$ ، يكون من الأسهل لتحديد عزم الانحناء فى المقطع ، بحث القسم الأيمن من العتبة .

وفى هذه الحالة نجد بأن عزم الانحناء يساوى : $M_I = +Bb$ (أن عزم رد الفعل B حول المقطع I ، المؤثر بعكس اتجاه عقرب الساعة ، هو عزم سالب ، ولكنه يؤدى إلى نشوء عزم انحناء موجب ، وذلك لأننا نبحث هنا القسم الأيمن من العتبة — راجع الصيغة 2 — 2) .

وبتعويض قيمة رد فعل B فى صيغة العزم M_I (راجع البند ٢ — ٢) ، نحصل على ما يلى :

$$M_I = \frac{l - x}{l}\, b$$

ولتخطيط الرسم البيانى لهذه المعادلة ، نحسب قيمتين من قيم العزم M_I :

عند $x = b$ نجد بأن :

$$M_I = \frac{l-b}{l}\,b = \frac{ab}{l}$$

وعند $x = l$ نجد بأن :

$$M_I = \frac{l-l}{l}\,b = 0$$

ونرسم طبقاً لهذه المعطيات ، المستقيم المسمى بالقسم الأيسر من خط تأثير العزم M_I (شكل ٢ — ٧ ، د) . إن الإحداثيات الرأسية لهذا المستقيم تدل على قيم عزم الانحناء فى المقطع I ، عندما يكون الحمل $P = 1$ واقعاً إلى يسار هذا المقطع ، أى عندما تتغير المسافة x فى الحدود الواقعة بين b و l * .

أما الآن فإذا وصلنا قسمى خط التأثير (شكل ٢—٧ ، ج ، د) مع بعضهما البعض (شكل ٢ — ٧ ، هـ) ، فسنجد بأن كلا قسمى خط التأثير (الأيمن والأيسر) سوف يتقاطعان تحت المقطع I .

وإذا قمنا بمد المستقيمين الممثلين لخط تأثير العزم M_I ، إلى أن يتقاطعا مع العمودين المارين فى المسندين A ، B ، لوجدنا بأن هذين المستقيمين سيقطعان الإحداثيات الرأسية التالية ، عند المسندين: عند المسند الأيسر ، يقطعان الإحداثى الرأسى a ، وعند المسند الأيمن ، يقطعان الإحداثى الرأسى b (شكل ٢ — ٧ ، هـ) . ويمكن إثبات ذلك ، بتعويض القيمة $x = l$ فى معادلة العزم M_I لقسم العتبة الأيمن ، وبتعويض القيمة $x = 0$ لقسم العتبة الأيسر . ولهذا السبب نجد من الناحية العملية ، بأن خط تأثير العزم M_I ، يرسم غالباً بالشكل التالى : يوضع على الخط العمودى المار فى المسند الأيسر ، إحداثى رأسى يساوى المسافة من المقطع I إلى المسند الأيسر ، ويرسم خط مستقيم يصل بين قمة هذا الإحداثى ونقطة الصفر على المسند الأيمن ، ويوضع على الخط العمودى المار فى المسند الأيمن ، إحداثى رأسى يساوى المسافة من المقطع I إلى المسند الأيمن ، ويرسم خط مستقيم يصل

* توضع الإحداثيات الرأسية الموجبة لخطوط التأثير ، إلى الأعلى ، والإحداثيات الرأسية لخط تأثير عزم الانحناء ، الموضوعة فوق العتبة ، تدل على أن هذا العزم يؤدى إلى حدوث شد فى الألياف السفلى للعتبة .

بين قمة هذا الإحداثى ونقطة الصفر على المسند الأيسر .. إن المستقيمين المرسومين بهذه الطريقة ، يتقاطعان تحت المقطع I .

ويمكن اتباع الطريقة التالية فى رسم خط تأثير العزم M_I : نرسم أولا أحد المستقيمين ، مثلا المستقيم الأيمن ، ثم لرسم المستقيم الأيسر ، نقوم بوصل نقطة الصفر عند المسند الأيسر ، مع نقطة المستقيم الأيمن الواقعة تحت المقطع I .

ويعبر عن الاحداثيات الرأسية لخط تأثير عزم الانحناء ، بوحدات الطول ، وهذا يتضح مثلا ، من حقيقة وضع إحداثى رأسى قيمته تساوى المسافة a ، على المسند الأيسر . ولهذا السبب يمكن أن يكون مقياس رسم الإحداثيات الرأسية لخط تأثير عزم الانحناء ، نفس مقياس رسم طول العتبة .

إن الإحداثى الرأسى لخط تأثير العزم M_I ، يمثل قيمة عزم الانحناء فى المقطع I ، عندما يكون الحمل $P = 1$ واقعا فوق الإحداثى المذكور . إذن للحصول على قيمة عزم الانحناء فى المقطع I ، عند الوضع المذكور للحمل $P = 1$ ، يجب قياس الإحداثى الرأسى لخط تأثير العزم M_I ، تحت الحمل .

ونشير هنا إلى أن خط تأثير العزم M_I ، يمثل قانون تغير عزم الانحناء ، بالنسبة للمقطع I فقط . وللحصول على قانون تغير عزم الانحناء فى أى مقطع آخر من مقاطع العتبة ، يجب رسم خط التأثير الخاص بذلك المقطع .

والآن نرسم خط تأثير قوة القص ، الناشئة فى المقطع I . إن قوة القص المؤثرة فى المقطع المذكور ، تساوى المجموع الجبرى لمساقط القوى الخارجية المؤثرة إلى يسار المقطع (أو المؤثرة إلى يمين المقطع ، بعكس العلامة) ، على المستقيم العمودى على محور العتبة (راجع الصيغة 1 — 2) . لنبحث وضعين من أوضاع الحمل $P = 1$.

١ — الحمل موضوع إلى يمين المقطع I ، أى إن $x \leqslant b$ (راجع الشكل ٢—٧ ، أ) . وعندما نبحث الجزء الأيسر من العتبة . نستطيع بسهولة أن نجد بأن :

$$Q_I = A = \frac{x}{l}$$

ولكى نخطط الرسم البيانى لهذه المعادلة ، يجب حساب قيمتين من قيم قوة القص Q_I :

عند $x = 0$ نجد بأن $Q_t = 0$

وعند $x = b$ نجد بأن $Q_t = \frac{b}{l}$

ثم نستخدم هذه المعطيات لرسم القسم الأيمن من خط تأثير قوة القص Q_t (شكل ٢ – ٧، و) . إن الإحداثيات الرأسية لهذا المستقيم، تمثل قيمة قوة القص فى المقطع I ، عندما يكون الثقل $P = 1$ واقعاً إلى يمين هذا المقطع ، أى عند $x \leqslant b$.

٢ – الحمل موضوع إلى يسار المقطع I ، أى إن $x \geqslant b$ (شكل ٢ – ٧، ب) . وعند بحث القسم الأيمن من العتبة، نجد بأن $Q_t = -B$ (مع أن رد الفعل B متجه إلى الأعلى . لكن بما إننا نبحث القسم الأيمن من العتبة ، يجب أن يدخل رد الفعل B فى معادلة قوة القص ، بعلامة معاكسة (راجع الصيغة ١ – 2)).

وبما أن :

$$B = \frac{l - x}{l}$$

إذن

$$Q_t = -\frac{l - x}{l}$$

ونحسب الآن قيمتين من قيم قوة القص Q_t :

عند $x = b$ نجد بأن $Q_t = -\frac{l - b}{l} = -\frac{a}{l}$

وعند $x = l$ نجد بأن $Q_t = -\frac{l - l}{l} = 0$

وقد استخدمت هذه المعطيات (شكل ٢ – ٧ ، و) لرسم القسم الأيسر من خط تأثير قوة القص Q_t (بما إن الإحداثيات الرأسية سالبة ، إذن توضع فى الأسفل) .

وإذا قمنا بمد قسمى خط تأثير Q_t (المستقيمين) ، إلى المسندين . لحصلنا على الإحداثى الرأسى 1 + ، تحت المسند الأيسر ، وعلى الإحداثى الرأسى 1 – ، تحت المسند الأيمن . ويمكن التأكد من ذلك ، بأن نعوض فى أول معادلتى قوة القص Q_t ، القيمة $x = l$ ، ونعوض فى المعادلة الثانية ، القيمة $x = 0$.

ولهذا السبب يمكن رسم خط تأثير القوة Q_t ، بنفس الطريقة المتبعة فى الشكل (٢ – ٧ ، ز) . نضع الإحداثى الرأسى 1 + على العمود المار فى المسند الأيسر ، ونوصل قمته مع نقطة الصفر الواقعة عند المسند الأيمن، ثم نضع الإحداثى 1 – على العمود المار فى المسند الأيمن (فى الأسفل) ، ونوصل قمته مع نقطة الصفر عند المسند الأيسر . ويتضح بعد ذلك ، بأن المستقيمين المرسومين بهذه الطريقة ، يكونان متوازيين . وبعد ذلك نرسم مستقيم عمودى يمر من خلال المقطع ، كما مبين فى الشكل (٢ – ٧ ، ز) .

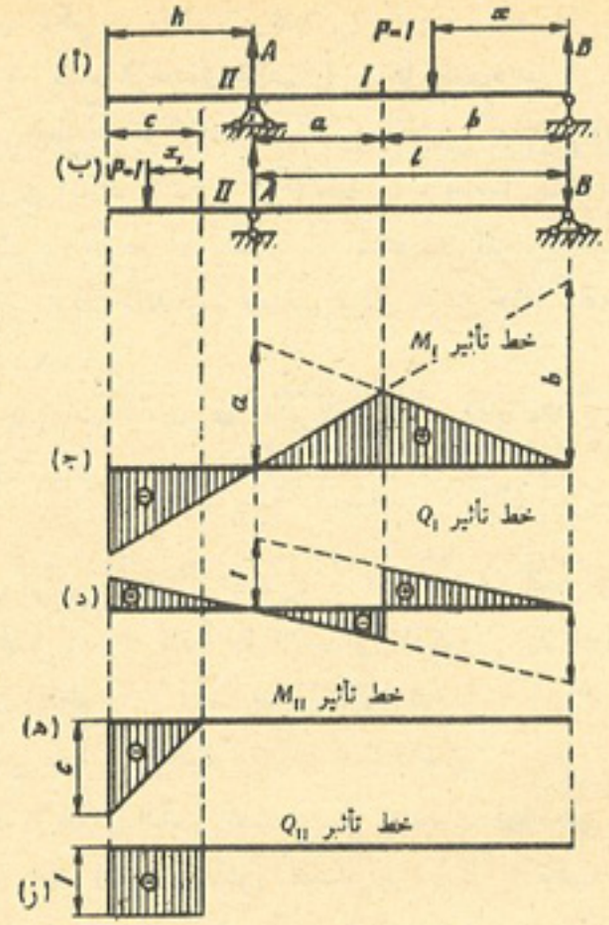
وتعتبر الإحداثيات الرأسية لخط تأثير القوة Q_t ، بمثابة مقادير لابعدية . ولهذا السبب ، يكون مقياس رسم هذه الإحداثيات ، هو نفس مقياس رسم ردود فعل المساند .

والإحداثى الرأسى لخط تأثير القوة Q_t ، يمثل قيمة قوة القص فى المقطع I ، عندما يكون الحمل $P = 1$ واقعاً فوق الإحداثى المذكور . إذن للحصول على قيمة قوة القص فى المقطع I ، عند الوضع المذكور للحمل $P = 1$ ، يجب قياس الإحداثى الرأسى لخط تأثير القوة Q_t ، تحت الحمل .

وإذا كان الإحداثى الرأسى تحت الحمل ، سالباً ، فهذا يعنى بأن قوة القص فى المقطع I ، عند الوضع المذكور للحمل $P = 1$ ، تكون سالبة أيضاً . وتعتبر الإحداثيات الرأسية لخط تأثير القوة Q_t ، عن قانون تغير قوة القص ، فى المقطع I فقط . وللحصول على قانون تغير قوة القص فى أى مقطع من المقاطع الأخرى ، يجب رسم خط تأثير قوة القص فى ذلك المقطع بالذات .

ونأتى الآن إلى رسم خطوط تأثير عزم الانحناء وقوة القص ، للعتبة الكابولية ، المبينة فى شكل (٢ – ٨ ، أ) .

أن نظام رسم خطوط تأثير M_t و Q_t للمقطع الواقع بين المسندين A و B ، هو نفس النظام المتبع فى الحالة السابقة (للعتبة البسيطة) . ولرسم كل خط من خطوط التأثير ، يجب بحث وضعين من أوضاع الحمل $P = 1$: إلى يمين المقطع I وإلى يساره . ويمكن التعبير عن قيمتى M و Q فى كلتا الحالتين ، بواسطة ردود فعل المسندين A و B .



الشكل ٢ – ٨

ولما كانت معادلات خطوط تأثير ردود فعل المساند ، للعتبة الكابولية ، هى نفس المعادلات الموضوعة للعتبة البسيطة (راجع البند ٢ – ٢) ، يتضح إذن ، بأن معادلات خطوط تأثير M_I و Q_I ، للعتبة الكابولية . ستكون نفس المعادلات بالنسبة للعتبة البسيطة ، إلا أن المسافة x سوف لا تتغير فى هذه الحالة من صفر إلى l ، بل من صفر إلى $l + k$.

وهذا سيؤثر فى رسم خطوط تأثير M_I و Q_I نفس تأثيره فى رسم خطوط تأثير ردود فعل المساند : وسيكون من الضرورى مد خطوط التأثير المناظرة ، من المسند الأيسر (راجع الشكل ٢ – ٨ ، أ) إلى نقطة التقاطع مع الخط العمودى المرسوم من نهاية

الكابول . وبهذه الطريقة رسمت خطوط تأثير M_I و Q_I المبينة فى الشكل (٢ – ٨ ، جـ ، د) . ونقترح على القارىء أن يتأكد من صحة رسم خطوط التأثير هذه ، بواسطة الحساب التحليلى .

والآن نرسم خط تأثير عزم الانحناء M_I ، الناشىء فى المقطع II ، المأخوذ على الكابول ، على مسافة c من النهاية اليسرى للعتبة (راجع الشكل ٢ – ٨ ، أ) . نبحث وضعين من أوضاع الحمل $P = 1$:

١ – الحمل الموضوع إلى يمين المقطع II (راجع الشكل ٢ – ٨ ، أ) . فى هذه الحالة لا توجد أية قوى إلى يسار المقطع II ، لذا فإن عزم الانحناء M_{II} يساوى صفراً . أن القسم المناظر لذلك من خط التأثير ، ممثل فى الشكل (٢ – ٨ ، هـ) على هيئة خط مستقيم ، منطبق على المحور السينى x-axis (أن الإحداثيات الرأسية فى القسم الممتد من المقطع II إلى المسند B ، تساوى صفرا) .

٢ – الحمل الموضوع إلى يسار المقطع II (شكل ٢ – ٨ ، ب) . فى هذه الحالة لا توجد سوى قوة واحدة إلى يسار المقطع II ، وهى $P = 1$ ، لذا فإن عزم الانحناء يساوى ما يلى :

$$M_{II} = -1 \times x_1$$

حيث x_1 – المسافة من الحمل إلى المقطع II . ويمكن أن تتغير المسافة x_1 من الصفر (عندما يكون الحمل $P = 1$ موضوعاً فوق المقطع II) إلى c (عندما يكون الحمل المذكور موضوعاً فوق نهاية الكابول) .

أن قيم العزم M_{II} المناظرة لقيم x_1 القصوى هى : عند $x_1 = 0$ يكون $M_{II} = 0$ ، وعند $x_1 = c$ يكون $M_{II} = -1 \times c$. والقسم المناظر لذلك من خط التأثير ، موضح فى الشكل (٢ – ٨ ، هـ) (ونلاحظ بأن الإحداثيات

الرأسية السالبة، تقع فى الأسفل) . إن الشكل (٢–٨، هـ) بأجمعه ، يمثل خط تأثير عزم الانحناء للمقطع II (عند وضع الحمل فى أى موضع كان من العتبة) .

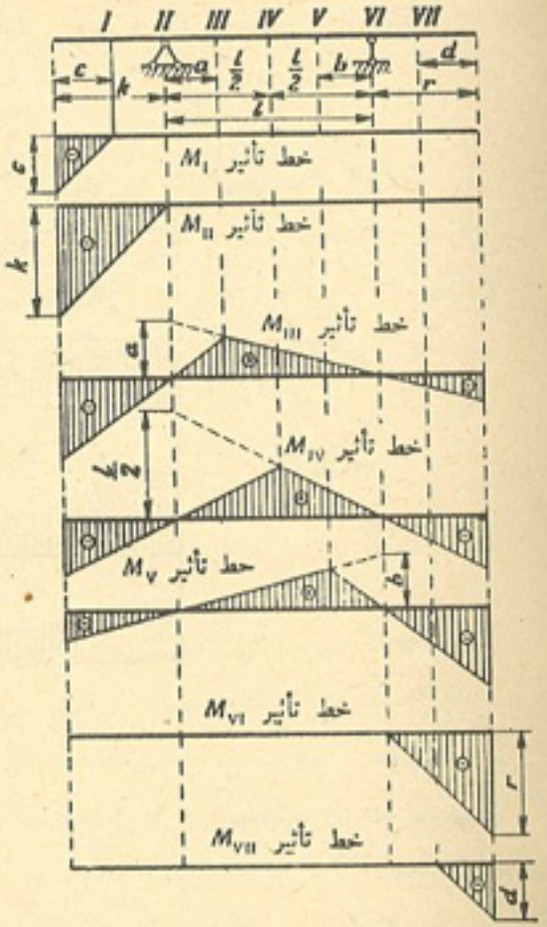
ونرسم الآن خط تأثير قوة القص Q_{II} ، الناشئة فى المقطع II :

١ – عندما يكون الحمل موضوعاً إلى يمين المقطع II ، لا توجد هناك أية قوة إلى يسار هذا المقطع ، إذن نجد بأن $Q_{II} = 0$. والقسم المناظر لذلك من خط تأثير قوة القص Q_{II} (من المقطع II إلى المسند B) ، ممثل فى الشكل (٢–٨ ، و) بخط مستقيم منطبق على المحور السينى .

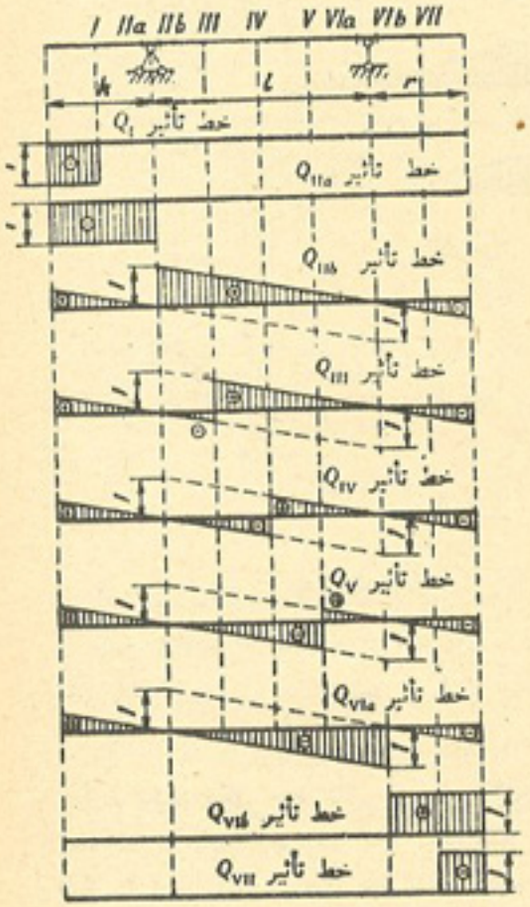
٢ – عندما يكون الحمل موضوعاً إلى يسار المقطع II ، نجد بأن قوة القص تساوى $Q_{II} = -1$ ، أى عند انتقال الحمل على امتداد المسافة الكلية من النهاية اليسرى للعتبة إلى المقطع II ، تكون قوة القص ثابتة المقدار . وهذا القسم من خط التأثير ، مبين فى الشكل (٢ – ٨ ، و) على هيئة مستقيم مواز للمحور السينى (تكون الإحداثيات الرأسية لخط التأثير واقعة فى الأسفل) . إن الشكل (٢ – ٨ ، و) بأجمعه ، يمثل خط تأثير قوة القص Q_{II} للمقطع II .

وكما يتضح ، نجد بأن خطوط تأثير العزم M وقوة القص Q للمقطع المأخوذ فى حدود الكابول ، تختلف تماماً عن خطوط تأثير العزم وقوة القص ، للمقطع المأخوذ بين المسندين .

ويبين الشكل (٢ – ٩) خطوط تأثير عزم الانحناء ، لعدة مقاطع من عتبة ذات كابولين . وقد أخذ المقطع II عند المسند الأيسر ، والمقطع VI عند المسند أيمن . ويبين الشكل (٢ – ١٠) خطوط تأثير قوة القص لنفس المقاطع المذكورة من العتبة . وقد أخذ عند كل مسند مقطعان ، بحيث كان المقطعان aII و aVI واقعين بقرب المسندين مباشرة ، وكان المقطعان bII و bVI واقعين كذلك بقرب المسندين مباشرة ، ولكن إلى يمينهما . أن شكل خطوط التأثير للمقطعين المأخوذين عند نفس المسند بالذات (إلى يسار المقطع وإلى يمينه) ، يكون مختلفاً تماماً .

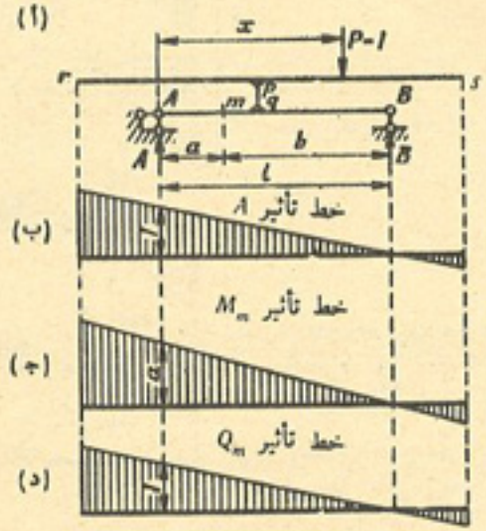


الشكل ٢ – ٩



الشكل ٢ – ١٠

مثال : يطلب رسم خطوط تأثير عزم الانحناء وقوة القص للمقطع m من العتبة المبينة فى الشكل (٢ – ١١ ، أ) ، عند انتقال الحمل $P=1$ من نقطة r إلى نقطة s ، أى على امتداد القسم rs .



الشكل ٢ – ١١

الحل : نرسم أولا خط تأثير رد فعل المسند A . إن قيمة رد الفعل A ، عند وجود الحمل $P = 1$ على القسم rs ، المربوط مع العتبة AB ربطاً جاسئا ، بواسطة القطعة pq ، تساوى ما يلى :

$$A = \frac{l - x}{l}$$

أن خط التأثير المناظر لذلك ، مبين فى الشكل (٢ – ١١ ، ب) .

وعزم الانحناء فى المقطع m من العتبة AB ، عند وجود الحمل على القسم rs ، يساوى

$$M_m = Aa$$

أذن يكون شكل خط تأثير عزم الانحناء M_m ، مثل خط تأثير رد فعل المسند A ، الذى ضربت كافة إحداثياته الرأسية فى المعامل الثابت a . ويبين ، الشكل (٢ – ١١ ، ج) خط تأثير العزم M_m .

ويرسم خط تأثير قوة القص Q_m بنفس الطريقة السابقة (شكل ٢ – ١١ ، د)، وهذا الخط لا يختلف عن خط تأثير رد الفعل A ، بأى شىء .

البند ٢ – ٤ : خطوط التأثير فى العتبة المثبتة من طرف واحد

لنحاول الآن رسم تأثير رد فعل المسند الرأسى للعتبة المثبتة من طرف واحد (شكل ٢ – ١٢ ، أ) .

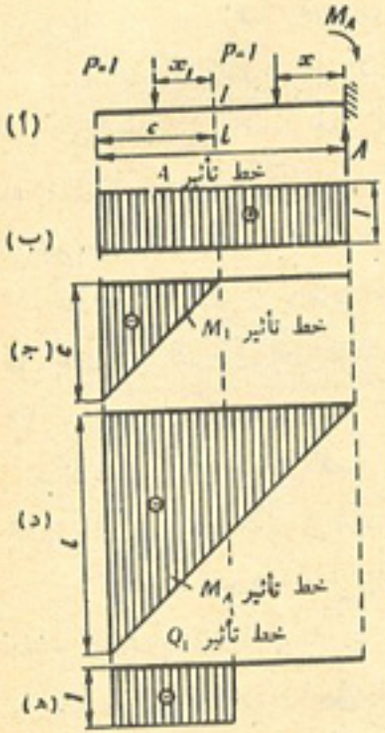
نضع معادلة مساقط كافة القوى على المحور الرأسى ، وهى :

$$\Sigma Y = -1 + A = 0$$

ومنها نجد أن :

$$A = 1$$

إذن ، عند أى وضع كان للحمل $P = 1$ ، نجد بأن قيمة رد فعل A تساوى واحداً (وحدة) . وخط التأثير المناظر لذلك ، مبين فى الشكل (٢–١٢ ، ب). وفى هذه الحالة ، يؤخذ مقياس رسم معين ، بالنسبة للإحداثيات الرأسية لخط التأثير (راجع البند٢ – ٢) .



الشكل ٢ – ١٢

أما الآن فنأتى إلى رسم خطوط تأثير عزم الانحناء وقوة القص .

عند رسم خط تأثير عزم الانحناء فى المقطع I ، الذى يقطع على مسافة c من نهاية العتبة اليسرى ، نفعل نفس الشىء الذى فعلناه ، عند رسم خط تأثير العزم M_{II} للمقطع II من العتبة الكابولية ، المبينة فى الشكل (٢ – ٨) ، أى :

١ – عند وجود الحمل إلى يمين المقطع I (مبين فى الشكل ٢ – ١٢ ، أ بخط مصمت) نجد بأن :

$$M_I = 0$$

٢ – وعند وجود الحمل إلى يسار المقطع I (مبين فى الشكل ٢ – ١٢ ، أ

بخط منقط) نجد بأن :

$$M_I = -1 \times x_1 = -x_1$$

حيث x_1 — المسافة من الحمل إلى المقطع I .

وعند $x_1 = 0$ نجد بأن $M_I = 0$

وعند $x_1 = c$ نجد بأن $M_I = -c$

إن خط التأثير المناظر لهذا العزم ، مبين فى الشكل (٢ — ١٢ ، جـ) . وله نفس شكل خط تأثير عزم الانحناء فى مقطع الكابول فى العتبة ذات المسندين (راجع الشكل ٢ — ٨ ، هـ) .

وإذا أخذ المقطع I بالقرب من المسند A تماماً (أى أخذنا $c = l$) حصلنا على خط تأثير العزم فى الطرف الثابت (عزم المسند M_A) . ويبين الشكل (٢ — ١٢ ، د) خط تأثير العزم M_A .

ولرسم خط تأثير قوة القص فى المقطع I ، نتبع نفس الخطوات التى سرنا عليها عند رسم خط التأثير فى البند السابق (راجع الصفحة ٥٠) :

١ — عند وجود الحمل إلى يمين المقطع I ، نجد بأن $Q_I = 0$ ، وذلك لعدم وجود أية قوة إلى اليسار .

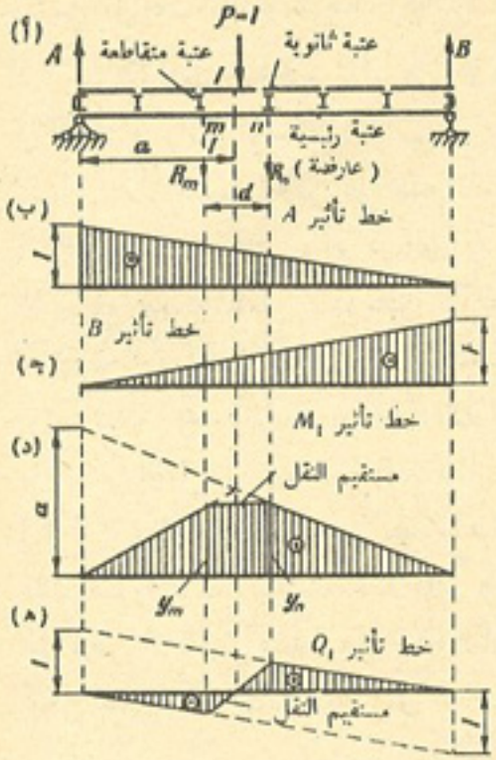
٢ — عند وجود الحمل إلى يسار المقطع I ، نجد بأن $Q_I = -1$ ، أى تبقى الإحداثيات الرأسية لخط تأثير قوة القص Q_I ، ثابتة على طول المسافة من المقطع I إلى نهاية العتبة اليسرى ، وقيم هذه الإحداثيات تساوى (١ —) .

ويبين الشكل (٢ — ١٢ ، هـ) خط تأثير Q_I . وهذا الخط يشبه خط تأثير Q_{II} (شكل ٢ — ٨ ، و) ، للمقطع المأخوذ فى كابول العتبة ذات المسندين

البند ٢ — ٥ : خطوط التأثير فى حالة تسليط الحمل بصورة غير مباشرة (تسليط الحمل فى الوصلات)

لقد بحثنا حتى الآن ، الحالات التى تكون فيها الأحمال الخارجية مسلطة على العتبات بصورة مباشرة . وفى المجال التطبيقى (مثلا فى القناطر والجسور) غالباً

ما تنتقل الأحمال إلى العتبة فى مواضع معينة فقط ، عن طريق عتبات أخرى (شكل ٢—١٣ ، أ) . وفى هذه الحالات تسمى العتبة الأصلية التى تنتقل إليها الأحمال بالعتبة الرئيسية أو العارضة ، وتسمى العتبات الموضوعة بصورة عمودية على العارضة بالعتبات المتقاطعة ، أما العتبات البسيطة العليا التى تسلط عليها الأحمال مباشرة ، فتسمى بالعتبات الثانوية . إن طريقة انتقال الأحمال هذه إلى العتبة الرئيسية (العارضة) ، تسمى بالطريقة غير المباشرة ، أو انتقال الأحمال عن طريق الوصلات ، أما الوصلات فهى عبارة



الشكل ٢ — ١٣

عن مقاطع العارضة ، التى تتصل فيها العارضة مع العتبات المتقاطعة . ويسمى ذلك القسم من العتبة ، الواقع بين كل وصلتين متجاورتين بالجزء الهيكلى .

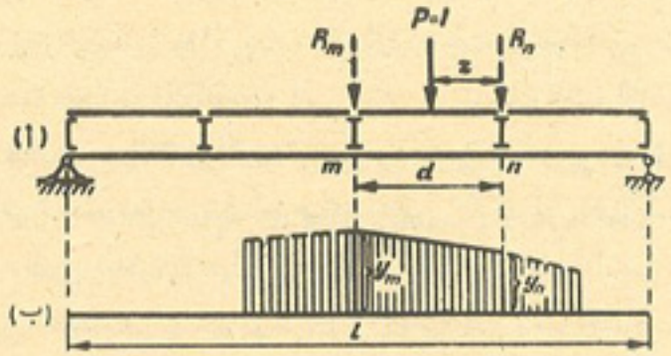
إن تأثير الحمل P المسلط على العتبة الثانوية فى الباع mn (أى فى امتداد العتبة الواقع بين الوصلتين m و n) ينتقل إلى العارضة فى الوصلتين m و n فقط ، اللتين تمر فيهما العتبات المتقاطعة ، التى تستند عليها تلك العتبة الثانوية ، أى التى تحمل العتبة الثانوية . وانتقال الأحمال بصورة غير مباشرة (عن طريق الوصلات) لا يؤثر على قيمة ردود فعل مساند العارضة ، ويمكن التأكد من ذلك بسهولة ، بوضع معادلة عزوم القوى الخارجية حول أى مسند من المساند . ولهذا السبب ، عند تسليط الأحمال على العتبة بصورة غير مباشرة (فى الوصلات) تبقى خطوط تأثير ردود فعل المسندين A و B (شكل ٢ — ١٣ ب ، جـ) كما هى عليه فى حالة تسليط

الحمل على العتبة المذكورة بصورة مباشرة .

أما فيما يتعلق بخطوط تأثير عزم الانحناء فى مقطع العارضة الرئيسية ، مثلا فى المقطع I (ذى الإحداثى الرأسى a) ، فإن قيمة العزم M_I تبقى كما هى عليه فى حالة تسليط الحمل على هذه العارضة بصورة مباشرة ، مادام الحمل موجوداً فى القسمين Am و nB ، أى فى أى موضع كان ، باستثناء الجزء الهيكلى mn ، الذى يقع ضمنه المقطع I . ويمكن التأكد من ذلك ، بوضع معادلة عزم الانحناء فى المقطع I ، عند الأوضاع المذكورة للحمل . مثلا عند وجود الحمل فى الوصلة n أو إلى يمينها ، نجد بأن $M_I = Aa$ ، وذلك لعدم وجود أية قوة أخرى إلى يسار المقطع ، ما عدا رد الفعل A . وهذه المعادلة تماثل المعادلة التى حصلنا عليها فى بداية البند (٢ — ٣) لحالة تسليط الحمل بصورة مباشرة (خارج الوصلات) . ويمكن إثبات ذلك بصورة مماثلة ، بالنسبة للقسم Am . ولذلك ، بعد رسم خط تأثير العزم M_I ، على فرض أن الحمل مسلط على العتبة العارضة مباشرة (شكل ٢ — ١٣ ، د) ، يمكن تظليل خط التأثير هذا ، فى القسمين Am و nB .

وعند وجود الحمل على الجزء الهيكلى mn ، نجد بأن تأثيره فى العتبة ، ينتقل فى موضعى الوصلتين m و n على هيئة ضغطى تحميل R_m و R_n للعتبة الثانوية mn (شكل ٢ — ١٤ ، أ ، الخط المنقط) .

ولكى نحدد شكل خط تأثير عزم الانحناء M_I فى القسم mn ، عند وجود



الشكل ٢ — ١٤

47 9468

الحمل ضمن حدود الجزء الهيكلى الذى يقع فيه المقطع ، نثبت بأن شكل خط تأثير أية قوة فى المقطع I من العتبة الرئيسية ، عند انتقال الحمل $P = 1$ ضمن حدود ذلك الجزء الهيكلى mn ، الذى يقع فيه المقطع ، يكون — فى حالة انتقال الحمل عن طريق الوصلات — عبارة عن خط مستقيم يصل بين النقاط العليا الطرفية (ذات الوصلات) للإحداثيات الرأسية للجزء الهيكلى المذكور . لنفرض بأن الإحداثيات الرأسية لخط تأثير القوة S_I فى العارضة ، عند وجود الحمل $P = 1$ فى الوصلتين m و n ، هما y_m و y_n على التوالى (شكل ٢ — ١٤ ، ب) . ونشير هنا إلى أن هذه الإحداثيات الرأسية ، تحدد بنفس الطريقة المتبعة فى حالة انتقال الحمل إلى العارضة مباشرة .

ونبحث الآن كيفية تغير القوة S_I عند انتقال الحمل $P = 1$ على امتداد العتبة الثانوية ، بين الوصلتين m و n (شكل ٢ — ١٤ ، أ) .

وعند تحرك الحمل $P = 1$ على العتبة الثانوية ، تنتقل القوتان R_m و R_n فى موضعى الوصلتين m و n . والقوة S_I الناشئة فى العتبة الرئيسية ، نتيجة لتعرضها لتأثير القوتين R_m و R_n فى الوصلتين m و n ، تساوى ما يلى ، بناء على مبدأ تراكب القوى :

$$S_I = \Sigma Py = R_m y_m + R_n y_n$$

حيث :

$$R_m = \frac{P \times z}{d} = \frac{1 \times z}{d} = \frac{z}{d}$$

$$R_n = \frac{P\ (d - z)}{d} = \frac{1\ (d - z)}{d} = \frac{d - z}{d}$$

حيث d — طول الجزء الهيكلى ،

z — المسافة من الحمل $P = 1$ إلى الوصلة اليمنى (الوصلة n) فى الجزء الهيكلى المبحوث .

وبعد التعويض عن كل من R_m و R_n بقيمتيهما ، نحصل على ما يلى :

$$S_I = \frac{z}{d} y_m + \frac{d - z}{d} y_n$$

وهكذا يمكن التعبير عن قيمة S_I ، عند تحرك الحمل بين الوصلتين m و n ، بواسطة الدالة الخطية للمقدار z :

عند $z = 0$ نجد بأن $S_I = y_n$

وعند $z = d$ نجد بأن $S_I = y_m$

إذن يكون خط تأثير القوة S_I فى العارضة الرئيسية ، عند تحرك الحمل $P = 1$ بين الوصلتين m و n ، عبارة عن خط مستقيم يصل بين النقاط العليا للإحداثيات الرأسية للوصلات y_m و y_n . وسوف نسمى هذا الخط المستقيم بمستقيم النقل ، وهى تسمية اصطلاحية .

وبعد وصل النقاط العليا للإحداثيات y_m و y_n بمستقيم النقل ، نحصل على خط تأثير العزم M_I المبين فى الشكل (٢ — ١٣ ، د) .

وبنفس الطريقة نرسم خط تأثير قوة القص Q_I أيضاً . وسوف تكون الإحداثيات الرأسية لخط التأثير ، فى القسمين Am و nB ، مماثلة تماماً لما هى عليه فى حالة تسليط الحمل على العارضة مباشرة . أما على امتداد الجزء الهيكلى mn ، الذى يقع ضمنه المقطع I ، فيجب مد مستقيم النقل ، ليمر فى النقاط العليا للاحداثيات الرأسية ، تحت الوصلتين m و n (شكل ٢ — ١٣ ، هـ) .

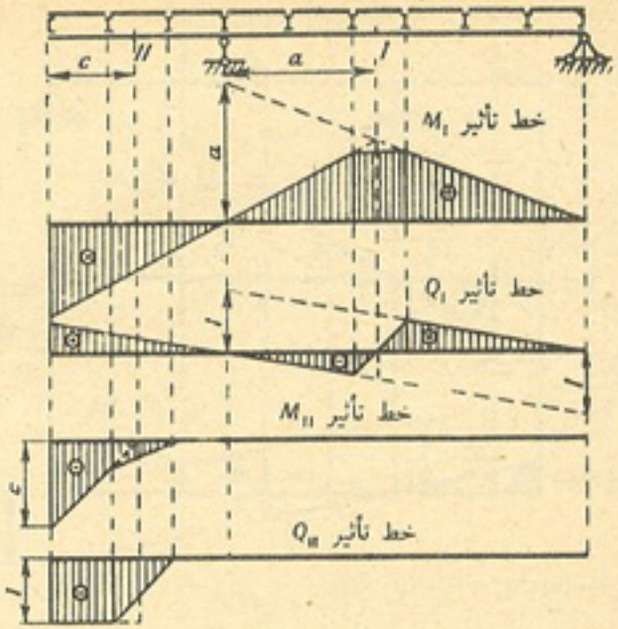
وبهذا نكون قد وضعنا وثبتنا النظام التالى لرسم خطوط التأثير ، فى حالة انتقال الحمل إلى العارضة عن طريق الوصلات (بصورة غير مباشرة) :

١ — يرسم أولا خط التأثير بدون أخذ الوصلات فى الاعتبار ، أى على فرض أن يكون الحمل مسلطا على العارضة مباشرة .

٢ — ثم نؤشر على خط التأثير هذا ، الإحداثيات الرأسية للجزء الهيكلى الذى يقع ضمنه المقطع ويرسم له خط التأثير ، وتوصل النقاط العليا لهذه الإحداثيات ، بمستقيم النقل .

ويبين الشكل (٢ — ١٥) خطوط تأثير M و Q للمقطعين I و II فى عتبة كابولية .

ولم ترسم خطوط التأثير الخاصة بردود فعل المساند ، وذلك لأنها تبقى كما هى عليه فى حالة تأثير الحمل على العارضة مباشرة .



الشكل ٢ — ١٥

البند ٢ — ٦ : تحديد القوى والعزوم بواسطة خطوط التأثير

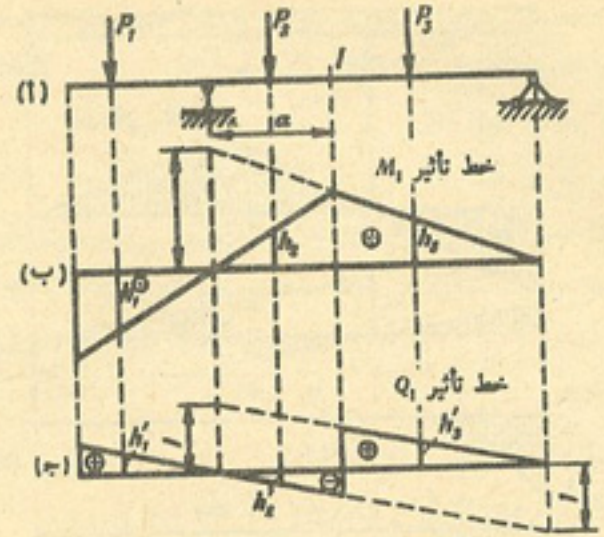
لقد بحثنا فى البنود السابقة من هذا الفصل ، المسائل المتعلقة برسم خطوط التأثير .

أما الآن فنبيّن طريقة حساب القوى والعزوم (أو الإزاحات ، مثل الانحناء) بواسطة خطوط التأثير . وفى هذه الحالة ، نبدأ ببحث تأثير النوعين التاليين من الأحمال :

١ — الأحمال المركزية ،

٢ — الأحمال الموزعة بانتظام .

تأثير الأحمال المركزية . لقد أشرنا فى البند (٢ — ٢) إلى أنه لتحديد أية قوة من القوى الناجمة عن تأثير الحمل P_I ، يجب قياس الإحداثى الرأسى لخط تأثير هذه القوة ، تحت الحمل ، وضربه فى قيمة الحمل . وإذا أثرت على الإنشاء (العتبة) عدة أحمال (شكل ٢ — ١٦ ، أ) ، يجب ، بناء على مبدأ تراكب القوى



الشكل ٢ – ١٦

أن نقوم بنفس العمل ، بالنسبة لكل حمل على انفراد (أى نضرب قيمة الإحداثى الرأسى لخط التأثير ، تحت الحمل ، فى قيمة الحمل) ، ثم نجمع المقادير الناتجة .

ولتحديد عزم الانحناء فى المقطع I ، مثلا ، (أن خط تأثير M_I ، مبين فى الشكل ٢ – ١٦ ، ب) يجب ضرب قيمة الحمل P_1 فى الإحداثى الرأسى h_1 لخط تأثير العزم M_I (ولما كان الإحداثى الرأسى h_1 سالبًا ، فإن حاصل الضرب P_1h_1 سيكون سالبًا أيضًا) ، وضرب قيمة الحمل P_2 فى الإحداثى الرأسى h_2 ، وضرب قيمة الحمل P_3 فى الإحداثى الرأسى h_3.

إن عزم الانحناء M_I ، الناجم عن تأثير الأحمال P_1 ، P_2 ، P_3 سيساوى ما يلى :

$$M_I = \Sigma Ph = -P_1h_1 + P_2h_2 + P_3h_3$$

وتقاس الإحداثيات الرأسية لخط تأثير العزم M_I ، بوحدات الطول . وإذا قيست القوى أو الأحمال بالأطنان ، وقيست الإحداثيات الرئيسية لخط التأثير M_I بالأمتار ، يصبح حاصل الضرب Ph ، الذى يعطى قيمة عزم الانحناء ، مقاسة بطن – متر (طن . م) .

وبنفس الطريقة تحسب قوة القص Q_I فى المقطع I (إن خط تأثير Q_I مبين فى الشكل ٢ – ١٦ ، جـ) :

$$Q_I = P_1h'_1 - P_2h'_2 + P_3h'_3$$

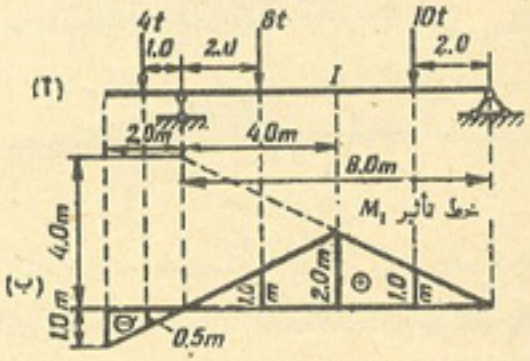
حيث h'_1 و h'_2 و h'_3 – الإحداثيات الرأسية لخط تأثير قوة القص Q_1 ، المقاسة تحت الأحمال P_1 و P_2 و P_3 على التوالى .

وتعتبر الإحداثيات الرأسية لخط تأثير قوة القص ، ذات قيم لا بعدية . ولذلك ستكون وحدات قياس حاصل الضرب Ph' ، المعبر عن قيمة قوة القص ، نفس وحدات قياس الحمل P .

ويمكن بنفس الطريقة إيجاد قيم ردود فعل المساند ، بواسطة خطوط التأثير المناظرة .

وهكذا ، لحساب أى عامل من العوامل (رد فعل المسند ، عزم الانحناء ، قوة القص ، القوة فى أية قطعة من قطع الجمالون ، وغير ذلك) الناجمة عن تأثير عدة أحمال مركزة ، يجب أن نقيس على خط التأثير المرسوم لهذا العامل ، الإحداثيات الرأسية تحت الأحمال ، وإيجاد المجموع الجبرى لحاصل ضرب قيم الأحمال فى الإحداثيات الرأسية لخط التأثير ، المناظرة لتلك الأحمال .

مثال : يطلب تحديد عزم الانحناء فى المقطع I من العتبة ، وهو العزم الناجم عن تأثير الأحمال الثلاثة المذكورة ، وذلك باستخدام خطوط التأثير . إن أبعاد العتبة وقيم وأوضاع الأحمال ، مبينة فى الشكل (٢ – ١٧ ، أ) . وخط تأثير العزم M_I مبين فى الشكل (٢ – ١٧ ، ب) . وقيم الإحداثيات الرأسية ، تحت الأحمال ، مبينة على خط



الشكل ٢ – ١٧

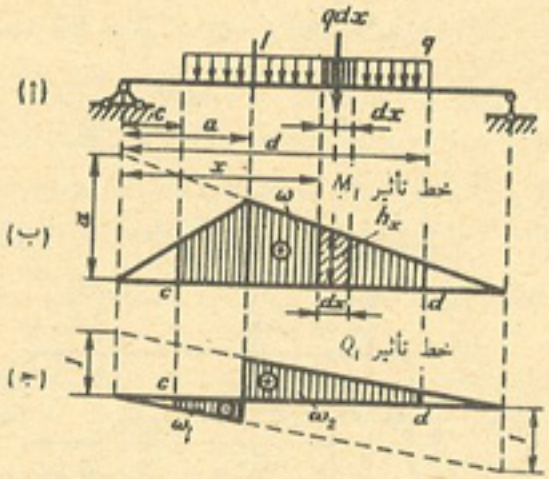
التأثير . ويمكن تحديد هذه الإحداثيات الرأسية ، اما تخطيطياً ، باستخدام مقياس الرسم ، أو بالحساب التحليلي .

الحل : عزم الانحناء في المقطع I يساوي :

$$M_I = -P_1h_1 + P_2h_2 + P_3h_3 = -4 \times 0.5 + 8 \times 1.0 + 10 \times 1.0 = 16\ t/m$$

لقد وضعت علامة سالبة أمام الحد الأول ، وذلك ، لأن الإحداثي الرأسي h_1 سالب .

تأثير الأحمال الموزعة بانتظام . سوف نبحث طريقة الحساب في هذه الحالة ، في المثال القادم . لقد سلط على أحد أقسام العتبة (شكل ٢ – ١٨ ، أ) حمل موزع بانتظام ، بشدة q . والمطلوب الآن تحديد عزم الانحناء في المقطع I (إن خط تأثير M_I مبين في الشكل ٢ – ١٨ ، ب) . دعنا نعوض عن قيمة الحمل الموزع بانتظام ، المؤثر على قسم متناهي الصغر من العتبة dx ، بالحمل المركز qdx (شكل ٢ – ١٨ ، أ) . إن قيمة العزم الناجم عن هذا الحمل المركز ، في المقطع I ، تساوي $qdx \times h_x$ ، حيث h_x – الإحداثي الرأسي لخط تأثير العزم M_I ، تحت الحمل . ويمكن اعتبار الحمل الموزع بأكمله ، بمثابة



الشكل ٢ – ١٨

عدد لا متناهي الكبر ، من الأحمال المركزة qdx . ولإيجاد العزم الناجم عن تأثير كل هذه الأحمال ، يجب استخراج مجموع حواصل الضرب $q\,d \times h_x$

بأجمعها . إذن يكون لدينا :

$$M_I = \int_c^d qdxh_x = q\int_c^d h_x\,dx$$

وقد اخرج المقدار q خارج علامة التكامل ، باعتباره مقداراً ثابتاً . وتشير حدود التكامل (من c إلى d) إلى ضرورة أخذ المجموع على كل امتداد قسم العتبة ، الذي يؤثر عليه الحمل الموزع . وما المقدار الباقي ضمن علامة التكامل ، إلا عبارة عن قيمة المساحة الأولية ، المحاطة بخط تأثير العزم M_I (وهذه المساحة مبينة في الشكل ٢ – ١٨ ، ب ، وقد ظللت بخطوط مائلة) . إن التكامل في الحدود الواقعة بين c و d ، يساوي المساحة المحاطة بخط تأثير العزم M_I ، على قسم العتبة ، من $x = c$ إلى $x = d$ ، المظللة في الشكل (٢ – ١٨ ، ب) . وإذا رمزنا إلى هذه المساحة بالرمز ω ، لوجدنا بأن :

$$M_I = q\omega$$

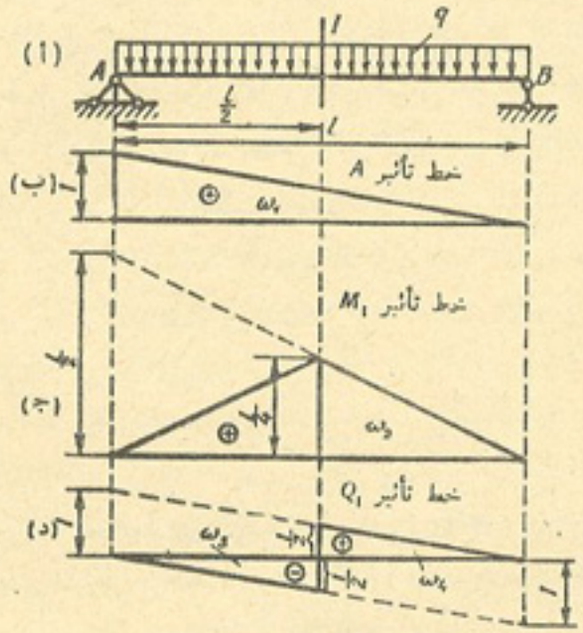
وهكذا ، لتحديد القوة الناجمة عن تأثير الحمل الموزع بانتظام ، يجب إيجاد المساحة المحاطة ، بذلك القسم المناظر من خط تأثير هذه القوة (في حدود موضع الحمل الموزع) ، وضرب مقدار تلك المساحة في شدة توزيع الحمل .

وإذا كان الحمل الموزع ، واقعاً فوق خط التأثير ، المؤلف من عدة أقسام مختلفة العلامات ، تكون قيمة القوة في هذه الحالة ، مساوية لحاصل ضرب شدة توزيع الحمل في المجموع الجبري لمساحات الاقسام المنفردة لخط التأثير . وهكذا ، لتحديد قوة القص في المقطع I ، الذي يبين خط التأثير العائد له في الشكل (٢ – ١٨ ، ج) ، يجب استخراج قيمتي المساحتين ω_1 و ω_2 ، المظللتين في الرسم ، وتعويضهما في الصيغة التالية :

$$Q_P = q\,(\omega_1 + \omega_2)$$

وتؤخذ علامات المساحتين ، طبقاً لعلامات الإحداثيات الرأسية ، على تلك الأقسام التي تحسب فيها المساحتين المذكورتين ، وفي هذه الحالة التي نبحثها الآن ، يجب أن تؤخذ المساحة ω_1 بعلامة سالبة .

مثال ١ : لدينا عتبة طول باعها يساوى l ، وهى محملة بحمل موزع بانتظام قدره q (شكل ٢ – ١٩ ، أ) . يطلب تحديد رد فعل المسند A وعزم الانحناء M_1 وقوة القص Q_1 فى وسط العتبة ، وذلك باستخدام خطوط التأثير . هذا وأن خطوط تأثير A و M_1 و Q_1 مبينة فى الشكل (٢ – ١٩ ، ب ، ج ، د) .



الشكل ٢ – ١٩

الحل : بما أن الحمل موجود على امتداد الباع بأكمله ، يجب حساب المساحات المحاطة بخطوط التأثير ، على امتداد الباع بأكمله .

تحديد رد الفعل A : المساحة المحاطة بخط التأثير ، هى :

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \times l \times 1 = \frac{l}{2}$$

ورد فعل المسند ، يساوى :

$$A = q\,\omega_1 = \frac{ql}{2}$$

تحديد عزم الانحناء M_1 : إن المساحة المحاطة بخط التأثير ، هى :

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \times l \times \frac{1}{4} = \frac{l^2}{8}$$

وعزم الانحناء يساوى :

$$M_1 = q\omega_2 = \frac{ql^2}{8}$$

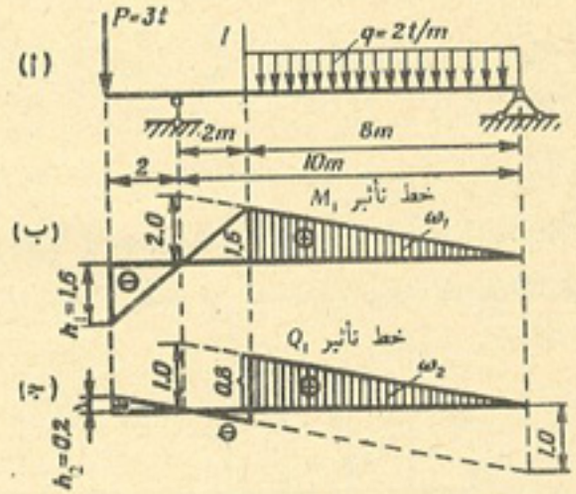
تحديد قوة القص Q_1 : إن خط التأثير هنا ، يتألف من قسمين ، والمساحتان ω_3 و ω_4 متساويتان فى المقدار ، ومختلفتان فى العلامة :

$$\omega_3 = -\frac{1}{2} \times \frac{l}{2} \times \frac{1}{2} = -\frac{l}{8} \quad , \quad \omega_4 = +\frac{l}{8}$$

ولهذا السبب ، نجد بأن :

$$Q_1 = q\,(\omega_3 + \omega_4) = q\left(-\frac{l}{8} + \frac{l}{8}\right) = 0$$

مثال ٢ : المطلوب تحديد عزم الانحناء وقوة القص فى المقطع I لعتبة كابولية (بسيطة) ، الناجمين عن تأثير الحمل المذكور فى المثال السابق (شكل ٢ – ٢٠ ، أ) ، وذلك باستخدام خطوط التأثير .



الشكل ٢ – ٢٠

الحل : نبدأ برسم خطوط تأثير M_1 و Q_1 للمقطع I (شكل ٢ – ٢٠ ، ب ، ج) .

تحديد عزم الانحناء M_1 : إن الإحداثى الرأسى لخط تأثير العزم M_1 . تحت الحمل P يساوى $h_1 = -1.6$ m (١٫٦م) ، المساحة والمحاطة بخط التأثير ، تحت الحمل المذكور ، تساوى ما يلى :

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \times 8 \times 1.6 = 6.4 \text{ m}^2$$

إذن يكون لدينا :

$$M_f = -Ph_1 + q\,\omega_1 = -3\times1.6+2\times6.4 = 8 \text{ tm}$$

تحديد قوة القص Q_f : أن الأحداثى الرأسى لخط تأثير Q_f ، تحت الحمل P ، يساوى $h_2 = 0.2$ ، والمساحة المحاطة بخط التأثير ، تحت الحمل ، تساوى ما يلى :

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \times 8 \times 0.8 = 3.2 \text{ m}$$

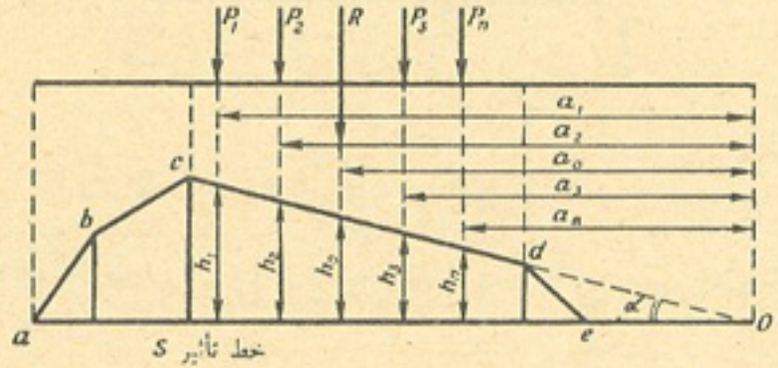
وينتج منها ما يلى :

$$Q_f = Ph_2 + q\,\omega_2 = 3\times0.2+2\times3.2 = 7.0 \text{ tons}$$

والآن نثبت بأن القوة S الناجمة عن الحمل (القوى أو الأحمال المركزة والحمل الموزع) الواقع فوق القسم المستقيم من خط التأثير ، يمكن أن تحدد بضرب محصلة القوى R فى الإحداثى الرأسى h_0 لخط تأثير القوة S ، الواقع تحت هذه القوة . وللقيام بذلك ، نحدد بواسطة خط تأثير القوة S ، المبين فى (الشكل ٢–٢١) مقدار القوة S الناجمة عن تأثير الأحمال $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$ (الواقعة فوق القسم المستقيم cd من خط التأثير) ، ومحصلة هذه الأحمال (القوى) هى القوة R :

$$S = \Sigma\, Ph = P_1h_1 + P_2h_2 + P_3h_3 + \ldots + P_nh_n$$

والآن نعبر عن الأحداثيات الرأسية لخط التأثير ، بواسطة المسافة من نقاط تأثير الأحمال ، إلى النقطة O – وهى نقطة تقاطع المستقيمين ae و cd (شكل ٢ – ٢١) :



الشكل ٢ – ٢١

$$h_1 = a_1 \tan\alpha;\quad h_2 = a_2 \tan\alpha;\quad h_3 = a_3 \tan\alpha,\ \ldots\ h_n = a_n \tan\alpha$$

وبتعويض قيم الإحداثيات الرأسية هذه ، فى معادلة S ، نحصل على ما يلى :

$$S = (P_1a_1 + P_2a_2 + P_3a_3 + \ldots + P_na_n)\tan\alpha$$

إن الصيغة الموجودة داخل القوسين ، تعبر عن عزم الأحمال $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ حول النقطة O ، وهذا العزم كما هو معروف ، يساوى عزم المحصلة R حول نفس النقطة بالذات ، أى يساوى Ra_0 (شكل ٢ – ٢١) .

إذن يكون لدينا :

$$S = Ra_0 \tan\alpha = Rh_0$$

وهذا ما أردنا إثباته .

البند ٢ – ٧ : تحديد الوضع غير الملائم للحمل على الإنشاء

لقد أشرنا فى البند السابق ، إلى الطريقة التى تمكننا – بواسطة خطوط التأثير – من تحديد القوى المختلفة (مثل رد فعل المسند ، عزم الانحناء ، قوة القص وغيرها) الناجمة عن تأثير الحمل الموضوع فى نقطة معينة . والآن نبين كيف يجب أن يوضع الحمل المذكور على الإنشاء (العتبة) ، لكى تنجم عنه أكبر قيمة ممكنة ، للقوة التى يجرى بحثها . أن وضع الحمل بهذا الشكل ، يسمى كما هو معروف ، بالوضع غير الملائم تماماً ، أو بالوضع الخطر .

وسوف نشير فيما بعد ، إلى القيم الموجبة القصوى للقوى كالآتى :

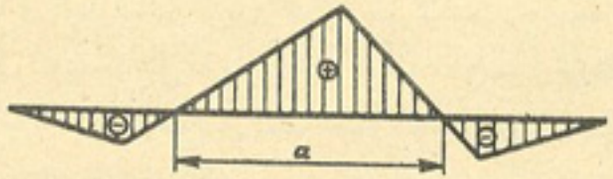
A_{max} ، M_{max} ، Q_{max} وإلى آخره ، كما سنشير إلى القيم السالبة القصوى للقوى المذكورة ، كالآتى : A_{min} ، M_{min} ، Q_{min} وإلى آخره .

١ – الحالة التى يؤثر فيها على الإنشاء (العتبة) حمل متنقل مركز واحد .

أن مسألة إيجاد أكبر قيمة (القيمة القصوى) للقوة S ، تحل فى هذه الحالة ببساطة كبيرة : إن الوضع الخطر للحمل فى هذه الحالة ، هو عند وقوعه فوق الأحداثى الرأسى الأكبر لخط التأثير . وبضرب قيمة هذا الإحداثى الرأسى فى قيمة الحمل ، نحصل على القيمة القصوى للقوة S . وعند إيجاد القيمة القصوى للقوة ، تؤخذ قيمة الأحداثى

الموجب الأكبر ، وعند إيجاد القيمة الصغرى للقوة ، تؤخذ قيمة الأحداثى السالب الأكبر لخط التأثير ، من حيث القيمة المطلقة .

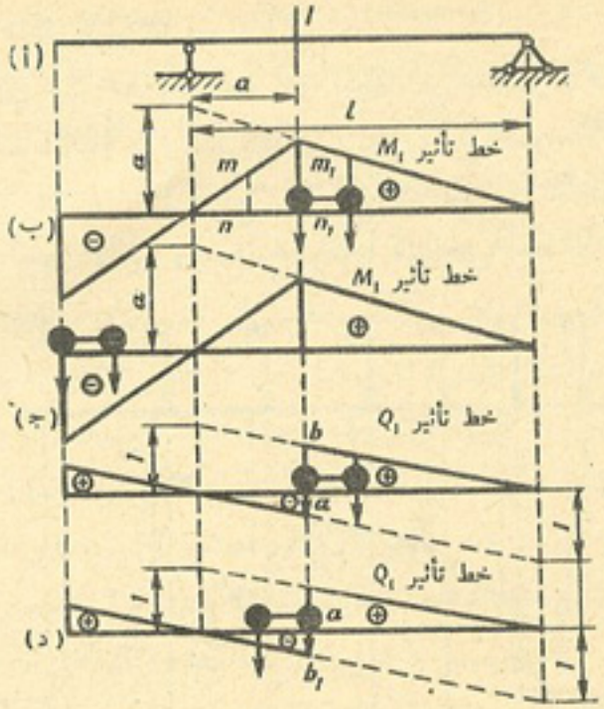
٢ — الحالة التى تؤثر فيها على الإنشاء (العتبة) أية مجموعة مقيدة من الأحمال المتنقلة . لتحديد القيمة القصوى لأية قوة من القوى ، يجب إيجاد القيمة القصوى للمقدار ΣPh ، حيث h تمثل الإحداثيات الرأسية لخط تأثير تلك القوة ، مقاسة تحت الأحمال المناظرة لها . وعندما لا يكون عدد الأحمال كبيراً ، تحل المسألة بواسطة التجربة أو المحاولة ، بتغيير مواضع الأحمال من موضع إلى آخر . وفى هذه الحالة ، لتحديد القيمة القصوى للقوة S ، توضع الأحمال فوق الإحداثيات الرأسية الموجبة ، ولتحديد القيمة الصغرى لتلك القوة ، توضع الأحمال فوق الإحداثيات الرأسية السالبة . وتوجد حالات ، يجب أن توضع فيها الأحمال فوق الأقسام الموجبة والسالبة لخط التأثير فى وقت واحد . وإحدى هذه الحالات ، على سبيل المثال ، هى عندما يراد إيجاد S_{max} لخط التأثير المبين فى الشكل (٢—٢٢) ، العائد



الشكل ٢ — ٢٢

لمجموعة من الأحمال (مثل القاطرة) ، التى يزيد طولها الكلى على طول المسافة a ، المناظرة للقسم الموجب من خط التأثير .

ويبين الشكل (٢ — ٢٣) الأوضاع غير الملائمة تماماً ، لعربة مسطحة ذات أربع عجلات ، حملها موزع بالتساوى ، لمختلف خطوط التأثير . ويبين الشكل (٢—٢٣ ، أ) وضع التحميل المناظر لقيمة $M_{I\,max}$. ونحصل على القيمة القصوى للمقدار ΣPh ، فى الحالة التى يكون فيها الحمل الأيسر ، واقعاً فوق الإحداثى الرأسى الموجب الأكبر . وإذا وضعنا الحمل الأيمن فوق هذا الاحداثى الرأسى ، لكان الحمل الأيسر سيقع فوق الإحداثى الرأسى mn . ولما كان الإحداثى الرأسى mn أصغر من الإحداثى الرأسى m_1n_1 ، ستصبح قيمة المقدار ΣPh فى هذه الحالة ،



الشكل ٢ — ٢٣

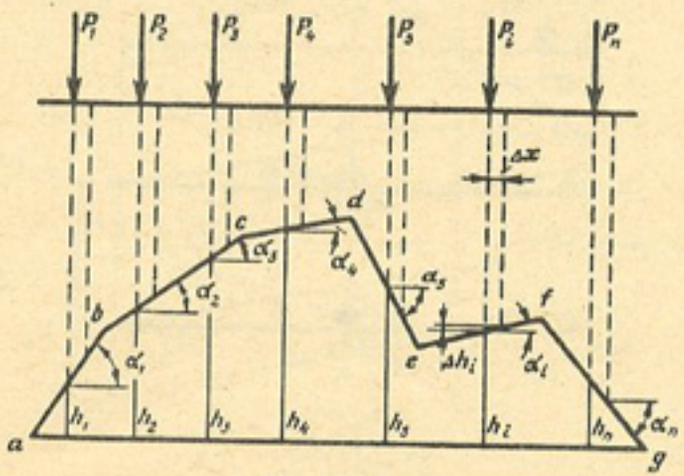
أصغر مما هى عليه عندما يكون الحمل موضوعاً بالصورة المبينة فى الشكل (٢ — ٢٣ — ، أ) . إن أى وضع آخر للأحمال ، سيعطى كذلك قيمة أصغر للانحناء M_I .

ويبين الشكل (٢ — ٢٣ ، ب) وضع نفس المجموعة من الأحمال ، للحصول على $M_{I\,min}$.

إن الشكل (٢ — ٢٣ ، ج) يبين وضع الأحمال ، المناظر للقيمة القصوى لقوة القص $Q_{I\,max}$ ، أما الشكل (٢ — ٢٣ ، د) فيبين وضع الأحمال المناظر للقيمة الصغرى لقوة القص $Q_{I\,min}$. وعند وضع الأحمال المناظر للقيمة القصوى لقوة القص ، يفترض بأن الحمل الأيسر ، يقع إلى يمين المقطع I ، بمسافة متناهية الصغر ، أى يجب أن تضرب قيمة الحمل الأيسر ، عند حساب قيمة Q_I ، فى الإحداثى الرأسى ab (شكل ٢ — ٢٣ ، ج) . أما عند وضع الأحمال المناظر للقيمة الصغرى لقوة القص $Q_{I\,min}$ ، يفترض بأن الحمل الأيمن ، يقع إلى يسار المقطع I بمسافة متناهية الصغر ، أى ستضرب قيمة الحمل الايمن فى الإحداثى

الرأسى ab_1 (شكل ٢ — ٢٣ ، د) .

نأتى الآن إلى بحث خط تأثير القوة S ، المؤلف من عدد من الأقسام المستقيمة ، المتقاطعة عند النقاط العليا : g, f, e, d, c, b, a ووضع مجموعة الأحمال كما مبين فى الشكل (٢ — ٢٤) . فى الوضع I لا يقع أى حمل من الأحمال فوق النقطة العليا (القمة) لخط التأثير . ونزيح المجموعة بأكملها على الخط الأفقى ، إلى اليمين ،



الشكل ٢ — ٢٤

بمسافة صغيرة قدرها Δx ، لنحصل على الوضع II . ويتضح من الشكل (٢ — ٢٤) ، بأنه فى هذه الحالة ، ستزداد قيمة الإحداثى الرأسى h_i لخط التأثير ، تحت الحمل P_i ، بالمقدار التالى : $\Delta h_i = \Delta x \times \tan \alpha_i$ أما القوة S فستزداد كما يلى* :

$$\Delta S = \sum_{i=1}^{i=n} P_i \times \Delta h_i = \sum_{i=1}^{i=n} P_i \times \Delta x \times \tan \alpha_i =$$

$$= \Delta x \times \sum_{i=1}^{i=n} P_i \times \tan \alpha_i \qquad (2 - 6)$$

وعند إزاحة مجموعة الأحمال مرة أخرى إلى اليمين بمسافة Δx ، لتصبح فى الوضع III ، تزداد القوة S بمقدار ΔS ، وهذه الزيادة تحدد أيضاً

* إن الزوايا α_1 ، α_4 ، α_3 ، α_2 ، α_1 فى الشكل (٢—٢٤) هى زوايا موجبة ، أما الزوايا α_n ، α_5 فتكون سالبة .

من الصيغة (6 — 2) . وإذا فرضنا بأن الوضع II لمجموعة الأحمال المذكورة ، يناظر قيمة S_{max} (وبالتالى ، فهو وضع خطر) ، عندئذ يجب أن تكون الزيادة ΔS موجبة ، عند انتقال مجموعة الأحمال من الوضع I إلى الوضع II ، وسالبة عن انتقال مجموعة الأحمال من الوضع II إلى الوضع III . أى يجب أن تكون علامات الزيادة ΔS (وبالتالى علامات المقدار $\sum_{i=1}^{i=n} P_i \times \tan \alpha_i$ مختلفة* فى حالة المرور بالوضع الخطر . أن تغير علامة الزيادة ΔS ، المحددة من الصيغة (6 — 2) ، عند انتقال مجموعة الأحمال مرتين فى نفس الاتجاه ، بمقدار Δx ، لا يمكن أن يحدث إلا نتيجة لتغير وضع أحد أحمال المجموعة (أو عدد منها) ، إذ كان فى الوضع الأول I واقعاً فوق أحد الأقسام المستقيمة لخط التأثير ، وأصبح فى الوضع الثالث III واقعاً فوق قسم مستقيم آخر (مجاور للقسم الأول) . إذن فى الوضع II ، أى عند الوضع الخطر لمجموعة الأحمال** ، نجد بأن أحد الأحمال (أو عدد منها) ، وهو ما يسمى بالحمل الحرج ، يقع فوق النقطة العليا لخط التأثير . وهذا الأمر يقلل كثيراً من عدد المحاولات التجريبية ، لإيجاد الوضع الخطر لمجموعة الأحمال . وذلك لأنه يساعد فقط ، على بحث الأوضاع ، التى يكون عندها أحد أحمال المجموعة (أو عدد منها فى وقت واحد) ، واقعاً فوق النقطة العليا لخط التأثير .

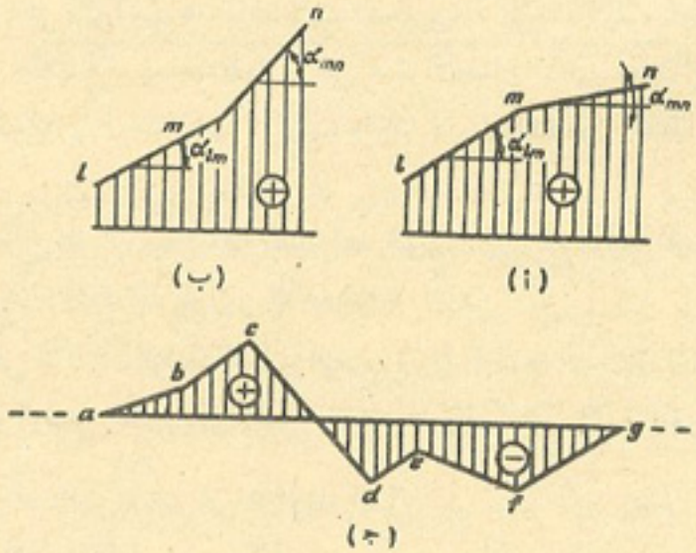
سنصطلح على تسمية النقطة العليا لخط التأثير ، التى يقع فوقها الحمل الحرج ، بالقمة الحرجة (للنوع المذكور من الأحمال) .

ولنفرض الآن بأن الوضع الخطر (الوضع II) لمجموعة الأحمال ، المناظر لقيمة S_{max} ، هو الوضع الذى يكون فيه الحمل P_3 واقعاً فوق القمة الحرجة c لخط

* يجب أن تكون علامات الزيادة مختلفة أيضاً ، حتى عندما يكون الوضع الخطر لمجموعة الأحمال ، مناظراً S_{min} .

** فى بعض الحالات الخاصة ، عند $\Delta S = 0$ ، يمكن أن يكون الوضع I لمجموعة الأحمال (عندما لا يكون أى حمل منها واقعاً فوق النقطة العليا لخط التأثير) وضعاً خطراً . ولكن عندئذ لا تتغير قيمة S ، عند تحرك مجموعة الأحمال ، إلا عندما يصبح أحد الأحمال واقعاً فوق إحدى النقاط العليا لخط التأثير . وهكذا ، فى هذه الحالة أيضاً ، يصبح وضع مجموعة الأحمال ، المشار إليه هنا ، وضعاً خطراً .

التأثير (شكل ٢–٢٤) . عندئذ فى حالة انتقال مجموعة الأحمال من الوضع I (عندما يكون الحمل P_3 واقعاً إلى يسار القمة c) إلى الوضع II ، يجب أن تكون الزيادة ΔS موجبة . أما عند الانتقال من الوضع II إلى الوضع III (عندما يصبح الثقل P_3 واقعاً إلى يمين القمة c) ، فتكون الزيادة المذكورة سالبة . وهكذا ، واستناداً إلى الصيغة (6 — 2) ، يجب أن يكون المقدار $\sum_{i=1}^{i=n} P_i \times \tan \alpha_i$ موجباً ، عند وجود الأحمال إلى يسار الوضع الخطر ، وسالباً عند وجود الأحمال إلى يمين الوضع الخطر . أى إن المقدار المذكور يجب أن يقل عند انتقال الحمل P_3 من القسم bc لخط التأثير (الواقع إلى يسار القمة c ، إلى القسم cd ، الواقع إلى يمين القمة المذكورة) . إذن $P_3 \times \tan \alpha_2 > P_3 \times \tan \alpha_3$ و $\alpha_2 > \alpha_3$. وهكذا نجد بأن زاوية الميل على الافقى لقسم خط التأثير ، الواقع إلى يسار القمة الحرجة ، يجب أن تكون أكبر من زاوية ميل القسم الواقع إلى يمين القمة الحرجة . وهذا الشرط ينطبق على القمة المحدبة m ، المبينة فى الشكل



الشكل ٢ — ٢٥

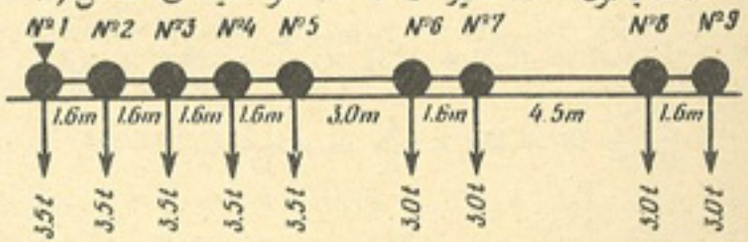
(٢ — ٢٥ ، أ) ، ولا ينطبق على القمة غير المحدبة ، المبينة فى الشكل (٢ — ٢٥ ، ب) . إذن تكون القمة الحرجة لخط التأثير ، محدّبة الشكل . وتتحقق هذه الحالة كذلك ، عند وضع الأحمال المناظر لقيمة S_{min} . وتؤدى إلى

تقليل أو اختصار عدد المحاولات التجريبية ، لإيجاد الوضع الخطر لمجموعة الأحمال .

إن نفس قمة خط التأثير المذكورة ، تكون محدبة أيضاً ، عند وضع الأحمال المناظر لقيمة S_{max} ، وغير محدبة عند وضع الأحمال المناظر لقيمة S_{min} . مثلا ، عند وضع الأحمال المناظر لـ S_{max} ، تكون القمم c, e, g العائدة لخط التأثير ، المبين فى الشكل (٢ — ٢٥ ، جـ) محدبة ، أما القمم a, b, d, f فتكون غير محدبة . أما عند وضع الأحمال المناظر لـ S_{min} ، فتصبح الحالة معكوسة ، حيث تكون القمم a, b, d, f محدبة وتكون القمم c, e, g غير محدبة . ولكى نحدد شكل القمتين الطرفيتين a و g (محدبتين أو غير محدبتين) لخط التأثير ، يجب مد المحور السينى (الأفقى) إلى ما وراء خط التأثير (لاحظ الخط المنقط فى الشكل ٢ — ٢٥ ، جـ) واعتبار امتداداته بمثابة أقسام لخط التأثير ، ذات إحداثيات رأسية مساوية للصفر .

وقد أشرنا سابقاً ، إلى أنه عند وضع الأحمال المناظر لـ S_{max} ، يكون المقدار $\sum_{i=1}^{i=n} P_i \times \tan \alpha_i$ موجباً ، عندما تكون مجموعة الأحمال واقعة إلى يسار الوضع الخطر ، وسالبة عندما تكون واقعة إلى يمين الوضع الخطر . أما عند وضع الأحمال المناظر لـ S_{min} ، فيحدث العكس ، حيث يصبح ذلك المقدار سالباً عندما تكون مجموعة الأحمال واقعة إلى يسار الوضع الخطر ، وموجبة عندما تكون مجموعة الأحمال واقعة إلى يمين الوضع الخطر . وهذا الأمر ، يسهل عملية البحث عن الوضع الخطر لمجموعة الأحمال .

وعلى سبيل المثال ، نبحث طريقة تحديد الوضع (الخطر) غير المناسب جداً لمجموعة الأحمال ، المبينة فى الشكل (٢ — ٢٦) ، عند وضع الأحمال المناظر لـ S_{max} ، عندما يكون خط تأثير S ، كما هو عليه فى الشكل (٢ — ٢٧) .



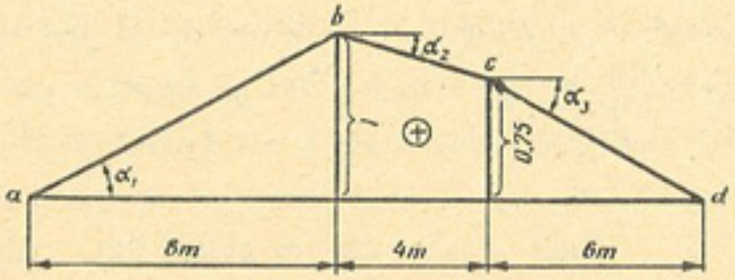
الشكل ٢ — ٢٦

نحسب ظلال زوايا ميل المستقيمات ، التى تحدد خط التأثير :

$$\tan \alpha_1 = + \frac{1}{8} \; ; \; \tan \alpha_2 = - \frac{0.25}{4} = - \frac{1}{16} \; ;$$

$$\tan \alpha_3 = - \frac{0.75}{6} = - \frac{1}{8}$$

وعند الوضع الخطر لمجموعة الأحمال ، يجب أن يقع ولو حمل واحد منها ، فوق احدى القمم المحدبة (b أو c) لخط التأثير* .



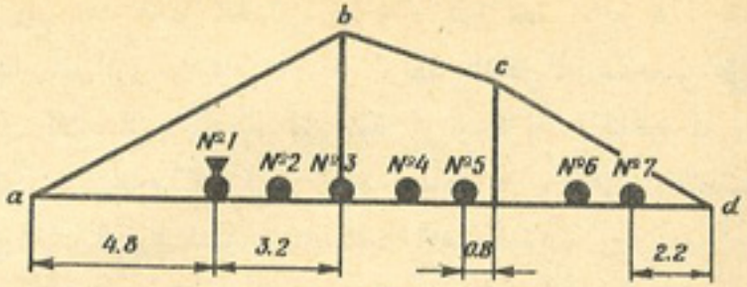
الشكل ٢ – ٢٧

الآن نحرك مجموعة الأحمال من اليمين إلى اليسار . وطالما كانت جميع الأحمال واقعة فوق القسمين bc و cd العائدين لخط التأثير ذى الزوايا السالبة α ، نجد بأن المقدار $\sum_{i=1}^{i=n} P_i \times \tan \alpha_i$ يكون سالبًا . بينما عند مرور الأحمال خلال الوضع الخطر (عندما تكون الأحمال واقعة إلى يسار الوضع الخطر بمسافة قليلة) يجب أن يصبح ذلك المقدار موجباً . إذن يجب تحريك الأحمال فى نفس الاتجاه (من اليمين إلى اليسار) حتى يصبح المقدار المذكور موجباً . وعندما تكون الأحمال واقعة إلى يمين الوضع المبين فى الشكل (٢ – ٢٨) نحصل على ما يلى :

$$\sum_{i=1}^{i=n} P_i \times \tan \alpha_i = (3.5 + 3.5) \times \frac{1}{8} - (3.5 + 3.5 + 3.5) \times$$

$$\times \frac{1}{16} - (3 + 3) \times \frac{1}{8} = - \frac{17}{32} < 0$$

* إن القمتين a و b غير محدبتين ، ولذلك فإن وجود الأحمال فوقهما ، لا يميز الوضع الخطر لمجموعة الأحمال .



الشكل ٢ – ٢٨

وبما أنه عند هذا الوضع للأحمال ، يصبح المقدار $\sum_{i=1}^{i=n} P_i \times \tan \alpha_i$ سالبًا ، إذن ليس من المفيد بحث الوضع الواقع إلى اليمين بمسافة أكبر ، وذلك لأنه من الواضح بأن القيمة السالبة للمقدار المذكور ستكون هى القيمة المناظرة له .

وعندما تكون الأحمال واقعة إلى يسار الوضع المبين فى الشكل (٢ – ٢٨) ، نحصل على ما يلى :

$$\sum_{i=1}^{i=n} P_i \times \tan \alpha_i = (3.5 + 3.5 + 3.5) \times \frac{1}{8} - (3.5 + 3.5) \times$$

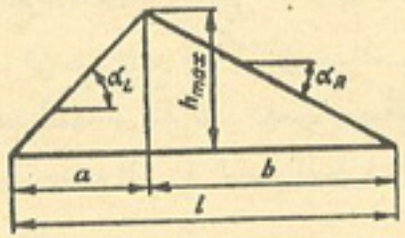
$$\times \frac{1}{16} - (3 + 3) \times \frac{1}{8} = \frac{1}{8} > 0$$

إن الانتقال من الحالة التى تكون فيها الأحمال واقعة إلى يمين الوضع المبين فى الشكل (٢ – ٢٨) ، إلى الحالة التى تكون فيها واقعة إلى يساره قليلا ، مرتبط بتغير علامة المقدار المذكور ، من سالبة إلى موجبة . إذن يصبح وضع الأحمال المبين فى الشكل (٢ – ٢٨) وضعًا خطراً . والحمل الحرج فى هذه الحالة ، هو الحمل رقم 3 .

ولنتبين الآن ، ما الذى كان سيحدث ، لو كانت قيمة كل حمل من الحملين رقم 8 ورقم 9 (شكل ٢ – ٢٦) ، الواقعين فى الوضع الخطر الذى وجدناه ، فيما وراء خط التأثير (إلى يمينه) ، أكبر كثيراً من قيم بقية الأحمال (أى ساوت ١٥ طنًا مثلا) . فى هذه الحالة ، عند تحريك الأحمال لمسافة أكبر إلى يسار الوضع الخطر ، عندما يكون الحملان رقم 8 ورقم 9 واقعين على قسمى خط التأثير bc و cd ، لأصبحت قيمة المقدار $\sum_{i=1}^{i=n} P_i \times \tan \alpha_i$ سالبة مرة أخرى ، وبعد

ذلك ، لو وقع أحد هذين الحملين فيما وراء قمة خط التأثير b ، لأصبحت قيمة المقدار المذكور موجبة من جديد . وبهذا الشكل كنا سنحصل على الوضع الخطر الثانى للأحمال ، ونحصل على قيمة S_{max} الثانية ، المناظرة له . وكنا فى هذه الحالة ، سنستخدم أكبر قيمتى S_{max} المستخرجتين ، لأغراض التصميم ، أى كنا سنعتبر القيمة الكبرى منهما ، بمثابة القيمة التصميمية .

ونأتى الآن إلى بحث مسألة تحديد الوضع الخطر للأحمال ، عندما يكون شكل خط التأثير مثلثاً (شكل ٢ — ٢٩) . نرمز إلى الحمل الحرج بالرمز P_{cr} ،



الشكل ٢ — ٢٩

وإلى مجموعة الأحمال الواقعة فوق القسم الأيسر لخط التأثير ، بالرمز $\Sigma_L P$ ، والواقعة فوق القسم الأيمن ، بالرمز $\Sigma_R P$.

ومن النتيجة التى توصلنا إليها سابقاً ، التى تفيد بأنه عندما تكون الأحمال واقعة إلى يسار الوضع الخطر ، يكون المقدار $\sum_{i=1}^{i=n} P_i \times \tan \alpha_i$ موجباً ، وإلى يمين الوضع الخطر ، سالباً ، نحصل على ما يلى :

$$\tan \alpha_L \, (\Sigma_L P + P_{cr}) + \tan \alpha_R \, \Sigma_R P > 0$$

و

$$\tan \alpha_L \, \Sigma_L P + \tan \alpha_R \, (\Sigma_R P + P_{cr}) < 0$$

وبعد أن نعوض فى هاتين الصيغتين ، القيمة $\tan \alpha_L = \frac{h_{max}}{a}$ ، والقيمة $\tan \alpha_R = -\frac{h_{max}}{b}$ (لاحظ الشكل ٢ — ٢٩) ، مع إجراء التحويلات الحسابية البسيطة ، نحصل على ما يلى :

$$\frac{\Sigma_L P + P_{cr}}{a} > \frac{\Sigma_R P}{b}$$

وكذلك

$$\frac{\Sigma_L P}{a} < \frac{P_{cr} + \Sigma_R P}{b}$$

وإذا أضفنا إلى طرفى الصيغة الأولى ، المقدار $\frac{\Sigma_L P + P_{cr}}{b}$ ، وإلى طرفى الصيغة الثانية المقدار $\frac{\Sigma_L P}{b}$ ، نحصل على ما يلى :

$$(\Sigma_L P + P_{cr}) \frac{a + b}{ab} > \frac{\Sigma_L P + P_{cr} + \Sigma_R P}{b}$$

و

$$\Sigma_L P \frac{a + b}{ab} < \frac{\Sigma_L P + P_{cr} + \Sigma_R P}{b}$$

وإذا عوضنا فى هاتين الصيغتين عن المقدار $a + b$ بالمقدار l (لاحظ الشكل ٢ — ٢٩) ، ورمزنا إلى مجموعة الأحمال كلها بالرمز ΣP ، وأجرينا بعض التحويلات الحسابية البسيطة ، سنحصل على ما يلى :

$$\Sigma_L P + P_{cr} > \Sigma P \times \frac{a}{l} \qquad (2 - 7)$$

و

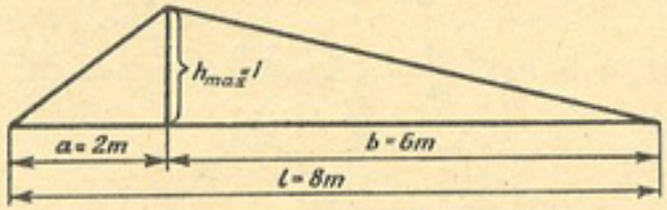
$$\Sigma_L P < \Sigma P \times \frac{a}{l} \qquad (2 - 8)$$

إن المتباينتين (7 — 2) و (8 — 2) تشيران إلى أن الحمل الحرج ، هو ذلك الحمل الذى يجعل المقدار $\Sigma_L P + P_{cr}$ أكبر من المقدار $\Sigma P \times \frac{a}{l}$ ، فى الوقت الذى يكون فيه المقدار $\Sigma_L P$ ، أصغر من $\Sigma P \times \frac{a}{l}$.

وفى معظم الحالات ، يمكن أن يتحرك الحمل المتنقل المعين (مثل القاطرة) فوق الإنشاء (كالجسر أو الكوبرى مثلا) ، من اليسار إلى اليمين ، ومن اليمين إلى اليسار أيضاً . ولكل حالة من هاتين الحالتين ، ما يناظرها من القيم القصوى للقوة S ، أى من قيم S_{max} . وللحصول على أكبر القيم المذكورة ، يجب وضع

العجلات (الأحمال) الأمامية للقاطرة (التى تعتبر عادة من أثقل العجلات) ، فوق القسم الأيسر لخط التأثير ، عندما تكون a أصغر من b (لاحظ الشكل ٢ – ٢٩) ، وفوق القسم الأيمن عندما تكون a أكبر من b .

مثال : يطلب إيجاد الوضع الحرج لقطار محمل كما مبين فى الشكل (٢ – ٣١) ، وذلك تبعاً لخط التأثير المثلث للقوة S ، المبين فى الشكل (٢ – ٣٠) وأبعاده كما يلى : $l = 8$ m ، $a = 2$ m و $h_{max} = 1$ ويطلب أيضاً حساب S_{max} .



الشكل ٢ – ٣٠

الحل : أن الوزن الكلى للأحمال التى يمكن وضعها على باع طوله 8 m ، يساوى ما يلى :

$$R = 5 \times 3.5 = 17.5 \text{ tons}$$

والآن نحرك قطار الأحمال من اليمين إلى اليسار (من القسم الأكبر لخط التأثير إلى القسم الأصغر) . ولتحديد الحمل الحرج ، نستخدم المتباينتين (7 — 2) و (8 — 2) :

$$\Sigma_L P + P_{cr} > \Sigma P \times \frac{a}{l}$$

$$\Sigma_L P < \Sigma P \times \frac{a}{l}$$

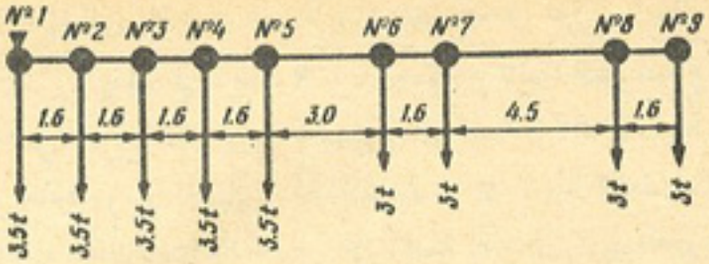
أو :

$$\Sigma_L P + P_{cr} > 17.5 \times \frac{2}{8} = 4.375 \text{ t}$$

$$\Sigma_L P < 4.375 \text{ t}$$

وهذا يدل على أن الحمل الثانى هو الحمل الحرج ، وذلك لأن المتباينة الأخيرة لا تتحقق إلا فى هذه الحالة . وفى الحقيقة ، إذا كان لدينا $\Sigma_L P = 3.5$ tons و $P_{cr} = 3.5$ tons إذن سوف نحصل على ما يلى :

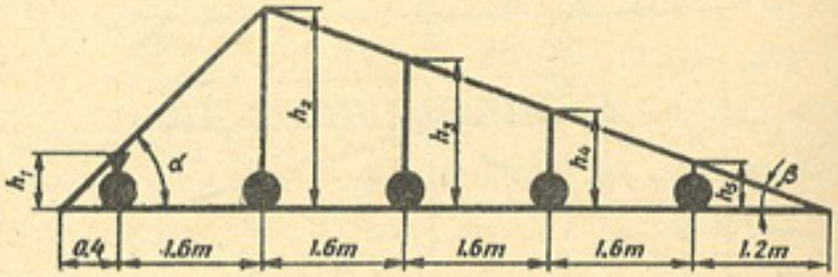
$$\Sigma_L P + P_{cr} = 3.5 + 3.5 = 7 > 4.375 \text{ t}$$
$$\Sigma_L P = 3.5 < 4.375 \text{ t}$$



الشكل ٢ – ٣١

والوضع الخطر لقطار الأحمال ، مبين فى الشكل (٢ – ٣٢) .

ولتحديد قيمة S_{max} ، المناظرة للوضع الحرج للقطار ، نستخرج فيما يلى قيم الإحداثيات الرأسية h_1 h_2 h_3 h_4 h_5 (شكل ٢ – ٣٢) :



الشكل ٢ – ٣٢

$$h_1 = 0.4 \tan \alpha = 0.4 \times \frac{1}{2} = 0.2$$

$$h_2 = h_{max} = 1$$

$$h_3 = (1.6 \times 2 + 1.2) \tan\beta = (1.6 \times 2 + 1.2) \frac{1}{6} = 0.733$$

$$h_4 = (1.6 + 1.2) \tan \beta = (1.6 + 1.2) \frac{1}{6} = 0.467$$

$$h_5 = 1.2 \tan \beta = 1.2 \times \frac{1}{6} = 0.2$$

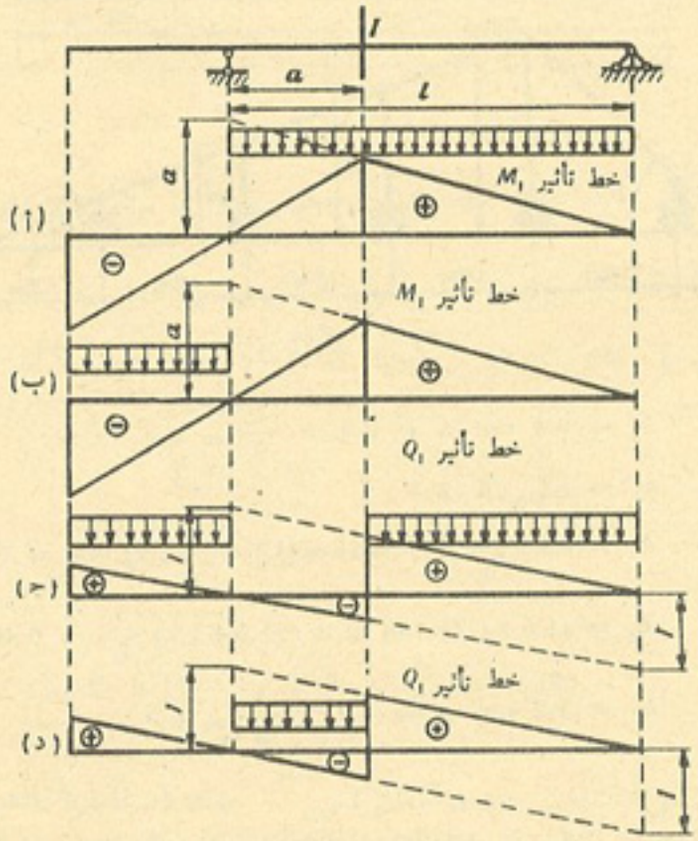
وينتج من ذلك أن :

$$S_{max} = \Sigma Ph = P\Sigma h = 3.5(0.2 + 1 + 0.733 + 0.467 + 0.2) = 9.1$$

وإذا قيست الإحداثيات الرأسية لخط التأثير بالأمتار ، عندئذ تكون وحدة قياس الإجهاد $S_{max} = 9{,}1$ هى طن – متر . وإذا قيست الإحداثيات المذكورة ، بوحدات لابعدية ، عندئذ تكون وحدة قياس S_{max} هى الطن فقط .

٣ – الحالة التى يؤثر فيها على الإنشاء حمل متنقل موزع بانتظام . لقد بينا فى البند (٢ – ٦) بأن قيمة القوة S ، الناجمة عن تأثير الحمل الموزع بانتظام ، تساوى حاصل ضرب شدة توزيع الحمل q فى المساحة المحاطة بخط التأثير ، المقامة فى حدود موضع الحمل ، أى إن $S = q\omega$. ولما كانت شدة توزيع الحمل q ثابتة المقدار ، إذن نحصل على القيمة القصوى للقوة المطلوبة ، عند القيمة القصوى للمساحة ω ، وهذا ما يتحقق عندما تكون q واقعة فوق كل المساحة المحاطة بخط التأثير ، ذات العلامة المتماثلة * .

ويبين الشكل (٢ – ٣٣ ، أ) حالة التحميل بحمل موزع بانتظام ،



الشكل ٢ – ٣٣

* يفترض هنا بأن طول القسم الذى يمكن أن يؤثر عليه الحمل الموزع ، أطول من القسم المحمل لخط التأثير .

التى تناظر M_{max} (أى ان كل القسم الموجب لخط التأثير ، محمل تماماً) ، أما الشكل (٢ – ٣٣ ، ب) فيبين حالة التحميل التى تناظر M_{min} (أى ان كل القسم السالب لخط التأثير ، محمل تماماً) . ويبين الشكل (٢ – ٣٣ ، جـ) حالة التحميل المناظرة لـ Q_{1max} (إن كلا القسمين الموجبين لخط التأثير ، محملان تماماً) . وأخيراً يبين الشكل (٢–٣٣ ، د) حالة التحميل المناظرة لـ Q_{1min} (إن كل القسم السالب لخط التأثير ، محمل تماماً)

البند ٢ – ٨ : تحديد القوى والعزوم القصوى باستخدام الأحمال المكافئة

لقد رأينا سابقاً بأن تحديد القوى القصوى فى الإنشاء (العتبة) ، بواسطة التحميل المباشر لخطوط تأثير مجموعة من الأحمال المركزة ، يحتاج إلى إجراء عدد كبير من العمليات الحسابية ، المتعلقة بإيجاد الوضع الخطر للأحمال ، وتحديد مقدار القوة . أما عندما تكون خطوط التأثير على شكل مثلثات ، فيمكن اختصار هذه العملية ، بفضل استخدام الجداول أو الرسوم البيانية ، الخاصة بما يسمى بالأحمال المكافئة (equivalent loads) .

ويطلق اسم الحمل المكافئ ، على ذلك الحمل الموزع بانتظام ، الذى يحدث فى القطعة الإنشائية المعينة (فى المقطع المعين) نفس القوة أو العزم ، الذى تحدثه مجموعة الأحمال المناظرة لذلك الحمل ، فى حالة وضعها غير الملائم تماماً ، على الإنشاء .

ويمكن دائماً اختيار الحمل المصمت الموزع بانتظام ، الذى يكون تأثيره على الإنشاء ، مطابقاً (مكافئاً) لتأثير المجموعة المعينة من الأحمال المركزة ، فى حالة وضعها غير الملائم تماماً ، على الإنشاء . ولهذا الغرض من الضرورى أن توضع المعادلة التالية :

$$\Sigma P_i h_i = q_{eq} \Omega$$

حيث Ω – المساحة المحاطة بخط التأثير ،

q_{eq} – شدة توزيع الحمل المكافئ المجهول .

وبعد حل هذه المعادلة لإيجاد قيمة q_{eq} نحصل على :

$$q_{eq} = \frac{\Sigma\ P_i\ h_i}{\Omega}$$

وفى المثال الذى أوردناه فى البند (٢ — ٧) وجدنا بأن القوة S_{max} ، المناظرة لقطار الأحمال المذكور ، تساوى ٩,١ . وباستخدامها هنا نجد ما يلى :

$$q_{eq} = \frac{9.1}{\frac{1\times 8}{2}} = \frac{9.1}{4} = 2.275\ \text{t/m}$$

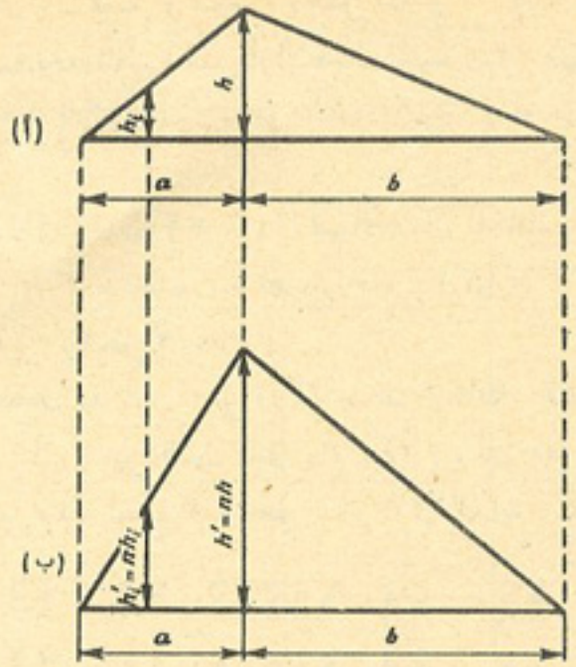
وهكذا لتحديد قيمة الحمل المكافئ ، يجب سلفاً إيجاد القوة القصوى ، بالتحميل المباشر لخط التأثير المناظر ، بمجموعة من الأحمال المركزة . ويظهر لأول وهلة بأن الحمل المكافئ ، تبعاً لذلك ، لا يؤدى إلى تبسيط الحساب . ولكن الأمر ليس كذلك . لأن قيمة الحمل المكافئ لا تعتمد على قيمة الإحداثيات الرأسية لخط التأثير المثلث ، بل تعتمد (عند مجموعة الأحمال المعينة) على طول الجزء المحمل لخط التأثير ، وعلى موقع قمته فقط (الإحداثى الرأسى الأكبر) . وهذا يساعد على حساب قيمة الحمل المكافئ سلفاً (عند مجموعة الأحمال المعينة) ، للأنواع النموذجية من خطوط التأثير ، وإعطاء نتائج هذه الحسابات ، على هيئة جداول أو رسوم بيانية .

وقبل أن نأتى إلى شرح طريقة الحساب بواسطة الحمل المكافئ نقدم بعض المعلومات عن مثل خطوط التأثير هذه .

يسمى خطا التأثير ، بالخطين المتماثلين ، إذا أمكن الحصول على جميع الإحداثيات الرأسية لأحدهما ، بضرب الإحداثيات الرأسية المناظرة للخط الآخر ، فى معامل ثابت .

ويبين الشكل (٢ — ٣٤) خطى تأثير مثلثين متماثلين ، قاعدتهما متساويتان ، ونسبة الإحداثيات الرأسية فيهما تساوى n .

نثبت الآن بأن الأحمال المكافئة ، لهذين الخطين المتماثلين ، متساوية تماماً . وللقيام بذلك ، نحسب الحمل المكافئ ، لخط التأثير المبين فى الشكل (٢ — ٣٤ ، ب) :



الشكل ٢ — ٣٤

$$q'_{eq} = \frac{\Sigma\ P'_i\ h'_i}{\Omega'}$$

وهنا

$$h'_i = n\ h_i$$

$$\Omega' = 0.5\ nh\ (a + b) = n\ \Omega$$

حيث Ω — المساحة المحاطة بخط التأثير المبين فى الشكل (٢ — ٣٤ ، أ) .

وبعد التعويض فى صيغة q'_{eq} ، عن القيمتين h'_i و Ω' بما يساويهما من h و Ω ، نحصل على ما يلى :

$$q'_{eq} = \frac{n\ \Sigma\ P_i\ h_i}{\Omega \times n} = \frac{\Sigma\ P_i\ h_i}{\Omega} = q_{eq}$$

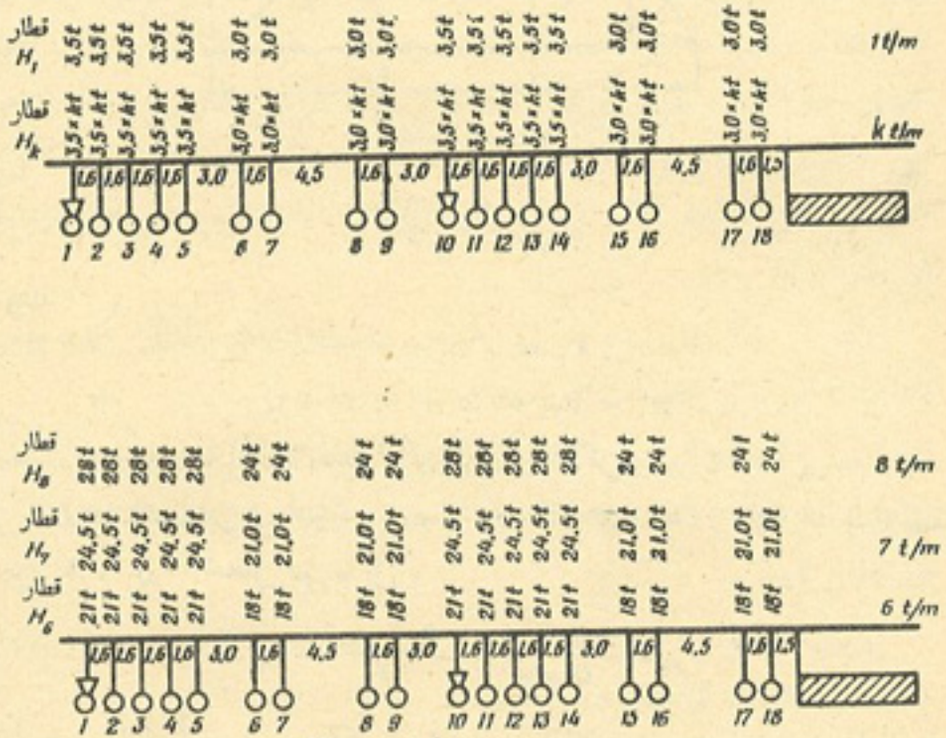
حيث $q_{eq} = \frac{\Sigma\ P_i h_i}{\Omega}$: تمثل قيمة الحمل المكافئ بالنسبة لخط التأثير المبين فى الشكل (٢ — ٣٤ ، أ) .

وهذا يعتبر بمثابة برهان أو إثبات للحالة المذكورة .

وهكذا نرى بأن قيمة (شدة) الحمل المكافئ ، تعتمد على البارامترات التالية : ١) قيمة وخصائص الحمل أو الأحمال المعينة ، ٢) طول القسم المحمل ، ٣) وضع قمة خط التأثير المثلث ، على امتداد الباع (أو على امتداد القسم المحمل) .

وقد أدرجت فى الجدول (٢ — ١) قيم الأحمال المكافئة ، المحسوبة بالنسبة لقطار قياسى H_1 ، يستخدم عند تصميم جسور (كبارى) السكك الحديدية فى الاتحاد السوفييتى (شكل ٢ — ٣٥) * .

ويحتوى الجدول المذكور ، على قيم الأحمال المكافئة ، لمختلف أطوال القسم المحمل من خط التأثير (حتى الطول الذى يبلغ ٢٠٠ م ، أى حتى $l = 200m$) ولثلاث حالات مختلفة لوضع قمة خط التأثير : فى البداية ، فى ربع الباع وفى



يورد ضغط المحاور بالاطنان

الشكل ٢ — ٣٥

* إن المسافات الموجودة بين الأحمال ، المبينة فى الشكل (٢ — ٣٥) مقاسة بالأمتار .

جدول ٢ — ١

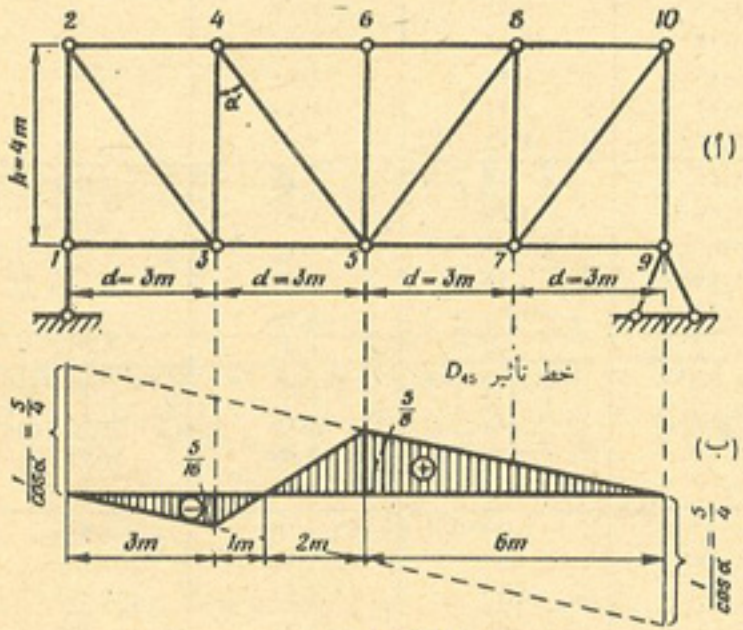
الأحمال المكافئة لكل متر من طول السكة الحديدية ، المناظرة للقطار القياسى H_1 ، مقاسة بطن / م

طول القسم المحمل من خط التأثير (بالأمتار)	نوع الرسم التخطيطى لخط التأثير: القمة عند الطرف	القمة عند ربع الباع	القمة فى الوسط
١	٢	٣	٤
١	٧,٠٠	٧,٠٠	٧,٠٠
٢	٤,٢٠	٣,٥٠	٣,٥٠
٣	٣,٤٢	٣,٠١	٢,٥١
٤	٣,١٥	٢,٥٧	٢,٤٥
٥	٢,٩١	٢,٤١	٢,٤١
٦	٢,٨٠	٢,٢٦	٢,٢٦
٧	٢,٧١	٢,٢٦	٢,٢٦
٨	٢,٦٣	٢,٢٨	٢,٢٨
٩	٢,٥١	٢,٢٣	٢,٢٣
١٠	٢,٤٢	٢,١٦	٢,١٦
١٢	٢,٢٩	٢,٠٥	١,٩٨
١٤	٢,١٦	١,٩٧	١,٨٨
١٦	٢,٠٣	١,٨٨	١,٨٢
١٨	١,٩٥	١,٧٧	١,٧٩
٢٠	١,٨٨	١,٦٩	١,٧٤
٤٠	١,٧٧	١,٦١	١,٥٩
٤٥	١,٧٣	١,٥٦	١,٥٢
٥٠	١,٧٠	١,٥٥	١,٤٦
٦٠	١,٦٥	١,٥٢	١,٤٤
٧٠	١,٦١	١,٤٦	١,٤٤
٥٠	١,٥٨	١,٤٣	١,٤٣
٦٠	١,٥١	١,٣٧	١,٣٧
٧٠	١,٤٦	١,٣٣	١,٣٢
٨٠	١,٤١	١,٢٩	١,٢٧
٩٠	١,٣٧	١,٢٦	١,٢٢
١٠٠	١,٣٤	١,٢٤	١,١٨
١١٠	١,٣٢	١,٢٢	١,١٥
١٢٠	١,٢٩	١,٢٠	١,١٣
١٣٠	١,٢٧	١,١٨	١,١١
١٤٠	١,٢٦	١,١٦	١,١٠
١٥٠	١,٢٤	١,١٥	١,٠٨
١٦٠	١,٢٣	١,١٤	١,٠٧
١٧٠	١,٢١	١,١٢	١,٠٦
١٨٠	١,٢٠	١,١١	١,٠٦
١٩٠	١,١٩	١,١٠	١,٠٥
٢٠٠	١,١٨	١,٠٩	١,٠٥

الوسط . أما إذا ظهرت لدينا حالة تختلف عما ذكرناه ، أى وضع يختلف عن الأوضاع الثلاثة المذكورة ، يجب عندئذ حساب الحمل المكافئ ، بطريقة الاستكمال من الداخل (interpolation) للأرقام المبينة فى الجدول المذكور .

وإذا ضربنا كافة أحمال المحاور (axle loads) ، التابعة للقطار القياسى H_1 ، المبين فى الرسم التخطيطى ، فى المعامل k ، الذى يبين صنف الحمل ، لحصلنا على الرسم التخطيطى للتحميل ، بالنسبة للقطار H_k وعند تصميم خطوط السكك الحديدية الرئيسية ، تؤخذ $k = 7$ و $k = 8$ ، ولخطوط السكك الحديدية المحلية ، تؤخذ $k = 6$ و $k = 7$. ويبين الشكل (٢ — ٣٥) ، بالإضافة إلى الرسم التخطيطى للقطار H_1 ، الرسوم التخطيطية للأحمال ، التى أصنافها هى $k = 6$ ، $k = 7$ و $k = 8$.

مثال ١ : يطلب تحديد الإجهاد الناجم فى قطعة (قضيب) الجمالون 5 — 4 ، المبين فى الشكل (٢ — ٣٦ ، أ) نتيجة لتأثير القطار القياسى H_7 ، وذلك بواسطة الحمل المكافئ ، مع العلم بأن خط التأثير D_{45} المناظر لذلك مبين فى الشكل (٢ — ٣٦ ، ب) .



الشكل ٢ — ٣٦

الحل : لكى نحصل على القيمة القصوى لقوة الشد D_{45} الناجمة عن الحمل ، يجب تحميل كل قسم الباع الموجب ، المناظر للإحداثيات الرأسية الموجبة لخط التأثير ، ويبلغ طول هذا القسم كله ٨ أمتار ($l = 8$ m) . ونستخرج من العمود الثالث فى الجدول (٢ — ١) الحمل المكافئ للقطار القياسى H_1 ، فنجد بأنه يساوى ٢,٢٨ طن لكل متر طول (أى ٢,٢٨ طن م) . وقيمة قوة الشد الناجمة فى قطعة الجمالون 5 — 4 ، نتيجة لتأثير القطار H_7 ، تحدد من المعادلة التالية :

$$2\,D_{45} = kq_{eq}\,\Omega = 7 \times 2.28 \times \frac{5}{8} \times \frac{8}{2} = 39.90 \text{ t*}$$

ومنها ينتج قوة الشد D_{45} تساوى :

$$D_{45} = \frac{39.90}{2} = 19.95 \text{ t}$$

وللحصول على قوة الانضغاط القصوى D_{45} ، نحمل القسم السالب ($l = 4$ m) لخط التأثير . أن الحمل المكافئ ، المناظر لهذا القسم من خط التأثير ($l = 4$ m) يساوى ٢,٥٧ (العدد المناظر للطول 4 m ، وهو مأخوذ من العمود الثالث للجدول ٢ — ١) . وتحدد قوة الانضغاط القصوى D_{45} ، من المعادلة التالية :

$$2\,D_{45} = kq_{eq}\,\Omega = 7 \times 2.57 \times \frac{5}{16} \times \frac{4}{2} = 11.24 \text{ t}$$

ومنها ينتج أن :

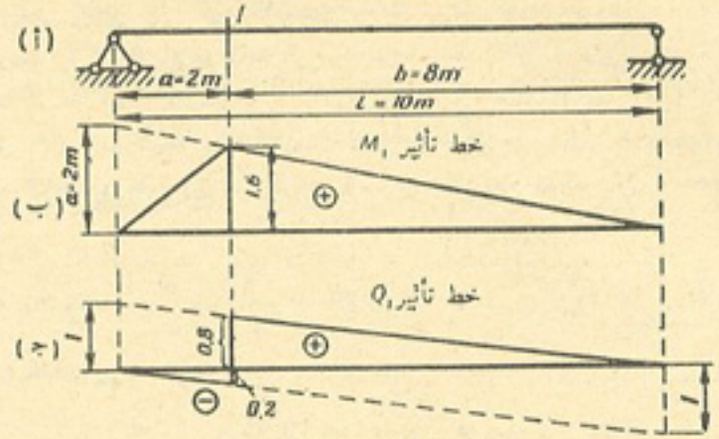
$$D_{45} = \frac{11.24}{2} = 5.62 \text{ t}$$

مثال ٢ : يطلب تحديد $M_{l\max}$ و $Q_{l\max}$ و $Q_{l\min}$ ، باستخدام الحمل المكافئ ، لعارضة ذات مسندين (شكل ٢ — ٣٧ ، أ) عندما يمر عليها القطار القياسى H_7 . أن خطوط تأثير كل من العزم M_l وقوة القص Q_l (المقطع l من العارضة المذكورة) مبينة فى الشكل (٢ — ٣٧ ، ب ، جـ) .

عند الحساب ، يعتبر حمل القطار موزعا على عارضتين (لأن قضيبى السكة الحديدية التى يسير عليها القطار المذكور ، مثبتان بصورة متوازية على مدادتين أو عتبتين مستعرضتين ، وهاتان المدادتان بدورهما مثبتتان على عارضتين متوازيتين) . ولهذا السبب ، سيكون الحمل المكافئ ، للعارضة الواحدة ، مساوياً لنصف الحمل المكافئ ، للسكة الحديدية كلها .

الحل : تحديد $M_{l\max}$. أن طول القسم المحمل من خط التأثير ، يساوى ١٠ م ، أى يساوى طول باع العارضة . وتقع قمة خط التأثير بين المسند وربع طول باع العارضة . إذن تحدد

* أن سبب وجود المعامل 2 قبل قوة الشد D_{45} ، هو أن الأحمال المكافئة ، المدرجة فى الجدول (٢ — ١) مقاسة بالنسبة للمتر الطولى من السكة ، المؤلفة من جمالونين .



الشكل ٢ — ٣٧

قيمة الحمل المكافئ ، بطريقة الاستكمال من الداخل .

وبالنسبة للقطار H_1 ، لدينا ما يلي :

$$q_a = q_o + (q_{l/4} - q_0)\frac{a}{\frac{1}{4}l} = 2.42 + (2.16 - 2.42)\frac{2}{2,5} =$$

$$= 2.42 - 0.26 \times 0.8 = 2.21 \text{ t/m}$$

حيث q_o — الحمل المكافئ ، للقسم المحمل من خط التأثير ، وطوله ١٠ م ، عند وقوع القمة في الطرف الأيسر للعارضة (مأخوذ من الجدول ٢ — ١) ،

$q_{l/4}$ — الحمل المكافئ ، للقسم المحمل من خط التأثير ، وطوله ١٠م ، عند وقوع القمة في ربع طول الباع (مأخوذ من الجدول ٢ — ١) ،

q_a — الحمل المكافئ ، للقسم المحمل من خط التأثير ، وطوله ١٠ م ، عند وقوع القمة في خمس طول الباع (لاحظ الشكل ٢ — ٣٧ ، ب) ،

a — المسافة من قمة خط التأثير المذكور ، حتى أقرب نهاية له ،

l — طول القسم المحمل من خط التأثير ، ويساوي في هذه الحالة ، باع العارضة .

إن الحمل المكافئ ، بالنسبة للقطار H_7 ، يساوي ما يلي :

$$q_a \times 7 = 2.21 \times 7 = 15.47 \text{ t/m}$$

إذن الحمل المكافئ لعارضة واحدة فقط ، يساوي نصف هذا المقدار :

$$q_1 = \frac{1}{2} \times 15.47 = 7.735 \text{ t/m}$$

والمساحة المحاطة بخط تأثير M_1 (عزم الانحناء في المقطع I) تساوي ما يلي ، (شكل ٢ — ٣٧ ، ب) :

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \times 10 \times 1.6 = 8 \text{ m}^2$$

إذن نجد بأن :

$$M_{1\,max} = q_1\omega_1 = 7.735 \times 8 = 61.88 \text{ t/m}$$

تحديد Q_{Imax} . لإيجاد قوة القص الموجبة القصوى في المقطع I ، يجب تحميل القسم الموجب من خط تأثير Q_I (شكل ٢ — ٣٧ ، جـ) . وطول هذا القسم يساوي ٨ م . أن قمة خط التأثير تقع على الطرف الأيسر للقسم المحمل . والآن نستخدم الجدول (٢ — ١) لإيجاد الحمل المكافئ ، في هذه الحالة ، للقطار القياسي H_1 .

$$q_0 = 2.63 \text{ t/m}$$

أما بالنسبة للقطار H_7 ، فنجد بأن الحمل المكافئ يساوي ما يلي :

$$2.63 \times 7 = 18.41 \text{ t/m}$$

والحمل المكافئ ، للعارضة الواحدة ، يساوي نصف هذا المقدار ، أي :

$$q_2 = \frac{1}{2} \times 18.41 = 9.20 \text{ t/m}$$

والمساحة المحاطة بالقسم الموجب لخط تأثير قوة القص Q_I ، تساوي ما يلي :

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \times 8 \times 0.8 = 3.2 \text{ m}$$

إذن يكون لدينا :

$$Q_{Imax} = q_2\omega_2 = 9.20 \times 3.2 = 29.44 \text{ t}$$

تحديد Q_{Imin} . لإيجاد قوة القص السالبة القصوى في المقطع I ، يجب تحميل القسم السالب من خط تأثير Q_I (شكل ٢ — ٣٧ ، جـ) . أن طول هذا القسم يساوي ٢ م . وقمة خط التأثير تقع على الطرف الأيمن للقسم المحمل من خط التأثير . والآن نستخدم الجدول (٢ — ١) لإيجاد الحمل المكافئ ، في هذه الحالة ، للقطار القياسي H_1 :

$$q_0 = 4.20 \text{ t/m}$$

والحمل المكافئ ، للقطار H_7 يساوي :

$$4.20 \times 7 = 29.40 \text{ t/m}$$

والحمل المكافئ ، للعارضة الواحدة ، يساوي نصف هذا المقدار ، أي :

$$q_3 = \frac{1}{2} \times 29.40 = 14.70 \text{ t/m}$$

والمساحة المحاطة بالقسم السالب من خط تأثير قوة القص Q_r ، تساوى :

$$\omega_3 = -\frac{1}{2} \times 2 \times 0.2 = -0.2\text{m}$$

إذن نجد بأن قوة القص السالبة القصوى ، تساوى ما يلى :

$$Q_{r\min} = q_3 \omega_3 = -14.70 \times 0.2 = -2.94\text{t}$$

البند ٢ – ٩ : العتبات المتعددة الأبواع المحددة استاتيكيًا

إن العتبة المتعددة الأبواع ، المحددة استاتيكيًا ، أو كما تسمى أيضاً ، بالعتبة المفصلية المتعددة الأبواع ، هى عبارة عن إنشاء ثابت محدد استاتيكيًا ، يتألف من عدد من العتبات البسيطة (الكابولية وغير الكابولية) ، المتصلة مع بعضها البعض بواسطة الوصلات المفصلية .

إن العتبات البسيطة (وحيدة الباع) ، التى تتألف منها العتبة المتعددة الأبواع المحددة استاتيكيًا ، قد تكون جميعها مصمتة (rigid) أو تشابكية (أى على هيئة جمالونات) ، أو تتألف من عتبات مصمتة وعتبات تشابكية معاً .

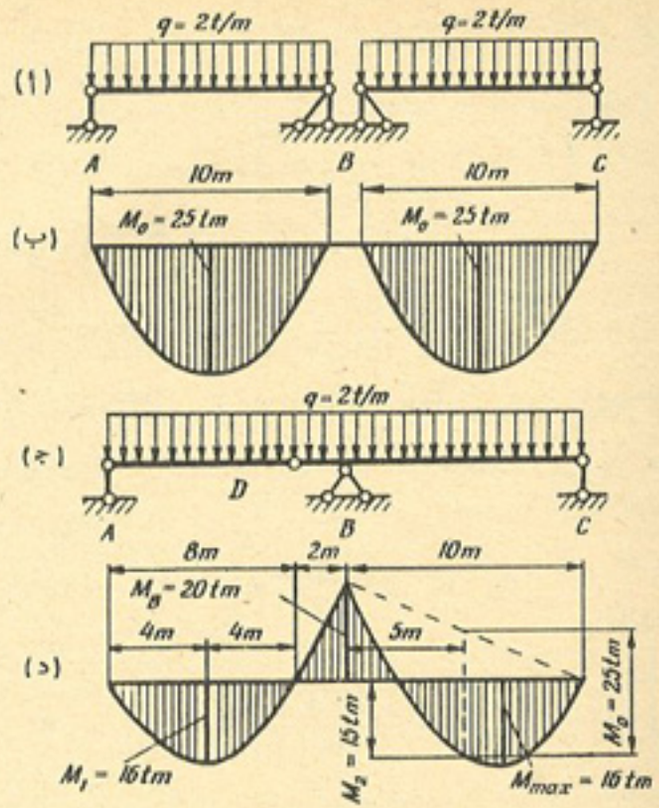
وعادة تكون العتبة المتعددة الأبواع ، المحددة استاتيكيًا ، أكثر فائدة وملائمة ، من عدة عتبات بسيطة منفردة .

ولإيضاح ذلك ، نقدم المثال التالى : لنفرض بأنه قد طلب إلينا تسقيف أو تغطية باعين متجاورين هما AB ، BC ، ويبلغ طول كل منهما ١٠ م . هذا مع العلم بأن الحمل المؤثر (حمل التصميم) ، موزع بانتظام ، بشدة قدرها ٢ طن / م ، أى $q = 2$ t/m .

لنحاول أولا استخدام عتبات بسيطة منفردة (شكل ٢ – ٣٨ ، أ) . إن عزم الانحناء فى وسط كل باع من الأبواع ، سيساوى ما يلى :

$$M_0 = \frac{q l^2}{8} = \frac{2 \times 10^2}{8} = 25 \text{ t/m}$$

والرسوم البيانية لعزوم الانحناء هذه ، مبينة فى الشكل (٢ – ٣٨ ، ب)



الشكل ٢ – ٣٨

أما الآن فنستخدم عتبة ثنائية الباع ، ذات وصلة مفصلية . نغطى الباع BC بعتبة كابولية BD طولها ٢ م (شكل ٢ – ٣٨ ، جـ) . ثم نضع العتبة AD ، التى يبلغ طولها ٨ م ، على طرف الكابول (الوصلة المفصلية D) ، وعلى المسند A . نحسب عزوم الانحناء فى بعض مقاطع الانشاء الناجم عن ذلك .

إن عزم الانحناء فى وسط العتبة البسيطة AD ، يساوى ما يلى :

$$M_1 = \frac{2 \times 8^2}{8} = 16 \text{ t/m}$$

وينتقل الحمل التالى ، من العتبة القصيرة AD إلى طرف الكابول فى النقطة D :

$$P = \frac{2 \times 8}{2} = 8\text{t}$$

ونتيجة لتأثير هذا الحمل ، والحمل الموزع بانتظام ، الواقع على الكابول ، ينشأ فى المقطع B عزم انحناء يساوى ما يلى :

$$M_B = -\left(8 \times 2 + \frac{2 \times 2^2}{2}\right) = -20\text{t/m}$$

والعزم الناشىء فى وسط الباع BC ، يساوى :

$$M_2 = \frac{2 \times 10^2}{8} - \frac{20}{2} = 15 \text{ t/m}$$

إن عزم الانحناء الأقصى فى الباع BC ، ينشأ فى المقطع الذى تكون فيه قوة القص ، مساوية للصفر . ولتحديد المسافة x من المسند الأيمن إلى هذا المقطع ، نضع المعادلة التالية :

$$Q_x = -C + qx = 0$$

حيث C — رد فعل المسند الأيمن ، ويساوى :

$$C = \frac{-8 \times 2 - 2 \times 2 \times 1 + 2 \times 10 \times 5}{10} = 8\text{t}$$

لذلك فإن

$$-8 + 2x = 0$$

$$x = 4\text{m}$$

وعزم الانحناء الأقصى فى الباع BC (عند $x = 4\text{m}$) يساوى ما يلى :

$$M_{max} = 8 \times 4 - 2 \times 4 \times 2 = 16 \text{ t/m}$$

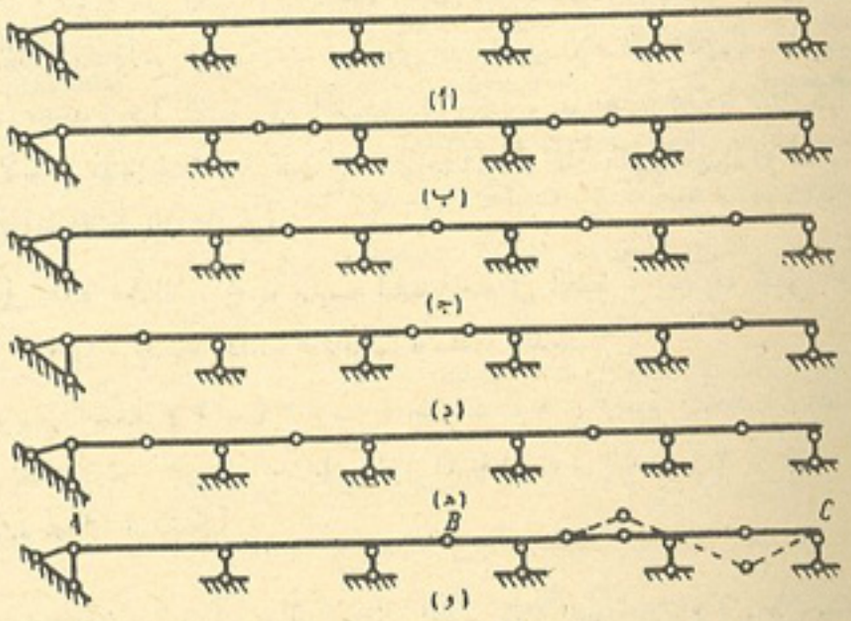
والرسم البيانى لعزوم انحناء العتبة الثنائية الباع ، مبين فى الشكل (٢ — ٣٨ ، د) . وكما نرى ، أن عزوم الانحناء فى العتبة الثنائية الباع ، أقل مما هى عليه فى العتبتين البسيطتين المنفردتين . لذلك تصبح العتبة الثنائية الباع ، أكثر ملاءمة من الناحية الاقتصادية .

وكذلك نجد بأن استخدام العتبات المتواصلة غير المحددة استاتيكيا ، يساعد فى كثير من الحالات ، على تقليل قيمة عزم الانحناء ، بالمقارنة مع العتبات البسيطة المنفردة . ولكن للعتبة ذات الوصلات المفصلية ، الميزات التالية ، التى تفضلها

على العتبة المتواصلة ، وهى : أ) تتألف العتبة ذات الوصلات المفصلية ، من قطع منفردة قصيرة نوعاً ما ، سهلة الإنتاج فى المصانع وسهلة التجميع بالمعدات الميكانيكية ، ب) إن الإجهادات والقوى الناجمة فى العتبة ذات الوصلات المفصلية ، تكون محددة استاتيكياً ، ولا تعتمد على هبوط المساند . ونتيجة لذلك ، لاقت العتبات المتعددة الأبواع ، ذات الوصلات المفصلية ، إنتشاراً واسعاً فى المجالات الإنشائية .

وعند حل المسائل المتعلقة بالعتبة ذات الوصلات المفصلية المحددة استاتيكياً والمستقرة هندسياً ، يجب أن نأخذ فى الاعتبار ، بأنه يمكن الحصول دائماً على مثل هذه العتبة ، من العتبة المتواصلة ، أى من العتبة غير المحددة استاتيكياً ، بإضافة عدد من المفصلات إلى العتبة الأخيرة . وسنرى فيما بعد بأن عدد هذه المفصلات ، يساوى درجة عدم التحديد الاستاتيكى للعتبة المتواصلة (أى يساوى عدد القوى الفائضة أو المجهولة) .

ويبين الشكل (٢ — ٣٩ ، أ) عتبة متواصلة ذات خمسة أبواع . وهذه العتبة مثبتة مع الأساس ، بواسطة سبعة مساند مفصلية (قضبان مفصلية مساندة) .



الشكل ٢ — ٣٩

ولتحديد القوى أو الإجهادات المؤثرة فى هذه القضبان ، يمكن وضع ثلاث معادلات توازن مستقلة فقط . ولهذا السبب ، لا يمكن حساب هذه العتبة ، باستخدام المعادلات الاستاتيكية ، لأن درجة عدم التحديد الاستاتيكى لها ، هى الدرجة الرابعة (أى تحتوى على أربع قوى إضافية مجهولة) .

وإذا رمزنا لعدد مساند العتبة المتواصلة ، بالرمز C ، فسنجد بأن درجة عدم التحديد الإستاتيكى (أو عدد القوى الإضافية المجهولة) ، الذى نرمز إليه بالرمز n ، سيساوى ما يلى : $n = C - 3$.

وبامتخدام هذه الصيغة ، بالنسبة للعتبة المبينة فى الشكل (٢ — ٣٩ ، أ) نجد بأن :

$$n = 7 - 3 = 4$$

أى هناك أربع قوى إضافية مجهولة .

إن كل مفصلة موضوعة فى باع أو على مسند العتبة المتواصلة تساعد على كتابة معادلة استاتيكية إضافية — المعادلة التى يكون فيها مجموع عزوم كافة القوى (حول المفصلة) المؤثرة على العتبة ، فى جهة واحدة من المفصلة . وإذا وضعنا فى العتبة المتواصلة ، عدداً من المفصلات ، يساوى عدد القوى الإضافية المجهولة ، الموجودة فيها ، عندئذ تتحول العتبة غير المحددة استاتيكياً ، إلى عتبة محددة استاتيكياً ، وذلك لأنه فى هذه الحالة ، سيكون فى استطاعتنا إيجاد كافة القوى المجهولة الإضافية ، بواسطة المعادلات الاستاتيكية .

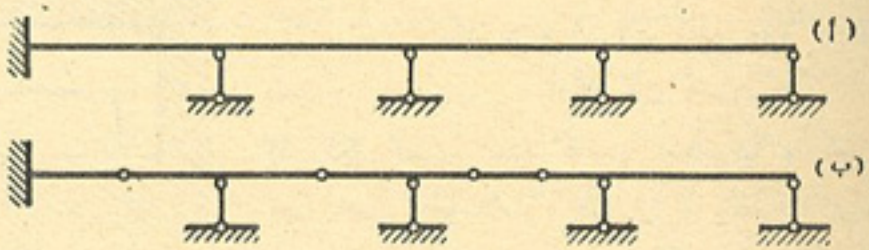
وفى هذه الحالة ، يجب ترتيب المفصلات فى العتبة ، بطريقة تجعل العتبة بكافة أقسامها ، تصبح محددة استاتيكيا ومستقرة هندسياً * .

ويبين الشكل (٢ — ٣٩ ، ب ، ج ، د ، هـ) الرسوم التخطيطية المختلفة لوضع المفصلات ، التى تساعد على تحويل العتبة المبينة فى الشكل (٢ — ٣٩ ، أ) إلى عتبة محددة استاتيكياً .

* لقد بحثنا المثال المتعلق بمسألة الاستقرار الهندسى للعتبة المتعددة الأبواع ، ذات الوصلات المفصلية ، فى نهاية البند (١ — ٢) .

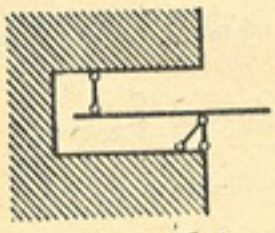
ويبين الشكل (٢ — ٣٩ ، و) ترتيب المفصلات بطريقة غير ناجحة . وبالرغم من أن عدد المفصلات المرتبة فى العتبة ، يساوى أربعة فى هذه الحالة ، أى يساوى عدد القوى الإضافية المجهولة ، فى العتبة المتواصلة المناظرة لها (شكل ٢ — ٣٩ ، أ) ، إلا أن قسم العتبة AB قد أصبح غير محدد استاتيكياً ، أما القسم BC فقد أصبح غير مستقر هندسياً (أى يمكن أن تحدث له الإزاحات المبينة فى (الشكل ٢ — ٣٩ ، و) ، المشار إليها بالخط المنقط) .

ويبين الشكل (٢ — ٤٠ ، أ) عتبة متواصلة ، ذات طرف واحد مبيت



الشكل ٢ — ٤٠

(built - in end) . ونذكر القارىء بأن الطرف المبيت (المحشور فى الجدار مثلا) يحتوى على ثلاث نقاط ارتباط (أن الرسم التخطيطى لمثل هذا الطرف المبين أو التثبيتة المبيتة built-in fixture ، موضح فى (الشكل ٢ — ٤١) . ولذلك يصبح عدد نقاط الارتباط هنا مساوياً $C = 7$ ، أما عدد القوى الإضافية المجهولة فيساوى ما يلى :

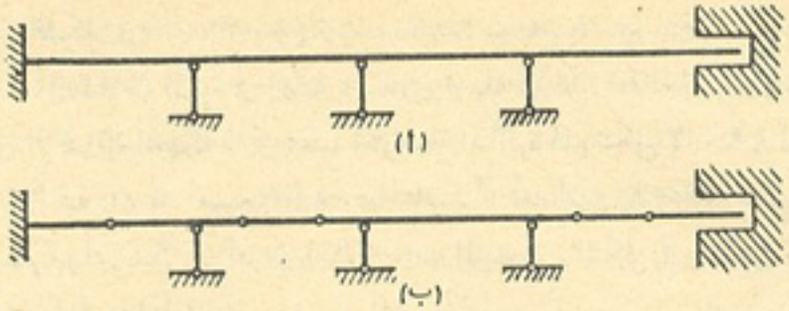


الشكل ٢ — ٤١

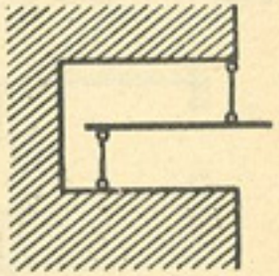
$$n = C - 3 = 4$$

إذن ، لتحويل العتبة إلى عتبه محددة استاتيكياً ، يجب أن توضع فيها أربع مفصلات (كما مبين فى الشكل ٢ — ٤٠ ، ب) .

ويبين الشكل (٢ — ٤٢ ، أ) عتبة ذات طرفين مبيتين (نهايتين مثبتتين) ، بحيث يمكن للطرف المبيت الأيمن أن ينزاح فى الاتجاه الأفقى . ويمكن التعبير تخطيطياً عن مثل هذا الطرف المبيت ، برباطين اثنين ، كما مبين فى الشكل (٢ — ٤٣) .



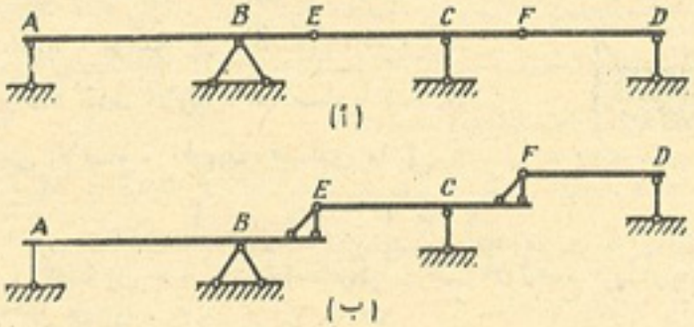
الشكل ٢ – ٤٢



الشكل ٢ – ٤٣

ويبين الشكل (٢ – ٤٢ ، أ) عدد أربطة العتبة ويساوى $C=8$ ، ولذلك فإن $n=C-3=5$. إذن لكى تصبح العتبة محددة استاتيكياً ، يجب وضع خمس مفصلات ، يجرى ترتيبها بالطريقة المبينة فى الشكل (٢ – ٤٢ ، ب)

ولحل مسألة الاستقرار الهندسى للعتبة المتعددة الأبواع ، وكذلك لتصور سلوكها عند تعرضها للأحمال ، تصوراً جيداً ، يجب وضع الرسم البيانى أو التخطيطى للفعل المتبادل لقطع العتبة المنفردة .



الشكل ٢ – ٤٤

والآن لنتأكد هل إن العتبة المبينة فى الشكل (٢ – ٤٤ ، أ) مستقرة أم لا . إن الرسم التخطيطى للفعل المتبادل لقطع هذه العتبة ، مبين فى الشكل ٢ – ٤٤ ، ب) . وقد استبدلت المفصلات المتوسطة ، فى الرسم التخطيطى ، بمساند مفصلية ثابتة ،

تربط بين اجزاء أو أقسام العتبة المنفردة . ويتضح من الرسم التخطيطى ، بأن العتبة مستقرة هندسياً ، وذلك لأنها تمثل عدداً من العتبات الثنائية الباع ، مربوطة أو مثبتة فى الأرض أو فى أية إنشاءات مستقرة هندسياً ، بواسطة ثلاثة قضبان ، لا تتقاطع محاورها فى نقطة واحدة .

وبالفعل ، نجد بأن العتبة ABE مثبتة فى الأرض بواسطة ثلاثة قضبان ساندة فهى إذن تعتبر ، عتبة مستقرة هندسياً . أما العتبة الواقعة فوقها (فى الرسم التخطيطى) ، وهى العتبة ECF ، فقد ثبتت من أحد طرفيها ، فى العتبة المستقرة هندسياً ABE ، بواسطة قضيبين ، وتستند فى النقطة C ، على قضيب ساند رأسى يربطها مع الأرض مباشرة .

إن مثل هذا الرباط ، يجعل العتبة ثابتة أو مستقرة تماماً . والعتبة الواقعة فوقها ، وهى العتبة FD ، مثبتة أو مربوطة بنفس الطريقة بالضبط .

ونستطيع أن نستنتج من الرسوم التخطيطية المبينة أعلاه ، القواعد التالية لوضع وترتيب المفصلات ، بالنسبة للعتبات التى لا تحتوى على أطراف مبيتة (مثبتة فى الجدران) :

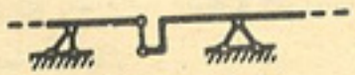
١ – يمكن فى كل باع من الأبواع ، وضع مالا يزيد على مفصلتين فقط ،

٢ – يجب أن لا تكون هناك أية مفصلات فى الباع المجاور لباع آخر يحتوى على مفصلات ، أى أن يكون أحد الأبواع محتوياً على مفصلات ، والباع الذى يليه خالياً منها ، وهكذا بالدور ،

٣ – يمكن أن تتوالى الأبواع المحتوية على مفصلة واحدة فقط ، أى يمكن أن تتجاور مع بعضها البعض على التوالى (ابتداء من الباع الثانى) .

لقد بحثنا حتى الآن ، الحالات التى تكون فيها جميع المساند ، ما عدا مسند واحد ، قابلة للحركة فى الاتجاه الأفقى . أما الآن فنأتى إلى بحث أشكال الرسوم التخطيطية ، التى سنحصل عليها ، وإذا احتوت العتبة على مسندين (أو أكثر) غير متحركين فى الاتجاه الأفقى . فى هذه الحالة ، لا يمكن تحويل العتبة المتواصلة إلى عتبة مستقرة هندسياً ، محددة استاتيكياً . وللقيام بذلك ، يجب ان نضع أيضاً ،

ما يسمى بالمفصلات المتنقلة (mobile hinges) ، التى تسمح لأقسام العتبة المربوطة ، بالحركة المتبادلة فى الاتجاه الأفقى . ويبين الشكل (٢ — ٤٥) الرسم التخطيطى



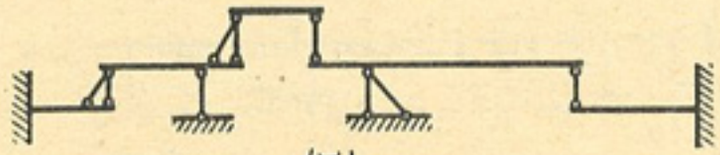
الشكل ٢ — ٤٥

للمفصلة المتنقلة . ويبين الشكل (٢ — ٤٦ ، أ) مثالا للعتبة المحددة استاتيكيًّا ، التى تحتوى على ثلاثة مساند ، غير قابلة للحركة فى الاتجاه الأفقى ، مع وجود مفصلتين متنقلتين . والرسم التخطيطى للفعل المتبادل ، لقطع هذه العتبة ، مبين فى الشكل (٢ — ٤٦ ، ب) .

ونقترح على القارىء ، أن يحدد العلاقة بين عدد المساند ، غير المتحركة فى الاتجاه الأفقى ، وبين عدد المفصلات المتنقلة .

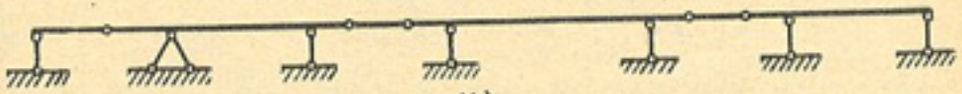
ويبين الشكلان (٢ — ٤٧ ، أ) و (٢ — ٤٨ ، أ) العتبات المتعدده

(أ)

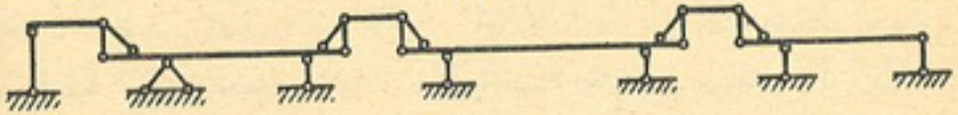


(ب)

الشكل ٢ — ٤٦

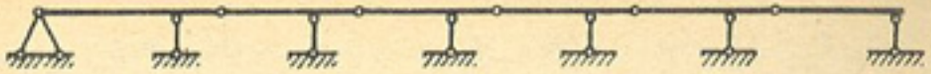


(أ)

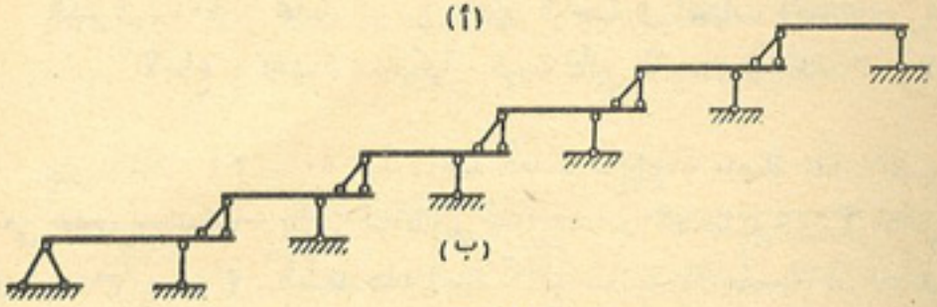


(ب)

الشكل ٢ — ٤٧

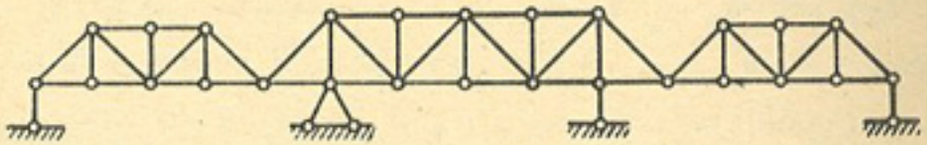


(أ)



(ب)

الشكل ٢ — ٤٨



الشكل ٢ — ٤٩

الأبواع ، المتصلة بمفصلات ، وتعتبر من أكثر أنواع العتبات إستخداماً فى الإنشاءات .

إن العتبة الأولى من هذه العتبات (شكل ٢ — ٤٧ ، أ) ، تتميز بتوالى الأبواع التى تحتوى على مفصلتين ، والأبواع الخالية من المفصلات . وتتألف هذه العتبة ، من عدد من العتبات الثنائية الكابول ، تستند على أطرافها عتبات بسيطة معلقة (شكل ٢ — ٤٧ ، ب) . وتتميز العتبة الثانية (شكل ٢ — ٤٨ ، أ) بوجود مفصلة واصلة فى كل باع من الأبواع ، باستثناء الباع الطرفى وحده . ويبين الشكل (٢ — ٤٨ ، ب) الرسم التخطيطى للفعل المتبادل لقطع هذه العتبة .

ونلاحظ هنا ، بأن التأثير المفيد للكوابيل (cantilivers) ، يستخدم ليس فى العتبات المصمتة المقطع فقط ، بل وكذلك فى العتبات (الانشاءات) التشابكية ، مثل الجمالون المتعدد الأبواع ، المبين فى الشكل (٢ — ٤٩) . ويمكن إيجاد ردود فعل المساند ، فى مثل هذا الجمالون ، بنفس الطرق المتبعة بالنسبة للعتبة المتعددة الأبواع ، المتصلة بمفصلات .

البند ٢ — ١٠ : تحديد العزوم والقوى الناجمة فى العتبات المتعددة الأبواع ، المحددة استاتيكياً ، نتيجة لتأثير الأحمال الساكنة

يبين الشكل (٢ — ٥٠ ، أ) عتبة متعددة الأبواع ، متصلة بمفصلات ، وهى محددة استاتيكياً . والرسم التخطيطى للفعل المتبادل لقطعها ، مبين فى الشكل (٢ — ٥٠ ، ب) . سنأخذ هذه العتبة كمثال ، ونبين طريقة حساب العتبات المتعددة الأبواع ، المتصلة بمفصلات .

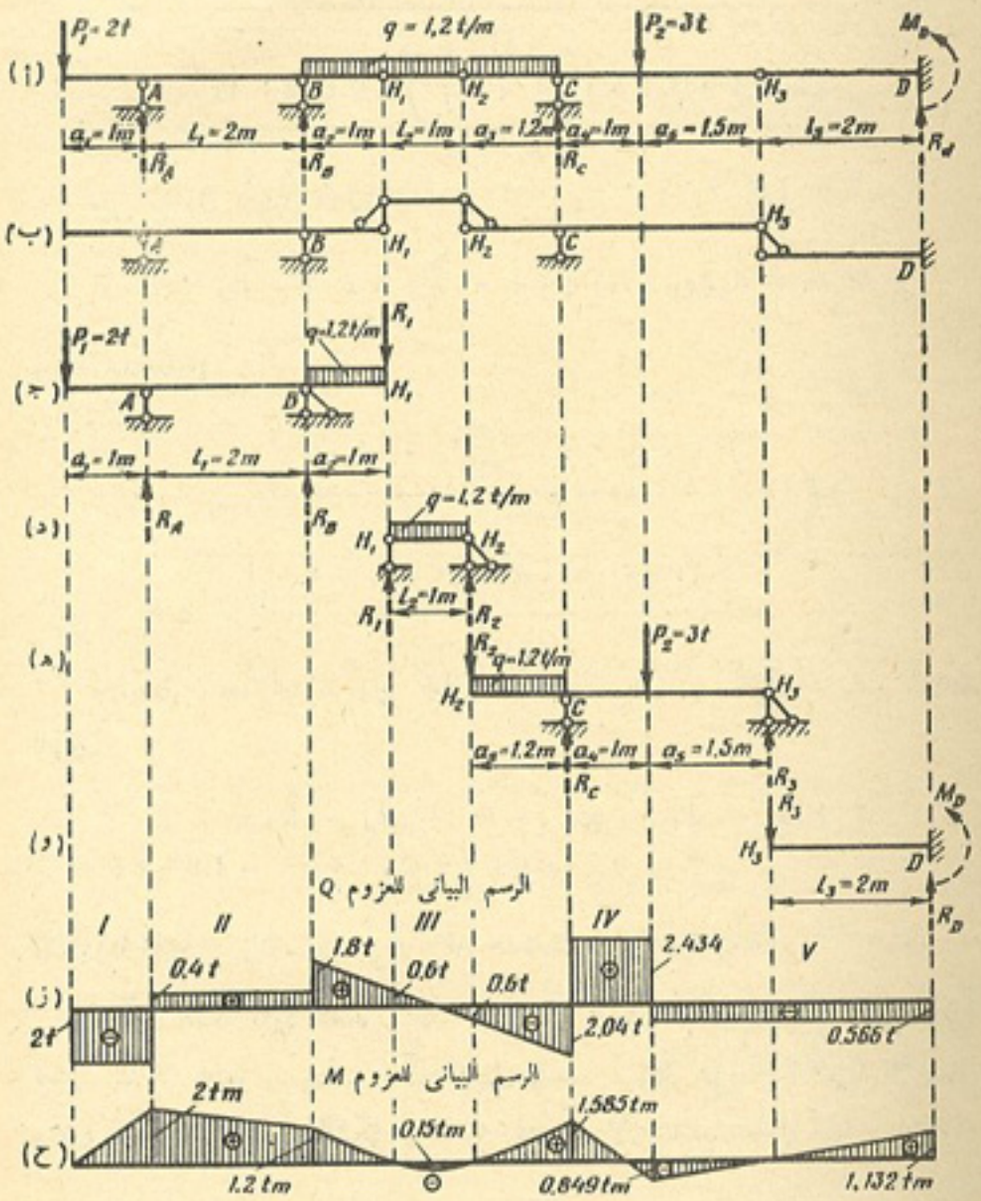
إن ردود فعل مساند هذه العتبة ، وهى R_A, R_B, R_C, R_D تعتبر موجبة ، عندما تؤثر فى العتبة من الأسفل إلى الأعلى ، أما القوى R_1, R_2, R_3 (الناشئة فى المفصلات H_1, H_2, H_3 على التوالى) ، نتيجة لتبادل الفعل الخاص بمختلف قطع العتبة ، فسوف تعتبر موجبة (لاحظ الشكل ٢ — ٥٠ ، ب) عندما تولد القطعة العليا للعتبة ، ضغطاً سفلياً على القطعة التى تحتها ، وتولد القطعة السفلى ضغطاً علوياً على القطعة التى فوقها . ويبين الشكل (٢ — ٥٠ ، ج ، د ، هـ ، و) قطع العتبة المذكورة على انفراد ، وكذلك الأحمال المؤثرة عليها . وتبدو ردود فعل المساند B_A, R_B, R_C, R_D وكذلك القوى R_1, R_2, R_3 فى هذه الأشكال ، وهى موجبة العلامة .

والآن نبدأ الحساب بتحديد ردود فعل المساند R_1, R_2 لأعلى قطعة فى العتبة المذكورة (أنظر الشكل ٢ — ٥٠ ، ب) ، وهى القطعة H_1H_2 ، التى تعتبر بمثابة عتبة بسيطة باعها يساوى $l_2 = 1m$ ، أى متراً واحداً . ويؤثر على هذه القطعة ، حمل موزع بانتظام ، شدته تساوى $q = 1,2\ t/m$ (أى ١,٢ طن /م) ، وتؤثر عليها كذلك القوتان R_1, R_2 (راجع الشكل ٢—٥٠ ، د) ، اللتان تساويان ما يلى :

$$R_1 = R_2 = \frac{ql^2}{2} = \frac{1.2 \times 1}{2} = 0.6\ t$$

ثم نحدد الآن ردود فعل مساند القطعة ABH_1 ، الواقعة تحت القطعة H_1H_2

(شكل ٢ — ٥٠ ، ب) ، وتعتبر بمثابة عتبة بسيطة ، ذات كابولين . وتؤثر على هذه العتبة ، الأحمال وردود الفعل المبينة فى الشكل (٢ — ٥٠ ، ج) . نضع معادلة التوازن التالية :



الشكل ٢ — ٥٠

$$\Sigma M_A = -P_1 a_1 + q a_2 \left(l_1 + \frac{a_2}{2}\right) + R_1 (l_1 + a_2) - R_B l_1 = 0$$

ومنها نجد ما يلى :

$$R_B = \frac{-P_1 a_1 + q a_2 \left(l_1 + \frac{a_2}{2}\right) + R_1 (l_1 + a_2)}{l_1} =$$

$$= \frac{-2 \times 1 + 1.2 \times 1\left(2 + \frac{1}{2}\right) + 0.6 (2 + 1)}{2} = 1.4 \text{ t}$$

ومن معادلة التوازن التالية :

$$\Sigma M_B = -P_1 (a_1 + l_1) + q a_2 \times \frac{a_2}{2} + R_1 a_2 + R_A \times l_1 = 0$$

ومنها نجد ما يلى :

$$R_A = \frac{P_1 (a_1 + l_1) - \frac{q a_2}{2} - R_1 a_2}{l_1} =$$

$$= \frac{2 (1+2) - 1.2 \times \frac{1^2}{2} - 0.6 \times 1}{2} = 2.4\text{t}$$

ولمراجعة صحة تحديد ردود فعل المساند R_A و R_B ، نضع معادلة التوازن :

$$\Sigma Y = -P_1 - q a_2 - R_1 + R_A + R_B =$$
$$= -2 - 1.2 \times 1 - 0.6 + 2.4 + 1.4 = -3.8 + 3.8 = 0$$

إذن ردود الفعل R_A و R_B قد حددت بصورة صحيحة .

والآن نحدد ردود الفعل R_C و R_3 للقطعة H_2CH_3 من العتبة والتى تعتبر بمثابة عتبة بسيطة ذات كابول واحد . وتؤثر على هذه العتبة الأحمال وردود الفعل ، المبينة فى الشكل (٢ — ٥٠ ، هـ). نضع معادلة التوازن التالية :

$$\Sigma M_C = -R_2 a_3 - q a_3 \times \frac{a_3}{2} + P_2 a_4 - R_3 (a_4 + a_5) = 0$$

ومنها ينتج ما يلى :

$$R_3 = \frac{-R_2 a_3 - \frac{q a_3^2}{2} + P_2 a_4}{a_4 + a_5} =$$

$$= \frac{-0.6 \times 1.2 - 1.2 \times \frac{1.2^2}{2} + 3.1}{1 + 1.5} = 0.566 \text{ t}$$

ومن معادلة التوازن التالية :

$$\Sigma M_3 = -R_2 (a_3 + a_4 + a_5) - q a_3 \left(\frac{a_3}{2} + a_4 + a_5\right) - P_2 a_5 +$$
$$+ R_C (a_4 + a_5) = 0$$

ينتج ما يلى :

$$R_C = \frac{R_2 (a_3 + a_4 + a_5) + q a_3 \left(\frac{a_3}{2} + a_4 + a_5\right) + P_2 a_5}{a_4 + a_5} =$$

$$= \frac{0.6(1.2 + 1 + 1.5) + 1.2 \times 1.2 \left(\frac{1.2}{2} + 1 + 1.5\right) + 3 \times 1.5}{1 + 1.5} =$$
$$= 4.474 \text{ t}$$

وللتأكد من صحة تحديد ردود فعل المساند R_C و R_3 ، نضع معادلة التوازن التالية :

$$\Sigma Y = -R_2 - q a_3 - P_2 + R_C + R_3 = -0.6 - 1.2 \times 1.2 - 3 +$$
$$+ 0.566 + 4.474 = -5.04 + 5.04 = 0$$

إذن ، تم تحديد ردود الفعل R_C و R_3 بصورة صحيحة تماماً .

ونحدد الآن ردود فعل القطعة H_3D من العتبة ، وهى تمثل الكابول، الذى تؤثر على طرفه الطليق ، القوة R_3 (لاحظ الشكل ٢ — ٥٠ ، و) .

نضع معادلة التوازن التالية :

$$\Sigma M_D = -R_3 \times l_3 - M_D = 0$$

ومنها ينتج ما يلى :

$$M_D = -R_3 \times l_3 = -0.566 \times 2 = -1.132 \text{ t/m}$$

وتشير العلامة السالبة هنا ، إلى أن الاتجاه الفعلى لعزم المسند M_D هو عكس الاتجاه المبين فى الشكل (٢ — ٥٠ ، و) :

ومن معادلة التوازن التالية :

$$\Sigma Y = -R_3 + R_D = 0$$

ينتج ما يلى :

$$R_D = R_3 = 0.566t$$

وبعد تحديد جميع ردود فعل المساند ، والضغوط (المتولدة فى المفصلات) الناجمة عن تأثير القطع المنفردة للعتبة على بعضها البعض ، ننتقل إلى تحديد قوى القص Q وعزوم الانحناء M ، المؤثرة فى المقاطع العرضية للعتبة ، ونخطط الرسوم البيانية لهذه القوى والعزوم . ويمكننا إجراء هذا الحساب ، باتباع الطريقتين التاليتين :

١ — تحديد قوى القص Q وعزوم الانحناء M المؤثرة فى المقاطع العرضية للعتبة المتعددة الأبواع ، المتصلة بمفصلات (شكل ٢ — ٥٠ ، أ) الناجمة عن تأثير الأحمال المعينة وردود الفعل التى استخرجنا قيمها ، وذلك بنفس الطريقة المتبعة بالنسبة للعتبات العادية ، المحددة استاتيكياً (غير المتعددة الأبواع ، المتصلة بمفصلات) . وفى هذه الحالة ، لا تؤخذ فى الاعتبار * ، المفصلات المتوسطة للعتبة ، والضغوط المتولدة فى المفصلات ، نتيجة لضغط بعض قطع العتبة المنفردة ، على البعض الآخر ، ولكن عزوم الانحناء ، المتولدة فى تلك المقاطع العرضية من العتبة ، التى توجد فيها المفصلات ، يجب أن تكون مساوية للصفر . وتبعاً لقيم (أو صيغ) قوة القص Q وعزم الانحناء M ، يتم تخطيط الرسوم البيانية المناظرة .

٢ — تحديد قوى القص Q وعزوم الانحناء M ، فى كل قطعة من قطع العتبة المتعددة الأبواع (شكل ٢ — ٥٠ ، جـ د ، هـ ، و) وتخطيط الرسوم البيانية لـ Q و M لكل قطعة من هذه القطع . وهذه الرسوم البيانية ، تمثل الرسوم البيانية لقوة القص Q وعزم الانحناء M للعتبة المتعددة الأبواع بأجمعها .

* وذلك لأنها قد أخذت فى الاعتبار ، عند حساب قيم ردود فعل المساند .

إن الطريقة الأولى ، هى أكثر ملائمة ، فى حالة العتبة المتعددة الأبواع ، المتصلة بمفصلات ، المؤلفة من عدد قليل من القطع (عتبات منفردة) ، أما الطريقة الثانية ، فتكون ملائمة فى حالة العتبة المتعددة الأبواع ، المؤلفة من عدد كبير من القطع .

إن الرسم البيانى لقوى القص ، يخطط باتباع الطريقة الأولى : وتتألف العتبة التى نبحثها فى هذه الحالة من خمسة أقسام ، تتميز باختلاف صيغ القوى الداخلية فى مقاطعها العرضية (عند تحديد عدد أقسام العتبة ، لا تؤخذ المفصلات المتوسطة فى الاعتبار) . وقد أشير إلى هذه الأقسام ، كتابة بالأرقام الرومانية فى الشكل (٢ — ٥٠ ، ز) . ونرمز بالحرف x ، إلى المسافة من النهاية اليسرى للعتبة ، إلى المقطع العرضى الذى يجرى بحثه . ثم نضع معادلة (صيغة) قوى القص لكل قسم من أقسام العتبة على انفراد :

للقسم الأول :

$$(0 \leqslant x \leqslant 1\ \text{m}) : Q^{I} = \Sigma_L Y = -P_1 = -2\ \text{t}$$

للقسم الثانى :

$$(1\ \text{m} \leqslant x \leqslant 3\text{m}) : Q^{II} = \Sigma_L Y = -P_1 + R_A = -2 + 2.4 = 0.4\ \text{t}$$

للقسم الثالث :

$$(3\ \text{m} \leqslant x \leqslant 6.2\text{m}) : Q^{III} = \Sigma_L Y = -P_1 + R_A + R_B - q(x-3) = -2 + 2.4 + 1.4 - 1.2\ (x-3) = 5.4 - 1.2\ x$$

للقسم الرابع :

$$(6.2\text{m} \leqslant x \leqslant 7.2\text{m}) : Q^{IV} = -\Sigma_R Y = -R_D + P_2 = -0.566 + 3 = 2.434\ \text{t}$$

للقسم الخامس :

$$(7.2 \leqslant x \leqslant 10.7\text{m}) : Q^{V} = -\Sigma_R Y = -R_D = -0.566\text{t}$$

وبموجب الصيغ التى حصلنا عليها لكافة قوى القص (للأقسام الخمسة جميعها) ، نخطط الرسم البيانى لقوى القص المذكورة (شكل ٢ — ٥٠ ، ز) .

ولإيضاح الطريقة الثانية لتحديد القوى الداخلية ، وتخطيط الرسوم البيانية ، نبدأ بتخطيط الرسم البيانى لعزوم الانحناء ، باتباع هذه الطريقة : نخطط الرسم البيانى للعزوم للقطعة ABH_1 ، بتأثير القوة $P_1 = 2t$ ، وردود فعل المساند $R_A = 2,4\ t$ ، $R_B = 1,4t$ والحمل الموزع بانتظام $q = 1.2\ t/m$ ، والقوة $R_1 = 0.6t$ (لاحظ الشكل ٢ — ٥٠ ، ج) . إن الرسم البيانى للعزوم ، على امتداد الكابول الأيسر ، الذى طوله يساوى $a_1 = 1m$ ، وفى باع القطعة الذى يساوى $l_1 = 2\ m$ ، سيكون عبارة عن خط مستقيم ، وذلك لأن العتبة ، فى هذه الأقسام ، غير معرضة لتأثير الحمل الموزع بانتظام . وعزم الانحناء عند طرف العتبة الأيسر ، يساوى صفراً ، وفوق المسند A ، نجد بأن عزم الانحناء يساوى :

$$- P_1\ a_1 = - 2.1 = - 2\ t/m$$

وفوق المسند B ، يساوى :

$$- P_1(a_1+l_1) + R_A l_1 = - 2\ (1+2) + 2.4\times 2 = - 1.2\ t/m$$

ويكون الرسم البيانى M للعزوم ، فى القسم BH_1 (الكابول الأيمن) على هيئة منحنى (وذلك لأن هذا القسم معرض لتأثير الحمل الموزع بانتظام) محدب إلى الأسفل (وذلك لأن الحمل الموزع ، متجه إلى الأسفل) . وعزم الانحناء ، عند الطرف الأيمن للقطعة ABH_1 (فى النقطة H_1) يساوى صفراً . وباستخدام هذه النتائج التى حصلنا عليها ، نخطط الرسم البيانى للعزم M ، فى أقسام القطعة ABH_1 (شكل ٢ — ٥٠ ، ح) .

وبنفس الطريقة ، يخطط الرسم البيانى M ، للقطعة H_2CH_3 أيضاً (شكل ٢ — ٥٠ ، هـ) . وفى النقطتين H_2 ، H_3 (عند طرفى العتبة) نجد بأن عزوم الانحناء تساوى صفراً . وعزم الانحناء الناجم عن تأثير الحمل P_2 ، يساوى ما يلى :

$$R_3 \times a_5 = 0.566 \times 1.5 = 0.849\ t/m$$

وعزم الانحناء ، فوق المسند C يساوى :

$$R_3(a_5+a_4) - P_2 a_4 = 0.566\ (1.5+1) - 3\times 1 = - 1.585\ t/m$$

وفى باع القطعة H_2CH_3 الذى يبلغ طول ($a_4 + a_5$) ، يكون الرسم البيانى للعزوم ، على هيئة مستقيمات ، أما فى الكابول الأيسر ، فيكون على هيئة منحنى محدب إلى الأسفل : وقد استخدمت هذه المعطيات لتخطيط الرسم البيانى للعزوم فى أقسام القطعة H_2CH_3 (شكل ٢ — ٥٠ ، ح) .

وسوف يكون الرسم البيانى للعزم M ، للقطعة H_1H_2 ، على هيئة قطع مكافىء مخروطى ، كما هو عليه فى العتبة البسيطة ، المحملة بحمل موزع بانتظام (شكل ٢ — ٥٠ ، هـ) . وقيمة الإحداثى الرأسى اكبر لهذا القطع المكافىء ، تساوى ما يلى :

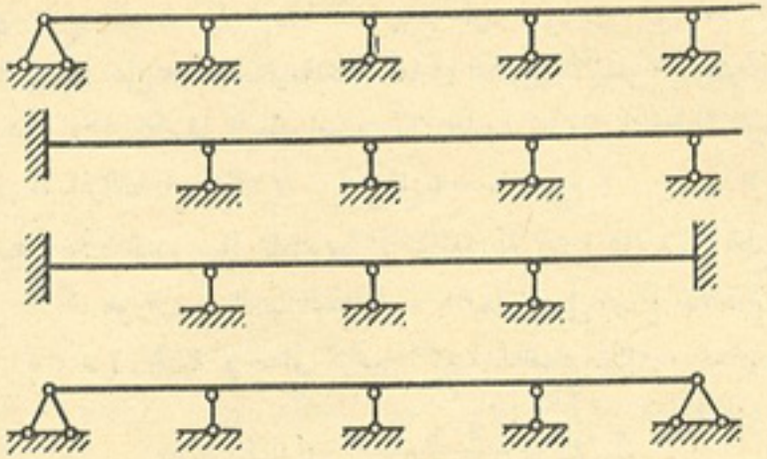
$$\frac{q\ l_2^2}{8} = \frac{1.2 \times 1^2}{8} = 0.15\ t/m$$

أما الرسم البيانى للعزم M ، للقطعة H_3D (شكل ٢ — ٥٠ ، و) فسيكون على هيئة خط مستقيم ، وعزم الانحناء فى النقطة H_3 يساوى صفراً ، أما فى النقطة D ، فيساوى $M_D = - 1.132m$. وتستخدم هذه المعطيات لتخطيط الرسم البيانى للعزم M ، للقسمين H_1H_2 ، H_3D (شكل ٢ — ٥٠ ، ح) .

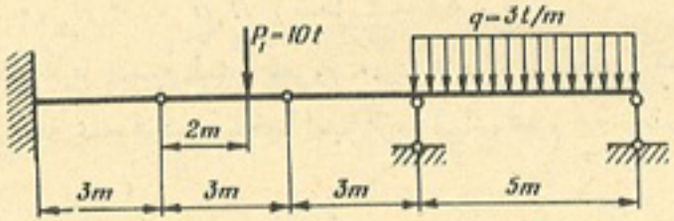
ونتيجة لتخطيط الرسوم البيانية للعزوم M ، للأقسام المنفردة من العتبة المتعددة الأبواع ، المتصلة بمفصلات ، يتكون لدينا الرسم البيانى للعزم M ، للعتبة بأجمعها (شكل ٢ — ٥٠ ، ح) .

وننصح القارئ أن يتأكد بنفسه ، من أن الرسوم البيانية للعزوم M وقوى القص Q (شكل ٢ — ٥٠ ، ز ، ح) ، المخططة للعتبة المتعددة الأبواع ، المتصلة بمفصلات ، تتفق مع العلاقات أو الصيغ المبينة فى البند (٢ — ١) .

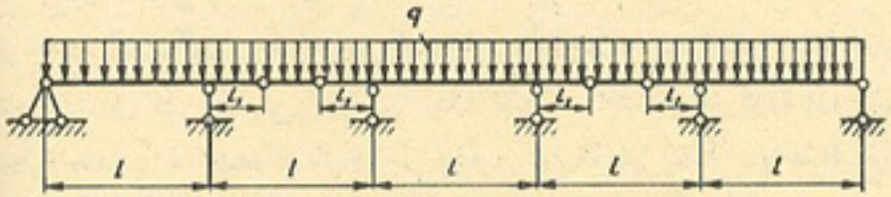
ويبين الشكل (٢ — ٥١) الرسوم التخطيطية ، لأربع عتبات متواصلة ، غير محددة استاتيكياً . ونقترح على القارىء ، أن يبين عدة أوضاع مختلفة لترتيب المفصلات فى كل عتبة من العتبات ، وذلك لتتحول العتبات المذكورة إلى عتبات مستقرة هندسياً ، محددة استاتيكياً . ونقترح على القارئ أيضاً ، وتخطيط الرسوم البيانية لقوى القص Q والعزوم M ، للعتبة المبينة فى الشكل (٢ — ٥٢) . وتحديد طول الكابول l_1 ، الذى عنده تتساوى قيم عزوم الانحناء فى أواسط الأبواع الثلاثة المتوسطة ، فى العتبة المبينة فى الشكل (٢ — ٥٣) .



شكل ٢ – ٥١



شكل ٢ – ٥٢



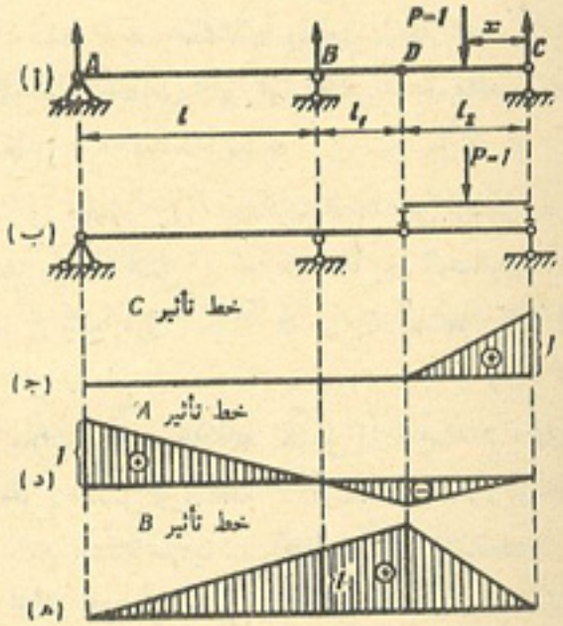
الشكل ٢ – ٥٣

البند ٢ – ١١ : خطوط تأثير القوى والعزوم فى العتبات المتعددة الأبواع والمحددة استاتيكياً

لقد برهنا فى البند (٢ – ٥) على إنه عند انتقال الأحمال عن طريق العتبات الثانوية (المدادات) ، يبقى خط التأثير المرسوم للعارضة ، مستقيما . وسوف نبين الآن ، بأن هذه الحالة تنطبق أيضاً على العتبات المتعددة الأبواع ، المحددة استاتيكياً. نبدأ ببحث عدد من الأمثلة المعينة .

لنفرض بأن المطلوب رسم خطوط تأثير ردود فعل المساند A و B و C فى العتبة AC ، المبينة فى الشكل (٢ – ٥٤ ، أ) .

إن القطعة CD من هذه العتبة ، تستند من أحد طرفيها ، على المسند المتحرك C ، وطرفها الثانى متصل مفصلياً مع الطرف D للعتبة الكابولية AD. عند وجود الحمل على العتبة CD فإن ضغطه سيتوزع على النقطتين D و C .



الشكل ٢ – ٥٤

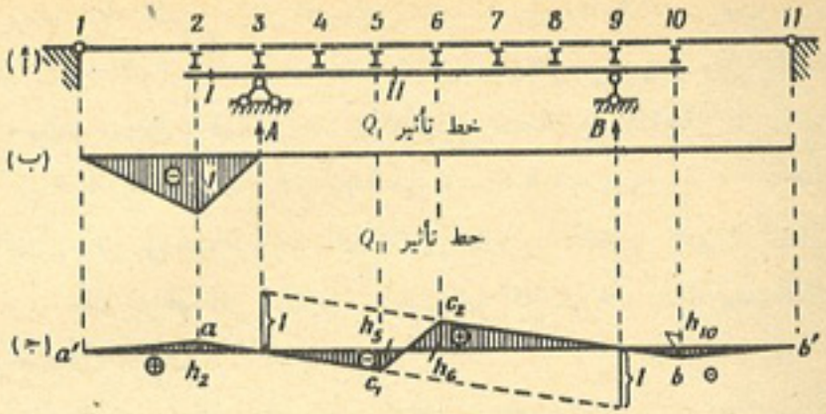
كما هى الحالة بالنسبة للعتبة البسيطة ، التى باعها يساوى l_2 . أما عند وجود الحمل على العتبة الكابولية AD ، نجد بأن الضغط لا ينتقل إلى النقطتين C و D . ولهذا السبب سوف يكون شكل خط تأثير رد الفعل C ، كما هو عليه فى الشكل (٢ — ٥٤ ، جـ) .

ونرسم الآن خط تأثير رد فعل المسند A . وهنا نلاحظ بأنه ما دام الحمل $P = 1$ ينتقل على العتبة AD ، يكون شكل خط التأثير ، كما هو عليه بالنسبة للعتبة الكابولية ، التى بحثناها سابقاً . وعندما يكون الحمل $P = 1$ واقعاً فى نقطة D ، يكون رد فعل المسند A متجهاً إلى الأسفل ، مع وصوله إلى أقصى قيمه السالبة . وعند تنقل الحمل $P = 1$ على العتبة DC ، فسوف ينتقل إلى المفصلة D ، ضغط قدرة $\frac{1 \times x}{l_2}$ ، أى نفس الضغط الذى كان سينقل إلى هذه المفصلة ، لو كان الحمل سينتقل إلى العتبة DC عن طريق المفصلات ، أى بصورة غير مباشرة (شكل ٢ — ٥٤ ، ب) . إذن سيكون خط تأثير رد فعل A ، فى العتبة DC ، وكأنه عبارة عن مستقيم للنقل .

إن خط تأثير رد فعل المسند A ، مبين فى الشكل (٢ — ٥٤ ، د) . ويبين الشكل (٢ — ٥٤ ، هـ) خط تأثير رد فعل المسند B .

ونأتى الآن إلى رسم خطوط تأثير قوة القص ، للمقطعين I و II ، من العتبة المبينة فى الشكل (٢ — ٥٥ ، أ) .

إن قوة القص فى المقطع I ، ستكون مختلفة عن الصفر ، فى حالة واحدة فقط ، هى عندما يكون الحمل $P = 1$ واقعاً بين الوصلتين 1 و 3 . وإذا كان الحمل $P = 1$ واقعاً فوق الوصلة 2 ، فإنه سينتقل كلياً إلى كابول العتبة و تكون قوة القص فى المقطع I ، مساوية لـ (1 —) . وعند تحرك الحمل إلى اليسار أو اليمين ، سوف يتناقص الضغط المنتقل إلى الوصلة 2 ، إلى أن تصل قيمته إلى الصفر ، عند وقوع الحمل فى النقطة 1 أو النقطة 3 . وبما أن الضغط المنتقل إلى النقطة 2 ، يتغير بنسبة طردية مع بعد الحمل عن النقطتين 1 أو 3 ، إذن سيكون خط التأثير المناظر ، على هيئة مثلث ، وتكون قيمة إحداثيه الرأسى الواقع تحت المقطع I ، مساوية لـ 1 (شكل ٢ — ٥٥ ، ب) .



الشكل ٢ — ٥٥

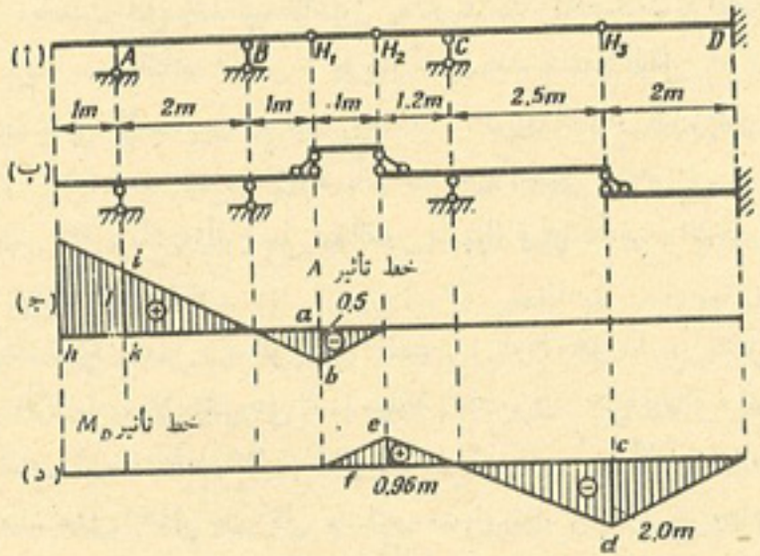
إن قوة القص فى المقطع II ، عندما يكون الحمل $P = 1$ واقعاً على القسم 5 — 2 أو 10 — 6 ، ستبقى كما هى عليه فى حالة انتقال الحمل مباشرة : وطبقاً لذلك ، نرى من الشكل (٢ — ٥٥ ، جـ) بأن الأقسام المناظرة من خط التأثير ، ممثلة بالخطين ac_1 و c_2b ، اللذين يقطعان ، على العمودين المارين فى النقطتين A و B ، قسمين مساويين للوحدة ، أى (1 +) و (1—) . ويجب أن يكون خط التأثير ، على امتداد القسم 6 — 5 ، خطاً مستقيماً أيضاً . وقد تم الحصول على إحداثيية الرأسيين h_6 و h_5 عند المفصلات (الوصلات) ، نتيجة لرسم خط التأثير السابق ، ولم يبق سوى مد مستقيم النقل $c_1 c_2$ ، الذى يصل بين قمتى الإحداثيين الناتجين . وعند الانتقال إلى العتبتين الثانويتين الطرفيتين 2 — 1 و 11 — 10 ، نلاحظ بأنه عند وجود الحمل $P = 1$ ، فى النقطة 2 أو النقطة 10 ، يكون تأثيره على قوة القص المجهولة ، محدداً بقيمة الإحداثى الرأسى h_2 أو h_{10} .

وعند وجود الحمل المذكور فى النقطة 1 أو النقطة 11 ، ينتقل الضغط كله إلى الأساس ، ولا يؤثر على العتبة مطلقاً . إذن ، فى هذه الحالة ، تتحول قيمة الإحداثيات الرأسية لخط التأثير المطلوب ، إلى الصفر . وبما أن أية قوة من القوى ، تتغير عند تحرك الحمل بين كل وصلتين متجاورتين ، تغيراً يتبع معادلة الخط المستقيم ، الواصل بين نهايتى الإحداثيين الرأسيين ، الواقعين تحت الوصلتين المذكورتين .

إذن لرسم خط تأثير Q_{II} فى القسمين 2 — 1 و 11 — 10 ، يجب وصل نقطة الصفر a' تحت الوصلة 1 ، مع قمة الإحداثى الرأسى h_2 ، وهى النقطة a ، بخط مستقيم ، ووصل قمة الإحداثى الرأسى h_{10} ، وهى النقطة b ، مع نقطة الصفر b' ، بخط مستقيم أيضاً (شكل ٢ — ٥٥ ، ج) .

والآن نأتى إلى رسم خطوط تأثير القوى والعزوم ، للعتبة المحددة استاتيكياً ، التى يزيد عدد أبواعها على الاثنين . ويجب قبل كل شىء ، وضع الرسم التخطيطى للفعل المتبادل ، لقطع هذه العتبة .

يبين الشكل (٢ — ٥٦ ، أ) عتبة ذات ثلاثة أبواع ، متصلة بمفصلات ، أما الشكل (٢ — ٥٦ ، ب) فيبين الرسم التخطيطى للفعل المتبادل ، لأقسام العتبة المذكورة . نرسم أولا خط تأثير رد فعل المسند A فى العتبة (شكل ٢ — ٥٦ ، ج). إن خط تأثير A ، فى القسم الممتد من النهاية اليسرى للعتبة ، إلى المفصلة H_1 ، يرسم بطريقة عادية — كما هى الحالة بالنسبة للعتبة البسيطة ذات الكوابيل (راجع البند ٢ — ٢) . وعندما يكون الحمل $P = 1$ ، واقعاً على القسم $H_1 H_2$ ، نجد بأن رد فعل المسند A ، يساوى حاصل ضرب الإحداثى الرأسى ab الناتج لخط التأثير ، فى مقدار ضغط القطعة $H_1 H_2$ على العتبة ABH_1 ، وهو



الشكل ٢ — ٥٦

الضغط P_1 (فى المفصلة H_1) . ويتغير الضغط P_1 ، عند تحرك الحمل على القطعة $H_1 H_2$ ، تغيراً يخضع لقانون (معادلة) الخط المستقيم . وعند وقوع الحمل فى المفصلة H_1 ، نجد بأن الضغط يساوى واحد ، وفى المفصلة H_2 ، يساوى صفراً : ولذلك فإننا نحصل على خط التأثير ، فى القسم $H_1 H_2$ ، بوصل قمة الإحداثى الرأسى ab ، فى المفصلة H_1 ، وهى نقطة b ، مع نقطة الصفر ، الواقعة تحت المفصلة H_2 . وعند تحرك الحمل على القطعتين H_2CH_3 ، H_3D ، نجد بأن الضغط P_1 يساوى صفراً *، وبالتالى تصبح الإحداثيات الرأسية لخط التأثير ، عند هذين القسمين ، مساوية للصفر أيضاً . ومن تشابه المثلثين ، نستطيع إيجاد قيم الإحداثيات الرأسية الخاصة ، لخط التأثير :

$$\frac{\overline{gh}}{\overline{ik}} = \frac{1 + 2}{2}$$

ومنها ينتج أن :

$$\overline{gh} = \overline{ik} \times \frac{3}{2} = 1 \times \frac{3}{2} = 1.5$$

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{ik}} = \frac{1}{2}$$

ومنها ينتج أن :

$$\overline{ab} = \overline{ik} \times \frac{1}{2} = 1 \times \frac{1}{2} = 0.5$$

والآن نرسم خط تأثير عزم الانحناء فى المقطع D من العتبة المذكورة (شكل ٢ — ٥٦ ، د). إن خط التأثير للقسم H_3D ، يرسم كما هى الحالة بالنسبة للعتبة ذات الطرف المبيت الواحد (راجع البند ٢ — ٤) . ثم يرسم المستقيم de من قمة الإحداثى الرأسى cd ، وهى نقطة d (بحيث يمر فى نقطة الصفر الواقعة تحت المسند C) ، لأن الضغط P_3 فى المفصلة H_3 ، على القطعة H_3D ،

* إن هذا ينجم عن شروط توازن القطعة $H_1 H_2$.

يتغير على امتداد القطعة H_2CH_3 ، تغيراً يخضع لقانون الخط المستقيم ، ويساوى صفراً ، عند وقوع الحمل فوق المسند C . ثم نوصل النقطة e لخط التأثير ، مع نقطة الصفر الواقعة تحت المفصلة H_1 . ومن تشابه المثلثين ، نستطيع إيجاد قيمة الإحداثى الرأسى ef لخط التأثير :

$$\frac{ef}{cd} = \frac{1.2}{2.5}$$

ومنها ينتج أن :

$$\overline{ef} = \overline{cd} \times \frac{1.2}{2.5} = 2 \times 0.48 = 0.96\text{m}$$

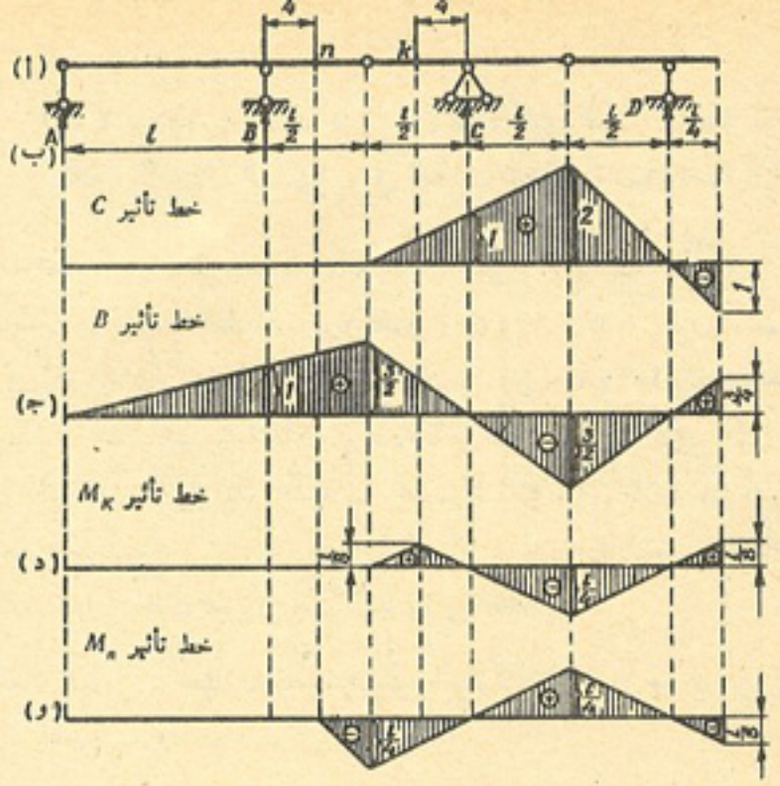
وهكذا ، نجد بأن خط تأثير أى رد فعل أو أية قوة ، فى أى مقطع عرضى من مقاطع العتبة المتعددة الأبواع ، المتصلة بمفصلات ، يرسم كما يلى :

١ — بالطريقة العادية (المتبعة بالنسبة للعتبة البسيطة) ، نستطيع رسم خط التأثير ، للقسم الأساسى من العتبة ، أى لذلك القسم الذى يقع فيه المسند المعين ، أو المقطع العرضى المعين ،

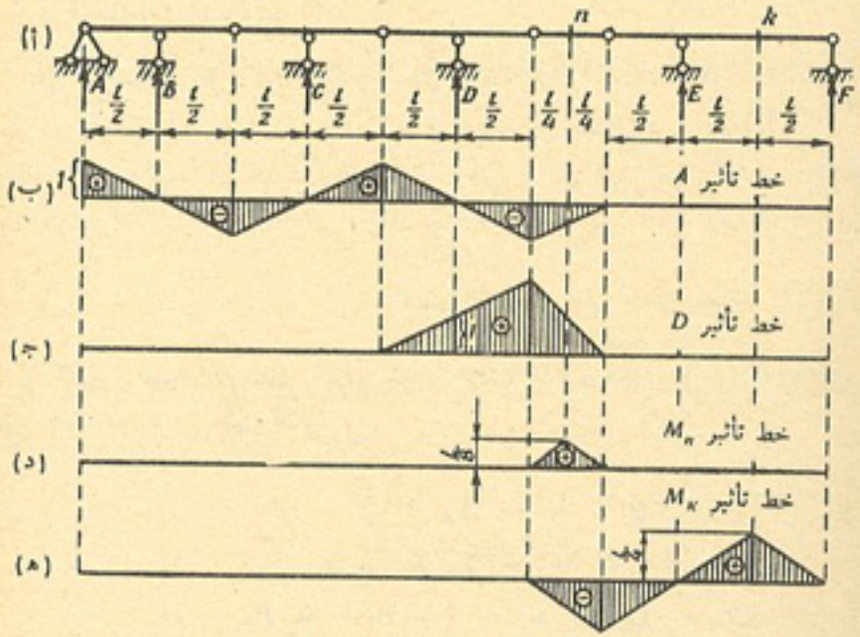
٢ — ثم توصل قمة الإحداثى الرأسى الطرفى ، التى يقع فوقها أحد مساند قطعة العتبة المجاورة (فى الرسم التخطيطى للفعل المتبادل) الواقعة إلى الأعلى بمسافة أكبر (المحمولة على القسم الأساسى) ، توصل مع نقطة الصفر الواقعة تحت المسند الآخر لهذه القطعة . وبنفس الطريقة ترسم خطوط التأثير ، لأقسام القطع التالية ، الواقعة إلى الأعلى أكثر فأكثر ،

٣ — يمكن تحديد الإحداثيات الرأسية المتميزة ، من تشابه المثلثات المحصورة بخطوط التأثير .

ونقترح على القارئ ، أن يراجع بنفسه ، صحة رسم خطوط التأثير ، المبينة فى الشكلين (٢ — ٥٧) و (٢ — ٥٨) .



الشكل ٢ — ٥٧



الشكل ٢ — ٥٨

البند ٢ — ١٢ : تحديد عزوم الانحناء وقوى القص الناجمة عن تأثير الأحمال الساكنة ، فى العتبات المحنية ، المحددة استاتيكياً

إن تحديد ردود فعل المساند ، للعتبات المحنية ، وحساب العزوم وقوى القص فى مقاطعها ، ورسم خطوط تأثير (القوى) Q و N و M ، تجرى كلها بطريقة مماثلة تماماً ، لما هى عليه فى العتبات المستقيمة . وفى هذه الحالة ، تستخدم كافة الصيغ وقواعد العلامات والعلاقات أو المعادلات المبينة فى البند (٢ — ١) : وعندما تحتوى العتبة المحنية على قطع رأسية ، يجب أن نعرف أى طرف من أطراف كل قطعة من هذه القطع ، سيعتبر واقعاً إلى اليسار ، أى طرفاً أيسر ، وتأشيره على الرسم التخطيطى بعلاقة مميزة (بوضع العلامة × مثلا) .

ونقدم فيما يلى ، أمثلة لتخطيط الرسوم البيانية للقوى Q و N و M ، فى العتبات المحنية .

مثال ١ : يطلب تخطيط الرسوم البيانية لكل من القوى Q و N و M ، فى العتبة المبينة فى الشكل (٢ — ٥٩ ، أ) .

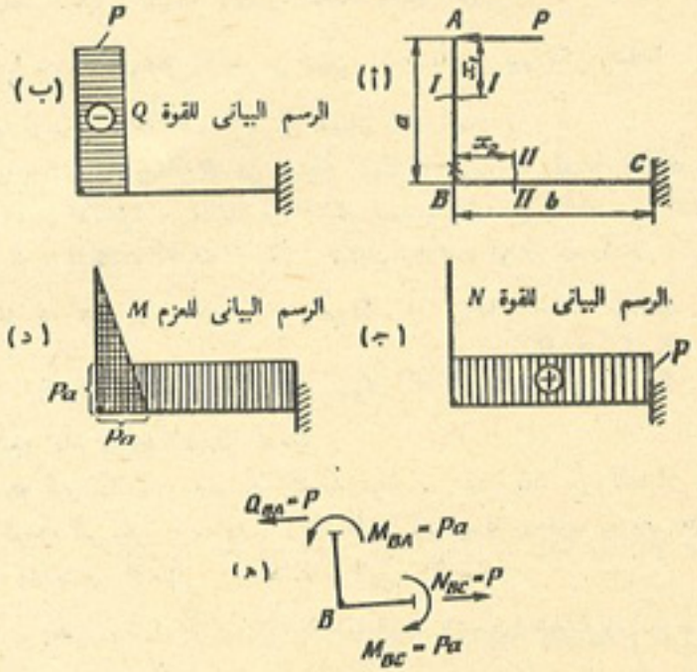
الحل : نصطلح على كون القسم السفلى للقطعة الرأسية للعتبة ، هو القسم أو الطرف الأيسر ، وبناء على ذلك نرمز إليه بعلامة × (كما مبين فى الشكل ٢ — ٥٩ ، أ) .

إن العتبة تتألف من قسمين (قطعتين) . نضع لكل قسم من القسمين ، صيغ قوى القص والقوى الطولية وعزوم الانحناء ، وذلك باستخدام الصيغتين (1—2) و (3—2) .

القسم الأول

إن القوى المؤثرة فى المقطع العرضى للقطعة الرأسية AB ، الواقع على مسافة x_1 من الطرف العلوى للقطعة ، هى القوى التالية :

$$Q' = -\Sigma_R Y = -P$$
$$N^1 = -\Sigma_R X = 0$$
$$M^I = \Sigma_R M = -(-Px_1) = Px_1$$



الشكل ٢ — ٥٩

القسم الثانى

وتؤثر القوى التالية ، فى المقطع العرضى للقطعة الافقية BC ، الواقع على مسافة x_2 من الطرف الايسر للقطعة :

$$Q^{II} = \Sigma_L Y = 0$$
$$N^{II} = \Sigma_L X = P$$
$$M^{II} = \Sigma_L M = -Pa$$

إن الرسوم البيانية Q ، N ، M ، المخططة بموجب الصيغ التى حصلنا عليها الآن ، مبينة فى الشكل (٢ — ٥٩ ، ب ، جـ ، د) .

وتجدر الإشارة هنا ، إلى ان الصيغ التى حصلنا عليها لـ M^I و Q^I لا تحقق العلاقة (2—4) الواردة فى البند (٢ — ١) ، وهى المعروفة بنظرية جورافسكى . وبالفعل نجد بأن :

$$\frac{dM^I}{dx_1} = \frac{d(Px_1)}{dx_1} = P = -Q^I$$

وليس $\frac{dM^I}{dx_1} = Q^I$ ، كما يجب أن يكون عليه الحال ، بناء على نظرية جورافسكى . أن

هذا الوضع يعتبر نتيجة لقيامنا باعتبار الاتجاه الموجب للمحور x ، فى القسم الاول ، (القطعة الأولى) من العتبة ، هو الاتجاه من اليمين إلى اليسار ، بينما تكون العلاقة $Q = \frac{dM}{dx}$ صحيحة ، عندما يكون اتجاه المحور x من اليسار إلى اليمين .

والآن نراجع توازن الوصلة B من العتبة . وللقيام بذلك ، نفصل الوصلة عن العتبة ، ونسلط عليها القوى الداخلية ، الناشئة فى المقاطع العرضية للقطعتين (القسمين) الافقية والرأسية ، قرب الوصلة B (الشكل ٢ – ٥٩ ، هـ) . نكتب معادلات توازن الوصلة B ، وهى :

$$\Sigma M_B = - M_{BA} + M_{BC} = - Pa + Pa = 0$$
$$\Sigma Y = 0$$
$$\Sigma X = - Q_{BA} + N_{BC} = - P + P = 0$$

وهكذا نجد بأن شروط التوازن تتحقق .

أن شروط التوازن ، يجب أن تتحقق عند أى عدد كان من القضبان (القطع) ، المتلاقية فى الوصلة التى يجرى بحثها . واذا أثرت فى الوصلة ، قوى وعزوم خارجية ، عندئذ يجب كذلك اخذها فى الاعتبار ، عند بحث توازن الوصلة .

مثال ٢ : يطلب تخطيط الرسوم البيانية لقوة القص Q والقوة الطولية N وعزم الانحناء M ، فى العتبة المبينة فى الشكل (٢ – ٦٠ ، أ) .

الحل : نفترض بأن الاطراف السفلى للقطعتين الرأسيتين AB و DE ، للعتبة المذكورة ، هى الأطراف اليسرى ، وتبعاً لذلك ، نضع عليها علامة + (شكل ٢ – ٦٠ ، أ) . أن العتبة هنا ، تتألف من أربع قطع (أربعة أقسام) . والآن نضع لكل قسم من الاقسام المذكورة ، صيغ قوى القص والقوى الطولية وعزوم الانحناء ، الخاصة بها ، وذلك باستخدام الصيغتين (1 –2) و (2—3) :

القسم الأول

$$Q^I = \Sigma_L Y = qx_1$$
$$N^I = \Sigma_L X = 0$$
$$M^I = \Sigma_L M = dx_1 \frac{x_1}{2} = \frac{qx_1^2}{2}$$

القسم الثانى II

$$Q^{II} = - \Sigma_R Y = 0$$
$$N^{II} = - \Sigma_R X = - q a$$
$$M_{II} = - \Sigma_R M = - \frac{qa^2}{2}$$

القسم الثالث

$$Q^{III} = - \Sigma_R Y = P = qa$$
$$N^{III} = - \Sigma_R X = - qa$$
$$M^{III} = - \Sigma_R M = - \frac{qa^2}{2} - P(x_3 - a) = - \frac{qa^2}{2} - qa\,(x_3 - a) = qa\left(\frac{a}{2} - x_3\right)$$

القسم الرابع

$$Q^{IV} = - \Sigma_R Y = - qa$$
$$N^{IV} = - \Sigma_R X = - P - qa$$
$$M^{IV} = - \Sigma_R M = qa\left(x_4 - \frac{a}{2}\right) - Pa + M = qa\left(x_4 - \frac{a}{2}\right) - qa^2 + qa^2 = qa\left(x_4 - \frac{a}{2}\right)$$

أن الرسوم البيانية المخططة طبقاً للمعادلات الموضوعة أعلاه ، موضحة فى الشكل (٢ – ٦٠ ، ب ، ج ، د) . ويبين الشكل (٢ – ٦٠ ، هـ) الوصلة B المفصولة من العتبة ، مع القوى والعزوم المؤثرة فيها . وليس من الصعب التأكد من أن شروط توازن هذه الوصلة تتحقق ، وذلك لأن :

$$\Sigma M_B = -qa^2 - \frac{qa^2}{2} + \frac{3}{2} qa^2 = 0$$
$$\Sigma X = + qa - qa = 0$$
$$\Sigma Y = qa - qa = 0$$

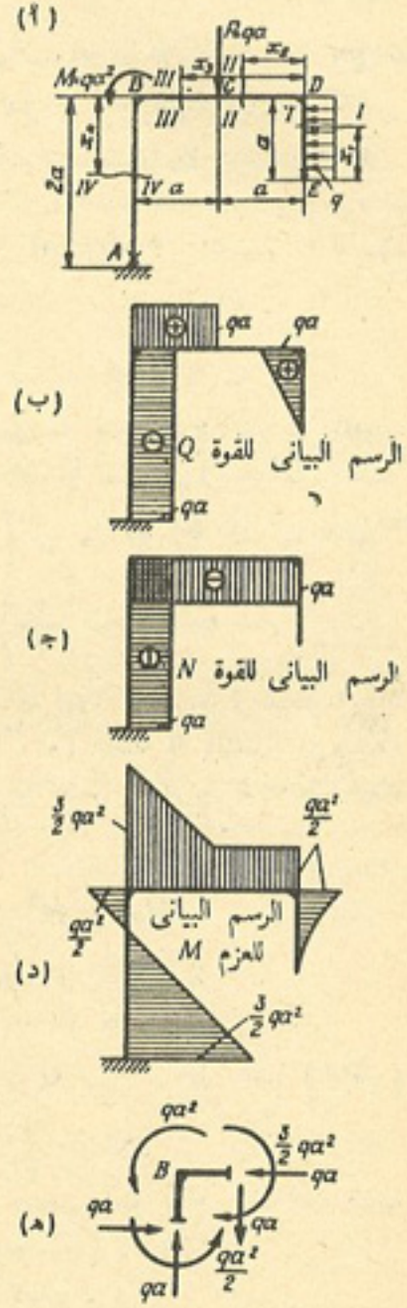
مثال ٣ : يطلب تخطيط الرسوم البيانية لكل من Q و N و M للعتبة (الاطار) المبينة فى الشكل(٢ – ٦١ ، أ) .

الحل : نفرض بأن المساند غير موجودة ، ونعوض عنها بتأثير ردود الفعل التالية R_A ، R_B H_B فى العتبة ، وهى مبينة فى الشكل (٢ – ٦١ ، أ) .

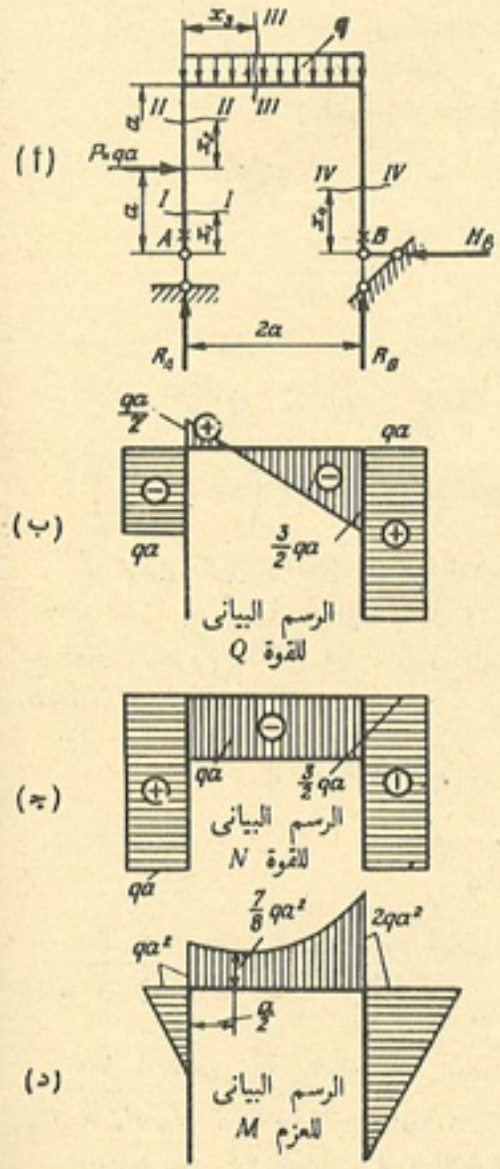
ولتحديد ردود فعل المساند ، نضع ثلاث معادلات للتوازن ، هى :

الأول :

$$\Sigma M_B = R_A \times 2a + P \times a - q \times 2a \times a = 0$$



الشكل ٢ – ٦٠



الشكل ٢–٦١

ومنها ينتج ما يلى (بعد اعتبار أن $P = qa$) :

$$R_A = \frac{2\,qa^2 - qa^2}{2a} = \frac{qa}{2}$$

والثانية :

$$\Sigma M_A = -R_B \times 2a + q \times 2a \times a + Pa = 0$$

ومنها ينتج ما يلى :

$$R_B = \frac{2\,qa^2 + qa^2}{2a} = \frac{3}{2}\,qa$$

والثالثة :

$$\Sigma X = P - H_B = 0$$

ومنها ينتج ما يلى :

$$H_B = P = qa$$

وفى الشكل (٢ – ٦١ ، أ) نرى بأن الأطراف السفلى للقطع الرأسية من العتبة ، تحمل علامة (×) ، وهى الاطراف التى اعتبرت يسارية .

أن العتبة تتألف من أربعة اقسام . نضع لكل قسم من الأقسام الأربعة ، معادلات أو صيغ قوى القص والقوى الطولية وعزوم الإنحناء ، الخاصة به .

القسم الأول

$$Q^I = 0; \qquad N^I = -R_A = -\frac{qa}{2}; \qquad M^I = 0$$

القسم الثانى

$$Q^{II} = -P = -qa; \qquad N^{II} = -R_A = -\frac{qa}{2};$$

$$M^{II} = -Px_2 = -qax_2$$

وعندما تكون $x_2 = 0$ نجد بأن : $M^{II} = 0$

وعندما تكون $x_2 = a$ نجد بأن : $M^{II} = -qa^2$

القسم الثالث

$$Q^{III} = R_A - qx_3 = q\left(\frac{a}{2} - x_3\right)$$

$$N^{III} = -P = -qa$$

$$M^{III} = R_A\, x_3 - Pa - \frac{qx_3^2}{2} = q\left(\frac{a}{2}\, x_3 - a^2 - \frac{x_3^2}{2}\right)$$

وعندما تكون $x_3 = 0$ نجد بأن $Q^{III} = \frac{qa}{2}$ و $M^{III} = -qa^2$

وعندما تكون $x_3 = a$ نجد بأن $Q^{III} = -\frac{qa}{2}$ و $M^{III} = -qa^2$

وعندما تكون $x_3 = 2a$ نجد بأن $Q^{III} = -\frac{3}{2}qa$ و $M^{III} = -2qa^2$

إن قوة القص $Q^{III} = q\left(\frac{a}{2} - x_3\right)$ تساوى صفراً عندما تكون $x_3 = \frac{a}{2}$.

إذن تكون لعزم الإنحناء فى هذا المقطع ، قيمة حدية (صغرى أو كبرى)، عند $x_3 = \frac{a}{2}$، ونجد بان العزم يساوى :

$$M^{III} = q\left(\frac{a_2}{4} - a^2 - \frac{a^2}{8}\right) = -\frac{7}{8}qa^2$$

القسم الرابع

$$Q^{IV} = H_B = qa; \qquad N^{IV} = -R_B = -\frac{3}{2}qa$$

$$M^{IV} = H_B x_4 = qax_4$$

عند $x_4 = 0$ نجد بأن $M^{IV} = 0$

وعند $x_4 = 2a$ نجد بأن $M^{IV} = 2qa^2$

والرسوم البيانية لكل من Q و N و M ، موضحة فى الشكل (٢-٦١ ، ب ، جـ ، د)

مثال ٤ : يطلب تخطيط الرسوم البيانية لكل من Q و N و M ، للعتبة المبينة فى الشكل (٢ - ٦٢ ، أ) .

الحل : يمكن الاستعاضة عن الحمل المائل P ، بمركبته الأفقية P_x ومركبته

الرأسية P_y ، كما يلى :

$$P_x = P_y = P \times \cos 45^\circ = 0.707P$$

ومن ردود فعل المساند R_A ، R_B ، H_B نحدد رد الفعل R_A فقط ، الذى يعتبر كافيا لتخطيط الرسوم البيانية .

$$\Sigma M_B = R_A \times 2l + P_y \times 1.707l + P_x \times 0.707l = 0$$

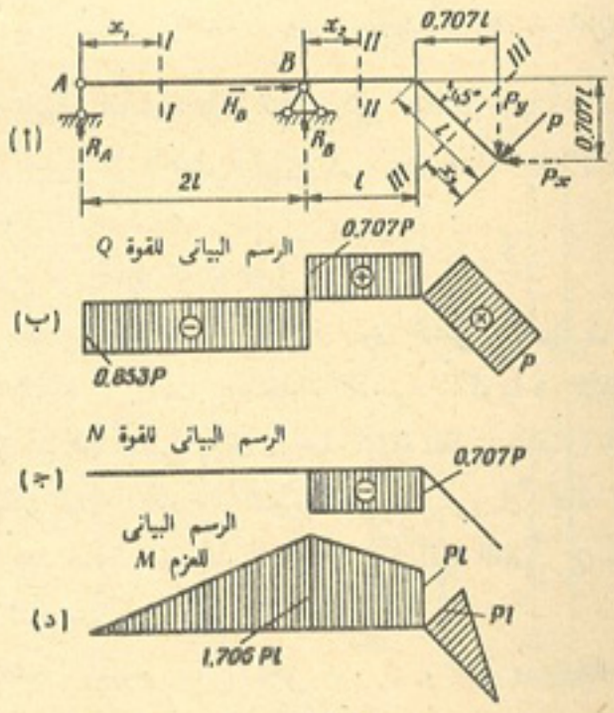
ومنها ينتج أن :

$$R_A = \frac{-(1.707P_y + 0.707P_x)l}{2l} = \frac{-1.707 - 0.707}{2} \times 0.707P =$$

$$= -0.853P$$

وتدل العلامة السالبة (−) هنا ، على أن رد الفعل R_A غير متجه إلى الأعلى كما يفترض ، بل متجه إلى الاسفل .

نضع صيغ أو معادلات قوى القص والقوى الطولية وعزوم الإنحناء ، لكل قسم من أقسام العتبة الثلاثة :



الشكل ٢ - ٦٢

القسم الأول

$$Q^{I} = R_A = -0.853P; \quad N^{I} = 0; \quad M^{I} = R_A x_1 = -0.853Px_1$$

عند $x_1 = 0$ نجد بأن $M^{I} = 0$

وعند $x_1 = 2l$ نجد بأن $M^{I} = -1.706\ Pl$

القسم الثانى

$$Q^{II} = P_y = 0.707P; \quad N^{II} = -P_x = -0.707P;$$
$$M^{II} = -P_x \times 0.707l - P_y\,(1.707l - x_2) = -0.707P \times (0.707l + 1.707l - x_2) = -P\,(1.707l - 0.707x_2)$$

عند $x_2 = 0$ نجد بأن $M^{II} = -1{,}707\,Pl$

وعند $x_2 = l$ نجد بأن $M^{II} = -Pl$

القسم الثالث

$$Q^{III} = P; \quad N^{III} = 0, \quad M^{III} = -Px_3$$

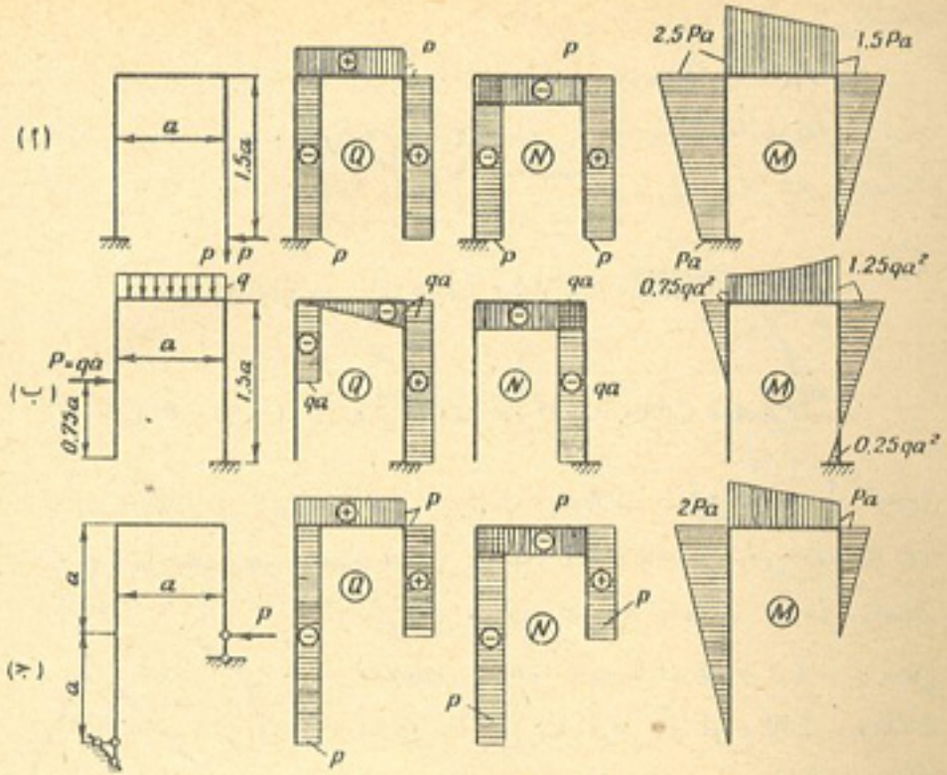
إن الرسوم البيانية المخططة طبقاً للنتائج التى حصلنا عليها أعلاه ، وهى الرسوم البيانية لقوى القص Q والقوى الطولية N ، وعزوم الانحناء M ، موضحة فى الشكل (٢ — ٦٢ ، ب ، ج ، د) .

والآن نقترح على القارئ القيام بما يلى :

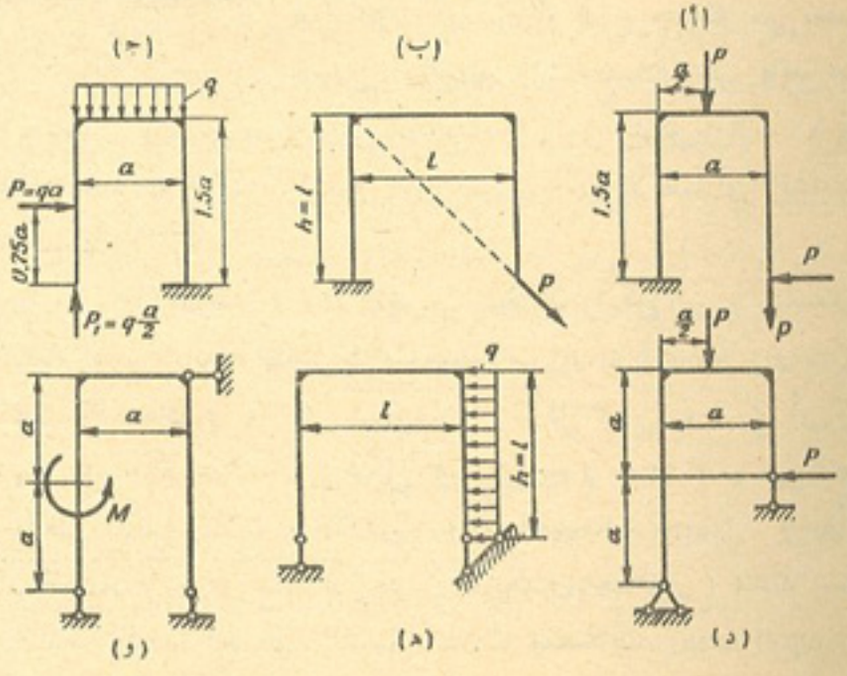
١ — مراجعة علامات الرسوم البيانية لقوى القص ، المبينة فى الشكلين (٢ — ٥٩) و (٢ — ٦٢) ، وذلك بإستخدام القاعدة المذكورة فى البند (٢ — ١) ، التى تنص على أن قوة القص تكون موجبة ، إذا تطلب إنطباق محور القطعة مع مماس الرسم البيانى لعزوم الانحناء ، تدوير المحور المذكور فى اتجاه عقرب الساعة .

٢ — مراجعة صحة تخطيط الرسوم البيانية لقوة القص Q والقوة الطولية N والعزم M ، الموضحة فى الشكل (٢ — ٦٣) .

٣ — تخطيط الرسوم البيانية لكل من Q و N و M ، للعتبات الموضحة فى الشكل (٢ — ٦٤) :



الشكل ٢ — ٦٣



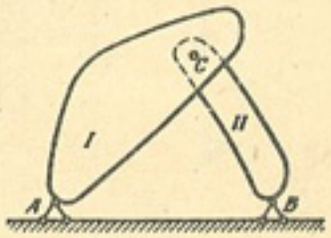
الشكل ٢ — ٦٤

الفصل الثالث

العقود والأطر المتصلة بثلاث مفصلات

البند ٣ – ١ : الأنظمة أو الإنشاءات المتصلة بثلاث مفصلات

يتألف النظام (الإنشاء) المتصل بثلاث مفصلات ، من قرصين أو لوحين (I و II) ، مربوطين مع بعضهما البعض بواسطة مفصلة واحدة (وهى المفصلة C ، المبينة فى الشكل ٣ – ١) ، ومع الأرض بواسطة مفصلتين (وهما المفصلتان B و A) . ويمكن اعتبار الأرض بمثابة قرص أو لوح ثالث ، وبذلك يصبح الإنشاء المتصل بثلاث مفصلات ، عبارة عن ثلاثة أقراص أو الواح متصلة مع بعضها البعض ، بواسطة ثلاث مفصلات غير واقعة على استقامة واحدة . وكما هو معروف من البند (١–٢) ومن الشكل (١ – ١٦) ، يعتبر هذا النظام أو الإنشاء المربوط بهذا الشكل ، من الأنظمة أو الإنشاءات المستقرة هندسياً .

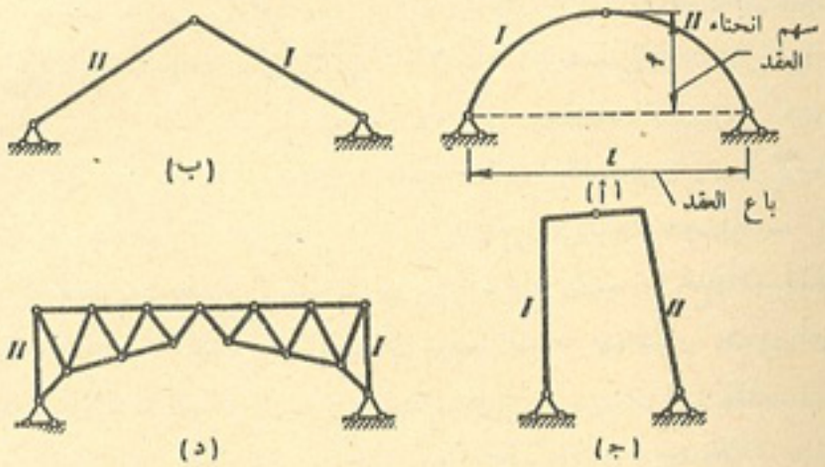


الشكل ٣ – ١

وإذا حل محل القرصين I و II القضيبان منحنيان (شكل ١–١ ، أ) ، عندئذ يسمى النظام الناتج ، بالعقد المتصل بثلاث مفصلات (three - hinged arch) . وإذا كان القضيبان I و II مستقيمين (شكل ٣ – ٢ ، ب) أو كان كل منهما على هيئة حرف L (شكل ٣–٢ ، ج) ، عندئذ يسمى النظام الناتج بالإطار المتصل بثلاث مفصلات (three - hinged frame) . وأخيراً ، إذا كان القضيبان I و II عبارة عن عتبتين تشابكيتين (جمالونين) عندئذ يسمى النظام الناتج بالعقد الجمالونى المتصل بثلاث مفصلات (spandrel arch)

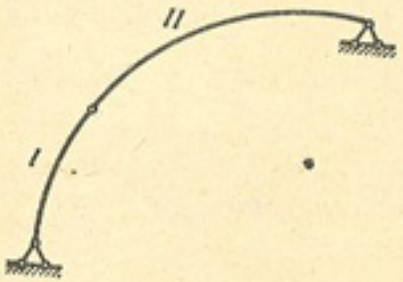
(شكل ٣ – ٢ ، د) .

إن المسافة l الموجودة بين مركزى المفصلتين الواقعتين عند المسندين ، تسمى بالباع ، أما المسافة f الممتدة من المفصلة المتوسطة إلى المستقيم الواصل بين المفصلتين الواقعتين عند المسندين ، فتسمى بسهم انحناء العقد (rise) (شكل ٣–٢ ، أ) :



الشكل ٣ – ٢

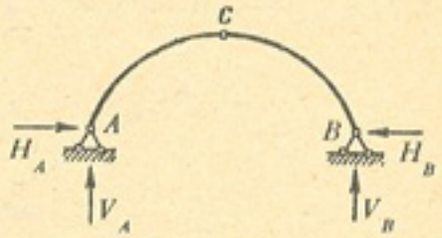
وقد يكون الإنشاء أو النظام المتصل بثلاث مفصلات ، متماثلا أو غير متماثل ، بالنسبة للمحور الرأسى . وتقع المفصلة المتوسطة C ، فى الإنشاء المتماثل ، على محور التماثل ، أما مفصلتا المسندين ، وهما A و B ، فتقعان فى مستوى واحد . إن المسندين A و B ، فى الإنشاء غير المتماثل ، يمكن أن يقعا فى مستويين مختلفين (شكل ٣–٣) . ويتميز كل من ردى الفعل A و B ، للإنشاء المتصل بثلاث مفصلات بكميتين متغيرتين (بارامترين) وهما ، القيمة والاتجاه (أو مثلا ، بقيمتى المركبتين الأفقية والرأسية H و V *) . وهذا



الشكل ٣ – ٣

* فى أغلب الأحيان تسمى المركبتان الأفقيتان الرأسيتان لردى فعل المسندين بردى الفعل الأفقى والرأسى .

نجد بأن ردود فعل المساند ، فى الانشاء المتصل بثلاث مفصلات . تتميز بأربع كميات متغيرة (بأربعة بارامترات) ، وهى مثلا قيم المركبات H_A و H_B ، V_A و V_B (شكل ٣ – ٤) . ويمكن تحديد هذه القيم ، بأستخدام معادلات التوازن الثلاثة ، لكافة القوى المؤثرة فى الإنشاء (وبضمنها ردود فعل المساند) ، ومعادلة رابعة . تعتبر عن كون عزم كافة القوى المؤثرة فى القسمين الأيسر أو الأيمن من الإنشاء . حول المفصلة C * ، مساوياً للصفر . إذن يصبح الإنشاء المتصل بثلاث مفصلات . محدداً استاتيكياً .



الشكل ٣ – ٤

وعندما يكون الإنشاء المتصل بثلاث مفصلات معرضا لتأثير حمل رأسى ، لا تكون المركبتان الأفقيتان H_A و H_B لردى فعل المسندين A و B اللتين تسميان بالقوتين الدفعيتين ، مساويتين للصفر . وبناء على ذلك ، فإن الإنشاء المتصل بثلاث مفصلات ، يعتبر من الإنشاءات (الأنظمة) الدفعية (thrust systems) .

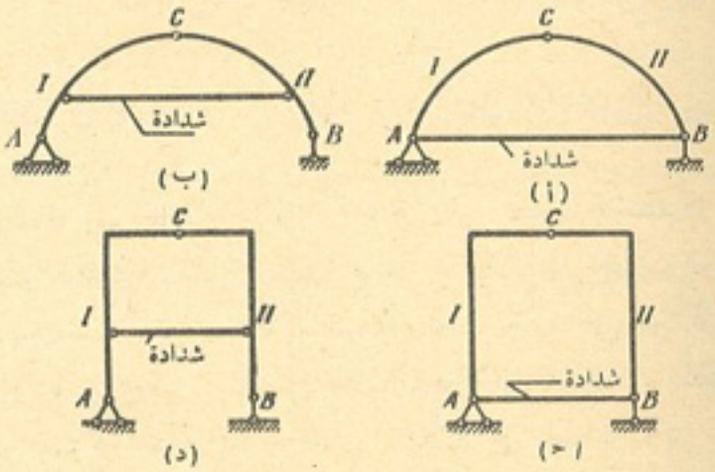
وتكون عزوم الانحناء وقوى القص ، والإجهادات المتولدة فى المقاطع العرضية للعقد المتصل بثلاث مفصلات ، كما سنرى فيما بعد . أقل بكثير من العزوم وقوى القص والإجهادات ، المتولدة فى العتبة التى لها نفس الباع . وبناء على ذلك تصبح العقود المتصلة بثلاث مفصلات ، أكثر فائدة من الناحية الاقتصادية ، عند تسقيف الأبواع الواسعة ، بالمقارنة مع العتبات المستخدمة لنفس الغرض **.

* وذلك لأن عزم الانحناء فى مقطع الإنشاء ، الذى تقع فيه المفصلة ، يساوى صفراً .

** إن أول من اقترح استخدام الجمالونات العقدية لتسقيف أو تغطية الأبواع الواسعة ، فى عام ١٧٧٦ (أى قبل ١٠٠ سنة تقريبا من ظهور علم الميكانيكا الانشائية) ، هو الميكانيكى الروسى الشهير كوليبين ، الذى استخدم قوانين الميكانيكا العامة لحساب وتصميم جسر عقدى خشبى وحيد الباع ، يبلغ طول باعه ٣٠٠ م ، عبر نهر النيفا فى مدينة سان بيتر بورج . ولتحديد شكل محور العقد ، لجأ كوليبين إلى التجارب ، لوضع نظرية المضلع الحبل (fuhicular polygon) التى أدخلت فى علم الميكانيكا ، بعد ذلك بمدة طويلة . وهكذا يكون كوليبين أول من وضع قانون الفعل المتبادل فى الإنشاء أو النظام المحدد استاتيكيا ، المتصل بثلاث مفصلات . وقد قامت أكاديمية العلوم الروسية ، بمراجعة واختبار نموذج كبير جداً لجسر كوليبين (بلغ طول النموذج =

وعندما تكون الأبواع صغيرة ، قد تكون العقود المتصلة بثلاث مفصلات ، أقل ملاءمة من الناحية الاقتصادية ، وذلك لأن صنعها أكثر تعقيداً من صنع العتبات ، ويتطلب إنشاء مفصلة متوسطة ، واستخدام مساند أكثر تعقيداً .

إن مسندى كل إنشاء متصل بثلاث مفصلات ، من الإنشاءات المذكورة سابقاً ، يعتبر غير متحرك (ثابت) فى اتجاه المستقيم الواصل بين المفصلتين A و B (أى فى الاتجاه الأفقى ، شكل ٣ – ٢) . وغالباً ما تصادفنا فى الحالات العملية إنشاءات متصلة بثلاث مفصلات ، يساعد تصميم أحد المسندين فى كل منها ، على تحرك مفصلة المسند ، فى الاتجاه المعين . ويؤمن الاستقرار الهندسى لمثل هذا الإنشاء ، بأستخدام شدادات (كبلات شد) تربط مقاطع المساند ، أو المقاطع الواقعة إلى الأعلى منها ، للقضيبين I و II . ويبين الشكل (٣ – ٥ ، أ) عقداً متصلاً بثلاث مفصلات ، يحتوى على شدادة واحدة ، والشكل (٣ – ٥ ، ب) يبين عقدا متصلاً بثلاث مفصلات ، يحتوى على شدادة مرتفعة ، ويبين الشكل (٣ – ٥ ، ج) إطاراً متصلاً بثلاث مفصلات ، ويبين الشكل (٣ – ٥ ، د) إطاراً متصلاً بثلاث مفصلات ، يحتوى على شدادة مرتفعة .



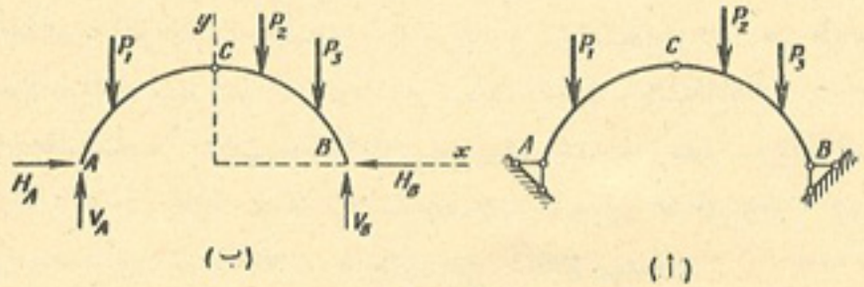
الشكل ٣ – ٥

٣٠ م) ، وذلك بتعريضه لحمل بلغ حوالى ٥٦ طنا ، وأقرت صحة تصميمه ومقاومته . وفى ذلك الوقت ، قام العالم الرياضى العظيم أويلر ، عضو أكاديمية العلوم الروسية ، بمراجعة جميع الرسوم التخطيطية للجسر ، الذى بلغ طوله ٣٠٠ م ، والحسابات الرياضية لكوليبين ، وأقر بصحتها تماماً .

البند ٣ – ٢ : تحديد ردود فعل المساند ، فى العقد المتصل بثلاث مفصلات

١ – طريقة الحساب التحليلى :

عند تعرض العقد المتصل بثلاث مفصلات ، لتأثير الأحمال الخارجية (شكل ٣ – ٦ ، أ) يظهر فى كل مسند من مسنديه ردا فعل ، أحدهما أفقى والآخر رأسى وبذلك يكون لدينا أربعة ردود فعل للمساند ، والآن نرمز إلى ردى



الشكل ٣ – ٦

الفعل الرأسيين بالرمزين V_A و V_B وإلى ردى الفعل الأفقيين بالرمزين H_A و H_B (شكل ٣ – ٦ ، ب) .

وبالإضافة إلى معادلات التوازن الثلاثة ، التى تعطيها الاستاتيكا ، بالنسبة لمجموعة القوى الواقعة فى نفس المستوى الواحد ، يمكن عند حساب العقد المتصل بثلاث مفصلات ، وضع معادلة استاتيكية رابعة ، تعتمد على كون عزم الإنحناء فى المقطع العرضى للعقد ، المار من خلال المفصلة الوسطى C ، يساوى صفراً . إذن يكون المجموع الجبرى لعزوم القوى ، المؤثرة على الطرف الأيمن أو الأيسر للعقد ، حول المفصلة C ، مساوياً للصفر :

$$\Sigma_L M_C = 0$$

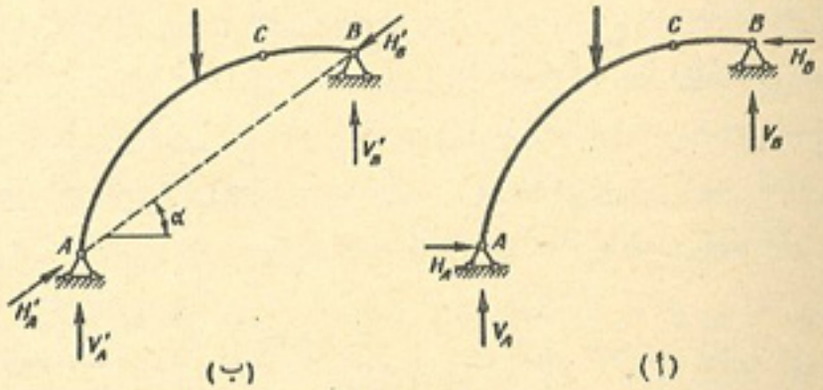
أو

$$\Sigma_R M_C = 0$$

ويمكن تحديد كافة ردود فعل المساند ، من معادلات التوازن الاستاتيكى الأربعة ، التى حصلنا عليها .

وينصح بأن توضع معادلات التوازن الاستاتيكى ، بطريقة معينة من التتابع ، بحيث يمكن تجنب الحل الآنى ، لمجموعة المعادلات ، التى تحتوى على عدة مجاهيل . وعلى سبيل المثال ، يمكن فى البداية وضع المعادلة $\Sigma M_B = 0$ ، المعبرة عن مساواة مجموع عزوم كافة القوى ، حول المفصلة B ، للصفر (راجع الشكل ٣ – ٦ ، ب) . ويدخل فى هذه المعادلة ، رد فعل واحد فقط ، هو رد فعل المسند V_A . وبعد تحديد قيمة V_A ، يمكن وضع المعادلة $\Sigma M_C = 0$ ، المعبرة عن مجموع عزوم القوى المؤثرة فى القسم الأيسر للعقد . حول المفصلة C : ويدخل فى هذه المعادلة ، رد الفعل الذى عرفناه V_A ، ورد الفعل المجهول H_A ، ومن هذه المعادلة ، نستخرج قيمة H_A . ثم يمكننا من المعادلة $\Sigma M_A = 0$ ، المعبرة عن مجموع عزوم كافة القوى ، حول المفصلة A ، إيجاد رد فعل V_B ، ومن المعادلة $\Sigma X = 0$ ، المعبرة عن مجموع مساقط كافة القوى على المحور الأفقى ، يمكن تحديد مقدار H_B . ولمراجعة صحة قيم ردود الفعل ، التى حصلنا عليها ، نقترح التأكد بعد ذلك من أنها تحقق الشرطين (المعادلتين) $\Sigma Y = 0$ و $\Sigma_R M_C = 0$.

وإذا وقع مسنداً العقد ، فى مستويين مختلفين ، فسوف يدخل فى المعادلة ، $\Sigma M_B = 0$ ، بالإضافة إلى رد الفعل المجهول V_A ، رد فعل مجهول آخر ، هو H_A



الشكل ٣ – ٧

(شكل ٣ – ٧ ، أ) ، الأمر الذى يتطلب حلاً آنياً ، للمعادلتين ، المحتويتين على مجهولين اثنين . ويمكن تجنب ذلك ، إذا قمنا بتحليل ردى فعل المسندين A و B للعقد ، ليس إلى مركبتيهما الرأسيتين V_A و V_B ومركبتيهما الأفقيتين H_A و H_B ، بل إلى مركبتيهما الرأسيتين V'_A و V'_B ومركبتيهما H'_A و H'_B ، المتجهتين فى اتجاه المستقيم ، الذى يصل بين مفصلتى المسندين (شكل ٣ – ٧ ، ب) : وبعد تحديد قيم V'_A ، V'_B ، H'_A و H'_B ، يمكن إيجاد قيم المركبات الرأسية والأفقية لردود فعل المساند :-

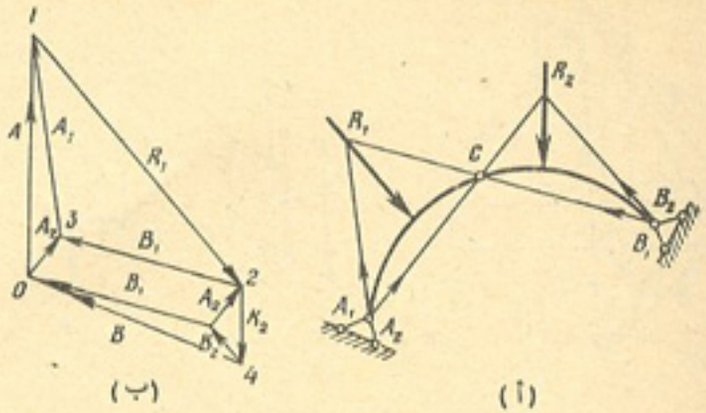
$$V_A = V'_A + H'_A \sin \alpha$$
$$V_B = V'_B - H'_A \sin \alpha$$
$$H_A = H'_A \cos \alpha$$
$$H_B = H'_B \cos \alpha$$

٢ – طريقة الحساب التخطيطى

عند تحديد ردود فعل المساند بالطريقة التخطيطية تحدد سلفاً أوضاع وقيم R_1 و R_2 ، وهما محصلتا الأحمال الخارجية ، المؤثرة على طرفى العقد الأيسر والأيمن على التوالى . وفى البداية تحدد ردود فعل المساند ، بصورة مستقلة عن تأثير القوة R_1 وعن تأثير القوة R_2 ، ثم تحدد بعد ذلك ردود الفعل الناجمة عن التأثير الموحد للقوتين المذكورتين معا .

نحدد أولاً ردود فعل المساند ، الناجمة عن تأثير القوة R_1 على العقد . فى هذه الحالة ، يجب أن يمر رد فعل المسند الأيمن B_1 ، خلال مفصلة المسند اليمنى وخلال المفصلة C (شكل ٣ – ٨ ، أ) . وإذا حدث العكس ، لا يمكن أن يكون الطرف أو القسم الأيمن من العقد ، الذى تؤثر عليه قوتان (هما رد فعل المسند B_1 ورد فعل المفصلة C) واقعاً فى حالة توازن . وينشأ فى المسند الأيسر للعقد ، رد فعل A_1 . وبهذا الشكل ، يكون العقد بأكمله فى حالة توازن ، تحت تأثير القوى الثلاثة التالية A_1 ، B_1 ، R_1 .

والمعروف من علم الميكانيكا النظرية ، إن القوى الثلاث ، المؤثرة على قرص أو لوح ، والواقعة فى حالة توازن ، يجب أن تتقاطع فى نقطة واحدة : وبتطبيق

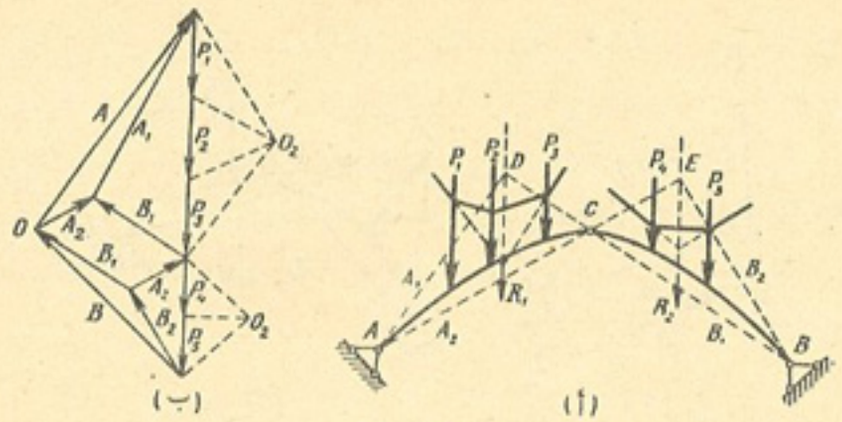


الشكل ٣ – ٨

النظرية المذكورة ، على حالتنا هذه ، يمكن بسهولة تحديد اتجاه رد فعل المسند A_1 ومن ثم برسم مضلع القوى ، للقوى الثلاث التالية R_1 و A_1 و B_1 (شكل ٣–٨ ، ب) نستطيع إيجاد قيمتى ردى فعل المسندين A_1 و B_1 : ونحدد لنفس الطريقة ردى الفعل A_2 و B_2 ، الناجمين عن القوة R_2 ، المؤثرة فى القسم أو النصف الأيمن من العقد (شكل ٣– ٨ ، أ) :

وبناء على مبدأ تراكب القوى ، نحصل بعد الجمع الهندسى للقوى التى وجدناها ، وهى A_1 و A_2 ، B_1 و B_2 ، على ردى الفعل A و B ، الناشئين عند مسندى العقد المتصل بثلاث مفصلات ، نتيجة لتأثير القوتين R_1 و R_2 : وللقيام بذلك ، نمرر من النقطة 3 الواقعة على مضلع القوى (شكل ٣– ٨ ، ب) مستقيما موازياً لخط تأثير رد الفعل A_2 ، ونضع عليه قيمة A_2 . وبعد وصل النقطة 0 التى نتجت عن ذلك ، مع النقطة 1 نحصل على قيمة رد الفعل الكلى A للمسند الأيسر . ويتم بنفس الطريقة ، تحديد قيمة رد الفعل الكلى B ، للمسند الأيمن . ان المسقطين الرأسى والأفقى لرد الفعل A ، يساويان V_B و H_B على التوالى والمسقطين الرأسى والأفقى لرد الفعل B ، يساويان V_B و H_B على التوالى .

ويبين الشكل (٣ – ٩) الطريقة التخطيطية لتحديد ردود فعل المساند ، عندما تؤثر على كل قسم من قسمى العقد ، مجموعة من القوى . وباستخدام طريقة



الشكل ٣ – ٩

مضلع القوى والمضلع الحبلى ، نعين سلفاً المحصلتين R_1 و R_2 ، للقوى المؤثرة على كل قسم من قسمى العقد . ولاتختلف طريقة رسم مخطط القوى ، بعد ذلك ، عن الطريقة المبينة فى الشكل (٣ – ٨) .

مثال ١ : يطلب استخدام الطريقتين التحليلية والتخطيطية ، لتحديد ردود فعل المساند للعقد المبين فى الشكل (٣ – ١٠ ، أ) عندما يؤثر عليه حمل رأسى .

الحل : ١ . الطريقة التحليلية . نهمل وجود المساند ، ونستبدلها بردود الفعل التالية : V_A ، H_A و V_B ، H_B (شكل ٣ – ١٠ ، ب) .

ولتحديد رد فعل المسند V_A ، نضع الصيغة المعبرة عن مجموع عزوم كافة القوى ، المؤثرة على العقد ، حول النقطة B :

$$\Sigma M_B = V_A\, l - P_1(l - a_1) - P_2(l - a_2) = 0$$

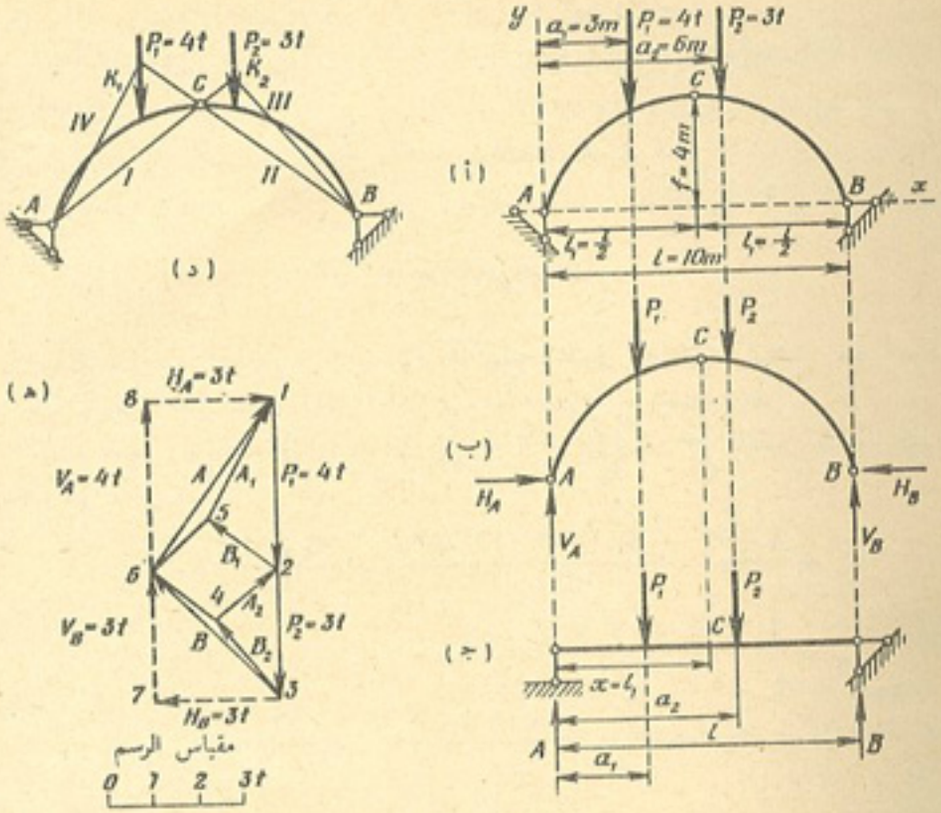
ومنها ينتج ما يلى :

$$V_A = \frac{P_1(l - a_1) + P_2(l - a_2)}{l} = \frac{M_B}{l} \qquad (3 - 1)$$

حيث M_B – عزم الحمل الخارجى (القوى الخارجية P) حول مفصلة المسند اليمنى .

ولتحديد رد فعل المسند H_A، نجعل مجموع عزوم كافة القوى ، المؤثرة على القسم الايسر للعقد ، حول المفصلة C ، مساويا للصفر :

$$\Sigma_L M_C = V_A\, l_1 - H_A f - P_1(l_1 - a_1) = 0$$



الشكل ٣ – ١٠

ومنها ينتج ان :

$$H_A = \frac{V_A\, l_1 - P_1(l_1 - a_1)}{f} = \frac{M_C^0}{f} \qquad (3 - 2)$$

حيث M_C^0 – عزم كافة القوى (باستثناء القوة H_A) المؤثرة على القسم الأيسر للعقد ، حول المفصلة C .

ولتحديد رد الفعل الرأسى V_B ، نضع المعادلة أو الصيغة المعبرة عن مجموع عزوم كافة القوى ، حول النقطة A :

$$\Sigma M_A = -V_B\, l + P_2 a_2 + P_1 a_1 = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$V_B = \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2}{l} = \frac{M_A}{l} \qquad (3 - 3)$$

حيث M_A – عزم الحمل الخارجي حول مفصلة المسند اليسرى .

ولتحديد رد فعل المسند H_B ، نضع الصيغة المعبرة عن مجموع مساقط كافة القوى ، على المحور x .

$$\Sigma X = H_A - H_B = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$H_A = H_B = H \qquad (3-4)$$

وينتج من هذه المعادلة ، أن قوى الدفع (القوى الدفعية) الناشئة عند المساند فى حالة تعرض العقد لتأثير الحمل الرأسى ، تكون متساوية مع بعضها البعض .

والآن نعوض فى الصيغتين (1—3) و(4—3) عن قيم المقادير الداخلة فيهما فنحصل على ما يلى :

$$V_A = \frac{4\,(10-3) + 3\,(10-6)}{10} = \frac{28+12}{10} = 4\ t$$

$$V_B = \frac{4 \times 3 + 3 \times 6}{10} = 3\ t$$

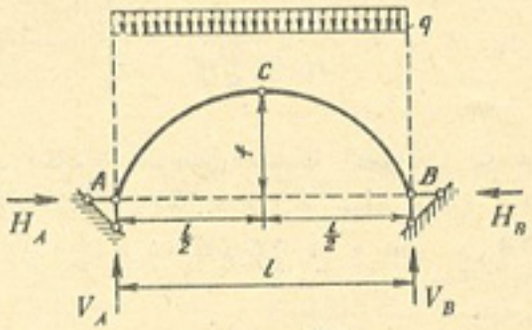
$$H_A = H_B = H = \frac{4 \times 5 - 4\,(5-3)}{4} = 3\ t$$

أن الصيغتين (1—3) و(3—3) التى حصلنا عليهما لكل من V_A و V_B ، تشيران إلى أنه عندما يؤثر على العقد حمل رأسى ، تكون المركبتان الرأسيتان لردى فعل المسندين ، مساوية لردى فعل المسندين A و B ، فى العتبة البسيطة ذات المسندين (التى باعها يساوى باع العقد) ، الناشئين نتيجة لتأثير نفس الحمل بالذات (شكل ٣ – ١٠ ، ج) . وعزم الانحناء فى المقطع C من هذه العتبة ، يساوى العزم M_C^0 ، إذن ، (على أساس الصيغتين 2—3 و 4—3) نجد بأن القوة الدفعية للعقد ، عند تعرضه لتأثير الحمل الرأسى ، تساوى عزم الانحناء M_C^0 (فى مقطع العتبة البسيطة المذكورة ، المناظر لموضع المفصلة C) ، مقسوماً على قيمة سهم انحناء العقد f .

٢ – الطريقة التخطيطية . على الرسم التخطيطى للعقد (شكل ٣ – ١٠ ، ج) نمد المستقيم I عبر المفصلتين A و C حتى يتقاطع مع القوة P_2 فى النقطة K_2 ، ونمد المستقيم II عبر المفصلتين B و C حتى يتقاطع مع القوة P_1 فى النقطة K_1 . ثم نوصل النقطة K_1 مع المفصلة A (بالمستقيم IV) ، ونوصل النقطة K_2 مع المفصلة B (بالمستقيم III) .

وباستخدام مقياس الرسم المأخوذ للقوى (شكل ٣ – ١٠ ، د) نضع على المستقيم الرأسى القوة P_1 (القسم 2—1) والقوة P_2 (القسم 3—2) . نضع القوة P_1 على المركبتين A_1 و B_1 ، الموازيتين للمستقيمين IV و II (طبقا للشكل ٣ – ١٠ ، ج) ، ولهذا الغرض

نمد من نهايتيه ، القسم 5—2 (الذى يساوى B_1) ، بصورة موازية للمستقيم II ، والقسم 5 — 1 (الذى يساوى A_1) بصورة موازية للمستقيم IV . ونضع القوة P_2 على المركبتين A_2 و B_2 الموازيتين للمستقيمين I و III ، ولهذا الغرض نمد من نهايتيه ، القسم 4 — 2 (الذى يساوى A_2) بصورة موازية للمستقيم I ، والقسم 4—3 (الذى يساوى B_2) بصورة موازية للمستقيم III . ثم نرسم المستقيمين 6 — 4 و 6 — 5 بصورة موازية لكل من



الشكل ٣ – ١١

المستقيمين 5—2 و 4—2 على التوالى . أن القسم 1—6 يساوى رد فعل المسند A ، والقسم 6—3 يساوى رد فعل المسند B . والمساقط الافقية والرأسية لهذين القسمين ، تساوى ردود الفعل H_A ، H_B ، V_A و V_B .

مثال ٢ : يطلب استخدام الطريقة التحليلية ، لتحديد القوة الدفعية للعقد المبين فى الشكل (٣ – ١١) ، الناجمة عن تأثير الحمل الرأسى الموزع بانتظام على امتداد الباع باكله ، بشدة قدرها q .

الحل : نحدد ردود الفعل الرأسية ، من معادلات التوازن ، وهما المعادلتين :

$$\Sigma M_A = 0; \qquad \Sigma M_B = 0$$

وفى هذه الحالة ، تأخذ المعادلتان المذكورتان ، الشكل التالى :

$$\Sigma M_B = V_A\, l - ql \times \frac{1}{2} = 0$$

$$\Sigma M_A = V_B\, l + ql \times \frac{1}{2} = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$V_A = V_B = q\,\frac{l}{2}$$

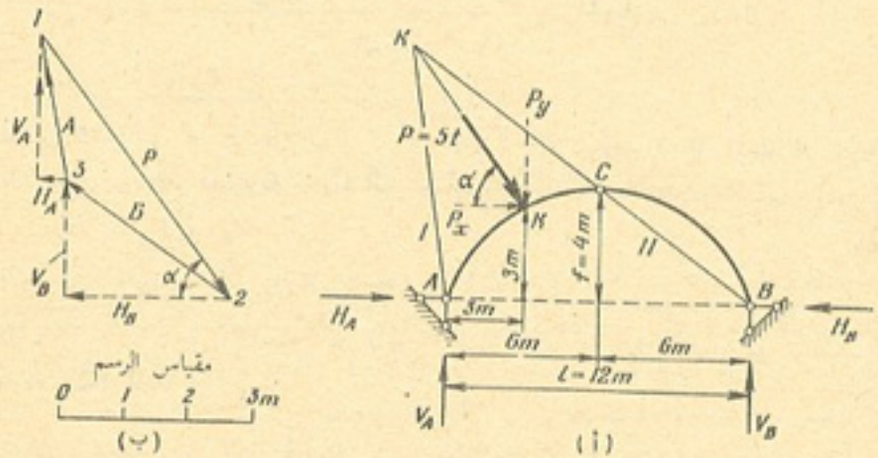
وفى حالة تأثير الحمل الرأسى نجد بأن : $H_A = H_B = H$. ولتحديد قيمة القوة الدفعية H، نضع الصيغة المعبرة عن مجموع عزوم القوى المؤثرة فى النصف الايسر للعقد ، حول المفصلة C :

$$\Sigma_L M_C = V_A \frac{l}{2} - Hf - q \times \frac{l}{2} \times \frac{l}{4} = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$H = \frac{ql^2}{8f}$$

مثال ٣ : يطلب استخدام الطريقتين التخطيطية التحليلية ، لتحديد ردود فعل المساند ، الناجمة عن تأثير القوة المائلة $P = 5$ t (أى خمسة أطنان) ، المؤثرة على العقد المبين فى الشكل (٣ – ١٢ ، أ) ، اذا كان $\cos \alpha = 0.6$ و $\sin \alpha = 0.8$.



الشكل ٣ – ١٢

الحل : ١ . الطريقة التحليلية . نضع قيمة القوة P على المركبتين الرأسية والأفقية :

$$P_y = 5 \times 0.8 = 4 \text{ t}$$
$$P_x = 5 \times 0.6 = 3 \text{ t}$$

ولتحديد رد الفعل الرأسى V_A ، نضع الصيغة المعبرة عن مجموع عزوم كافة القوى ، حول النقطة B :

$$\Sigma M_B = V_A \times 12 - P_y \times 9 + P_x \times 3 = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$V_A = \frac{9\,P_y - 3P_x}{12} = \frac{36 - 9}{12} = 2.25 \text{ t}$$

ولتحديد رد الفعل الرأسى V_B ، نضع المعادلة المعبرة عن عزوم كافة القوى ، حول النقطة A :

$$\Sigma M_A = -V_B \times 12 + P_y \times 3 + P_x \times 3 = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$V_B = \frac{4 \times 3 + 3 \times 3}{12} = \frac{21}{12} = 1.75 \text{ t}$$

ولتحديد رد الفعل الأفقى H_A ، نضع المعادلة المعبرة عن مجموع عزوم القوى ، المؤثرة فى النصف الأيسر من العقد ، حول المفصلة C :

$$\Sigma_L M_C = V_A \times 6 - H_A \times 4 - P_x \times 1 - P_y \times 3 = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$H_A = \frac{2.25 \times 6 - 3 \times 1 - 4 \times 3}{4} = \frac{-1.5}{4} = -0.375 \text{ t}$$

وتشير العلامة السالبة هنا ، إلى أن رد الفعل H_A يتجه إلى اليسار . ولتحديد H_B ، نضع المعادلة المعبرة عن مجموع مساقط كافة القوى ، على المحور الأفقى x :

$$\Sigma X = H_A + P_x - H_B = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$H_B = -0.375 + 3 = 2.625 \text{ t}$$

٢ . الطريقة التخطيطية . نمد المستقيم H عبر المفصلتين B و C إلى أن يتقاطع مع مستقيم تأثير القوة P فى النقطة K (شكل ٣ – ١٢ ،أ) . ثم نوصل النقطة K مع المفصلة A بالمستقيم I . و باستخدام مقياس الرسم المأخوذ (شكل ٣ – ١٢ ، ب) ، نضع قيمة القوة P (فى اتجاهها المعين) ونمد من نهايتها المستقيم 3 — 1 (بصورة موازية للمستقيم I المبين فى الشكل ٣ – ١٢ ، أ) ، المستقيم 3 — 2 (بصورة موازية للمستقيم H) . أن القسمين اللذين نحصل عليهما بهذه الطريقة وهما 3 — 1 و 3 — 2 ، يمثلان (بالمقياس المأخوذ) ردى فعل المسندين A و B . أن المساقط الافقية والرأسية لهذين القسمين ، تساوى ردود فعل المساند H_A و H_B و V_A و V_B .

البند ٣ – ٣ : تحديد القوى الداخلية (الاجهادات) فى العقد المتصل بثلاث مفصلات

١ – الطريقة التحليلية

إن القوى الداخلية أو الإجهادات ، التى تنشأ فى المقاطع العرضية للعقد ، هى عزوم الانحناء M ، قوى القص Q والقوى الطولية N . وتحدد هذه القوى ، على أساس الأحمال المؤثرة على العقد ، إلى يمين أو يسار المقطع الذى يجرى بحثه .

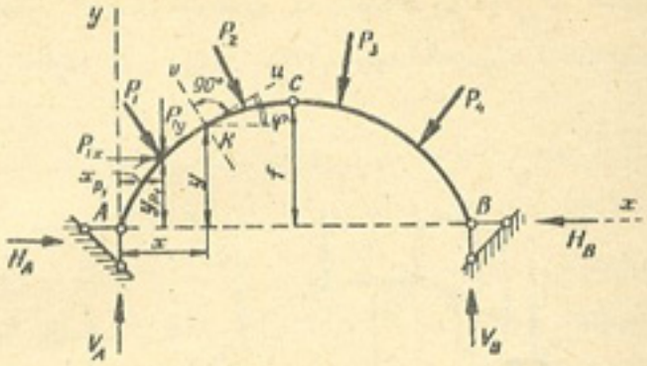
وعند تحديد القوى الداخلية وتخطيط الرسوم البيانية لها ، تستخدم العلامات المتعارف عليها (باستثناء علامة القوة الطولية ، التى تعتبر فى حالة العقود ، موجبة عند الانضغاط) ، وتستخدم الصيغتان (1 — 2) — (3 — 2)، المذكورتان فى البند(٢ — ١) ، الخاصتان بالعتبات .

ولكن عند حساب العقود ، يكون من الأفضل أن نرمز إلى المحور المبين فى الصيغتين (1 — 2)—(3 — 2)، المنطبق مع مماس محور العقد فى المقطع المبحوث ، بالرمز u (بدلا من الرمز x فى العتبات) ، وإلى المحور العمودى عليه بالرمز v (بدلا من y) ، وإلى مساقط القوى على هذين المحورين ، بالرمزين U و V على التوالى .

وبعد أن نأخذ كل ذلك فى الاعتبار ، نجد بأن الصيغتين (1– 2) — (3—2) تأخذان الشكل التالى ، بالنسبة للعقود :

$$\begin{aligned} Q &= \Sigma_L V = -\Sigma_R V \\ M &= \Sigma_L M = -\Sigma_R M \\ N &= \Sigma_L U = -\Sigma_R U \end{aligned} \qquad (3-1)$$

وفى هذه الصيغ ، تكون عزوم القوى الخارجية ، المسبوقة بعلامة Σ ، موجبة ، عند دورانها فى اتجاه عقرب الساعة ، وتكون V موجبة عندما تكون متجهة من الأسفل إلى الأعلى ، وتكون المساقط U موجبة ، عندما تكون متجهة من اليسار إلى اليمين .



الشكل ٣ – ١٣

والآن نستخدم المعادلات الثلاثة المرقمة (1 — 3) ، لتحديد القوى الداخلية أو الاجهادات فى المقطع العرضى K للعقد المبين فى الشكل (٣ – ١٣) :

$$\begin{aligned} Q &= \Sigma_L V = V_A \cos\phi - H_A \sin\phi - \Sigma_L P_y \cos\phi - \Sigma_L P_x \sin\phi \\ M &= \Sigma_L M = V_A x - H_A y - \Sigma_L P_y (x - x_p) - \Sigma_L P_x (y - y_p) \\ N &= \Sigma_L U = V_A \sin\phi + H_A \cos\phi - \Sigma_L P_y \sin\phi + \Sigma_L P_x \cos\phi \end{aligned} \qquad (3-2)$$

حيث . x و y — احداثيات النقطة K من العقد ،

ϕ — الزاوية المحصورة بين مماس محور العقد ، فى النقطة K وبين المستقيم الأفقى ،

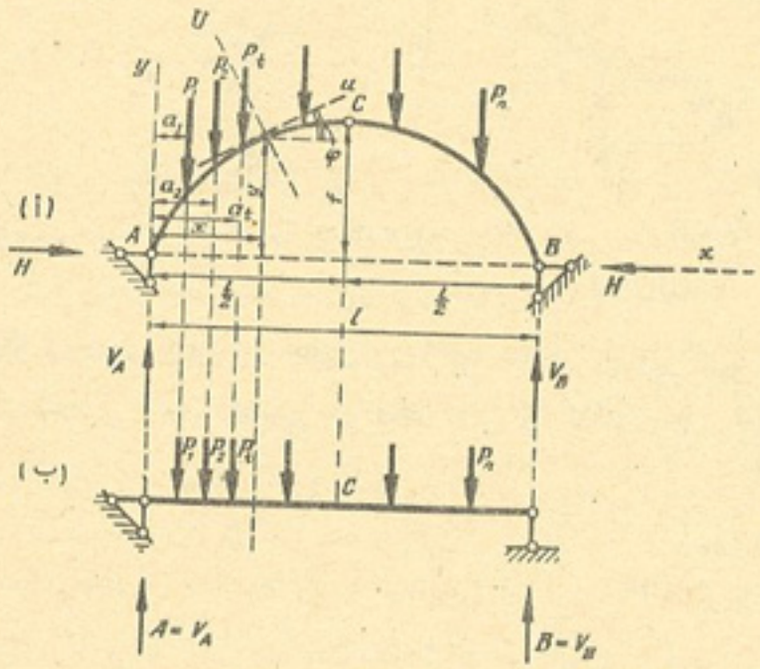
P_x و P_y — المسقطان الرأسى والأفقى للقوة P على التوالى ،

x_p y_p — إحداثيات نقطة تأثير القوة P .

وفى معادلات Q ، M و N التى حصلنا عليها، تأتى علامة الجمع (Σ) قبل المساقط P_y ، P_x ، لكافة القوى P ، المؤثرة على العقد ، إلى يسار المقطع K : وبالنسبة للمقطع K ، المبين فى الشكل (٣ – ١٣) تدخل علامة الجمع (Σ) على مسقط واحد فقط هو P_{1y} أو P_{1x} . وبطريقة مماثلة ، يمكن التعبير عن القوى الداخلية Q ، M و N ، بواسطة كافة القوى الموجودة إلى يمين المقطع أيضا .

وعندما يؤثر على العقد حمل رأسى فقط (شكل ٣ – ١٤ ، أ) ، تكون

المساقط الأفقية P_x مساوية للصفر ، والمساقط الرأسية P_y مساوية للقوة P . والقوة الدفعية تساوى $H_A = H_B = H$ ، ولهذا السبب ، تأخذ الصيغة (2 — 3) الشكل التالى :



الشكل ٣ — ١٤

$$Q = (V_A - \Sigma_L P) \cos \phi - H \sin \phi$$
$$M = V_A x - \Sigma_L P (x - x_p) - Hy$$
$$N = (V_A - \Sigma_L P) \sin \phi + H \cos \phi$$

إن الصيغة $V_A - \Sigma_L P$ ، تمثل قوة القص Q^0 فى المقطع الذى محوره السينى x ، فى العتبة الثنائية الباع البسيطة ، المعرضة لتأثير الأحمال المعينة ، والمبينة فى الشكل (٣ — ١٤ ، ب) أما الصيغة $V_A x - \Sigma P(x - x_p)$ ، فتمثل عزم الانحناء M^0 فى نفس المقطع المذكور من العتبة نفسها* . وبعد أخذ كل ذلك فى الأعتبار ، نجد بأن الصيغ الأخيرة تأخذ الشكل التالى :

* إن القوة Q^0 تسمى غالبا بقوة قص العتبة ، أما العزم M^0 فيسمى بعزم انحناء العتبة .

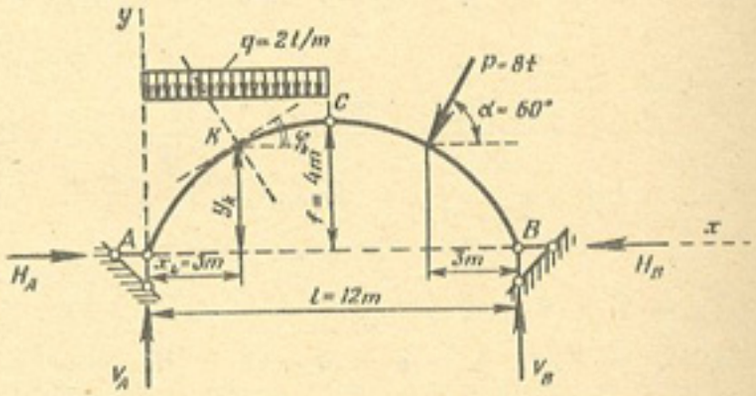
$$Q = Q^0 \cos \phi - H \sin \phi$$
$$M = M^0 - Hy \qquad (3 - 3)$$
$$N = Q^0 \sin \phi + H \cos \phi$$

وبعد أن نستخدم الصيغ المذكورة لتحديد قيم القوى الداخلية Q و M و N فى مختلف المقاطع عند مختلف أقسام العقد (عند تأثير الحمل الرأسى فقط — تستخدم الصيغة (1 — 3) أو (2 — 3) أو (3 — 3) ، أما فى الحالات الأخرى فتستخدم الصيغة (1 — 3) أو (2 — 3) يمكن بواسطة القيم التى حصلنا عليها ، تخطيط الرسوم البيانية لهذه القوى . وعند تأثير الحمل الرأسى فقط ، يمكن الحصول على كل رسم بيانى من رسوم المقادير Q و M و N ، كما يتضح من الصيغة (3 — 3) ، بواسطة جمع رسمين من الرسوم البيانية ، مثلاً يمكن الحصول على الرسم البيانى للعزم M ، بجمع الرسم البيانى لـ M^0 ، فى العتبة الثنائية الباع البسيطة مع الرسم البيانى لـ y (احداثيات محور العقد) ، مضروبا فى ($-H$) .

وتجدر الإشارة إلى أن الصيغة الثانية من الصيغ رقم (3 — 3) تدل بوضوح على تضاؤل عزم الانحناء .

مثال ١ : يطلب تحديد ردود فعل المساند ، وعزم الانحناء وقوة القص والقوة الطولية ، فى المقطع K ذى الاحداثى السينى $x_k = 3m$ ، للعقد المبين فى الشكل (٣ — ١٥) : مع العلم بأن العقد مخطط على هيئة قطع مكافئ مخروطى ، ومعادلته الخاصة هى :

$$y = \frac{4f}{l^2}(l - x)\,x = \frac{4 \times 4 \times (12 - x)\,x}{12 \times 12} = \frac{(12 - x)x}{9}$$



الشكل ٣ — ١٥

الحل : نحدد الاحداثى الرأسى للمقطع K (عندما تكون قيمة الاحداثى السينى هى $x_k = 3m$) :

$$y_k = \frac{(12 - 3)\ 3}{9} = 3\ m$$

وباستخراج تفاضل معادلة القطع المكافئ ، نحدد ظل زاوية ميل مماس محور العقد فى النقطة ذات الاحداثى السينى x ، مع الخط الافقى :

$$\tan \phi_x = y' = \frac{12 - 2x}{9}$$

أن ظل زاوية ميل المماس فى النقطة K ذات الإحداثى السينى $x_k = 3m$ يساوى ما يلى :

$$\tan \phi_k = \frac{12 - 2 \times 3}{9} = \frac{2}{3}$$

ولتحديد $\sin \phi_k$ و $\cos \phi_k$ ، نستخدم الصيغتين التاليتين * :

$$\sin \phi_k = \frac{\tan \phi_k}{\sqrt{1 + \tan^2 \phi_k}} = \frac{2}{3\sqrt{1 + \frac{4}{9}}} = 0.555$$

$$\cos \phi_k = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \phi_k}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4}{9}}} = 0.832$$

وتحدد ردود فعل المساند من المعادلات التالية :

$$\Sigma M_B = V_A \times 12 - q \times 6 \times 9 - P \cos \alpha \times 3 - P \sin \alpha \times 3 = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$V_A = \frac{2 \times 6 \times 9 + 8\ (0.5 + 0.866) \times 3}{12} = \frac{140.78}{12} = 11.73\ t$$

$$\Sigma Y = V_A - q \times 6 - P \sin \alpha + V_B = 0$$

إذن :

$$V_B = 2 \times 6 + 8 \times 0.866 - 11.73 = 7.20\ t$$

$$\Sigma_L M_C = V_A \times 6 - q \times 6 \times 3 - H_A \times 4 = 0$$

* يمكن كذلك تحديد قيمتى $\sin \phi_k$ و $\cos \phi_k$ ، من جداول النسب المثلثية .

ومنها ينتج أن :

$$H_A = \frac{11.73 \times 6 - 2 \times 18}{4} = \frac{34.38}{4} = 8.60\ t$$

$$\Sigma X = H_A - H_B - P \cos \alpha = 0$$

ومنها نجد بأن :

$$H_B = 8.60 - 8 \times 0.5 = 4.60\ t$$

وعزم الانحناء فى المقطع K يساوى :

$$M_K = V_A \times 3 - H_A \times 3 - q \times 3 \times \frac{3}{2} =$$

$$= 11.73 \times 3 - 8.60 \times 3 - 2 \times \frac{9}{2} = 0.39\ t\ m$$

وقوة القص فى المقطع K تساوى :

$$Q_K = V_A \cos \phi_k - H_A \sin \phi_k - q \times 3 \cos \phi_k =$$

$$= 11.73 \times 0.832 - 8.60 \times 0.555 - 6 \times 0.832 = 0$$

والقوة الطولية فى المقطع K تساوى :

$$N_K = V_A \times \sin \phi_k + H_A \times \cos \phi_k - q \times 3 \times \sin \phi_k =$$

$$= 11.73 \times 0.555 + 8.60 \times 0.832 - 2 \times 3 \times 0.555 = 10.34\ t$$

مثال ٢ : يطلب تخطيط الرسوم البيانية لعزوم الانحناء M وقوى القص Q والقوى الطولية N ، فى العقد المبين فى الشكل (٣ - ١٦ ، أ) . والعقد المذكور مخطط على هيئة قطع مكافئ تربيعى ، ومعادلته الخاصة هى :

$$y = \frac{4f}{l^2}(l - x)\ x$$

الحل : نحدد ردى فعل المسندين V_A و V_B :

$$\Sigma M_B = V_A\ l - \frac{ql}{2} \times \frac{3}{4}\ l - P \times b = 0$$

$$\Sigma Y = V_A + V_B - q\ \frac{l}{2} - P = 0$$

ومنهما ينتج أن :

$$V_A = \frac{3}{8}\ ql + \frac{b}{l}\ P = \frac{3}{8} \times 2 \times 12 + \frac{3}{12} \times 4 = 10\ t$$

$$V_B = q\,\frac{l}{2} + P - V_A = \frac{2 \times 12}{2} + 4 - 10 = 6\ t$$

وتحدد القوة الدفعية H من المعادلة التالية :

$$\Sigma_L\, M_C = V_A\,\frac{l}{2} - \frac{ql}{2} \times \frac{l}{4} - Hf = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$H = \frac{V_A \times \frac{l}{2} - \frac{ql^2}{8}}{f} = \frac{10 \times 6 - \frac{2 \times 12^2}{8}}{4} = 6\ t$$

ويؤثر على العقد ، الحمل الرأسى فقط ، ولذلك يمكن استخدام الصيغ رقم (3 — 3) لتخطيط الرسوم البيانية لـ Q و M و N .

والشكل (٣ — ١٦ ، ب) يبين عتبة ثنائية الباع بسيطة ، تؤثر عليها الاحمال المعينة المذكورة وردى فعل المسندين V_A و V_B . ويبين الشكل (٣ — ١٦ ، جـ ، د) الرسوم البيانية لقوى القص Q^0 وعزوم الانحناء M^0 ، لهذه العتبة .

وتجرى بقية العمليات الحسابية ، باستخدام الجدول (٣ — ١) . ويبين العمود الأول من هذا الجدول ، قيم الاحداثيات السينية x لنقاط محور العقد (مأخوذة بعد كل ١م) ، أما العمود الثانى فيبين الاحداثيات الرأسية لهذه النقاط ، المحسوبة من المعادلة التالية :

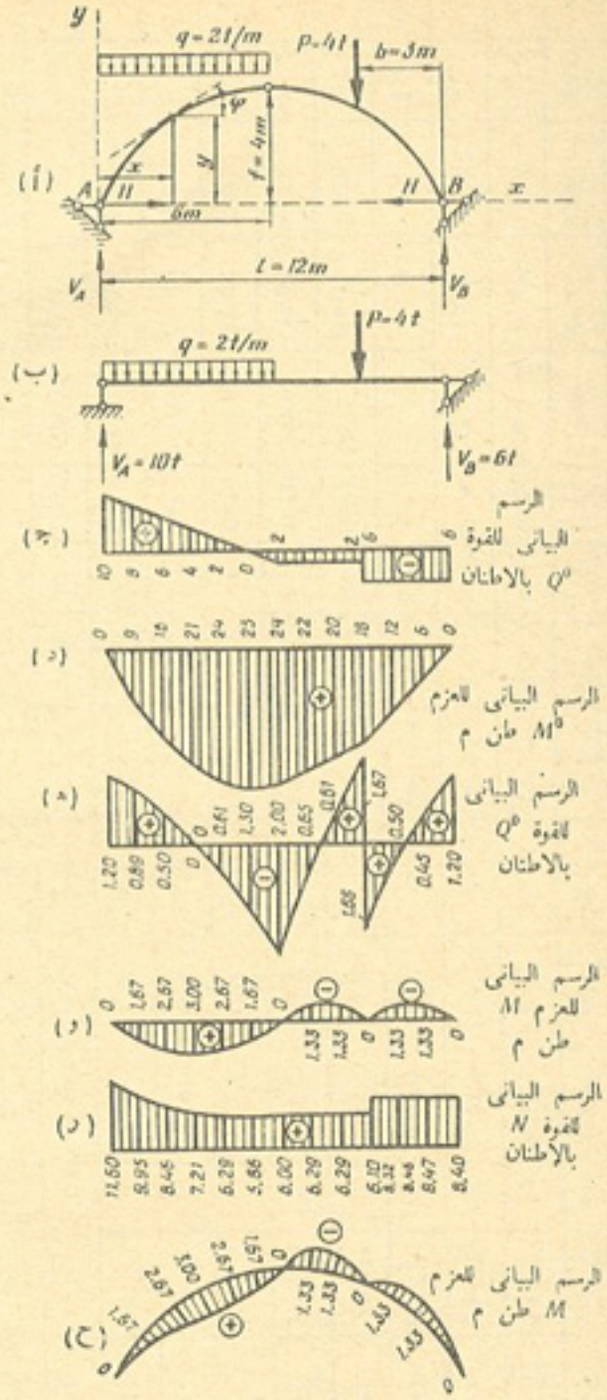
$$y = \frac{4f}{l^2}\,(l - x)x = \frac{4 \times 4}{12^2}\,(12 - x)x = \frac{12 - x}{9}\,x$$

وفى العمود الثالث من الجدول المذكور ، توجد قيم $\tan\phi$ ، المحسوبة من الصيغة التالية :

$$\tan\phi = y' = \frac{4f}{l^2}\,(l - 2x) = \frac{4 \times 4}{12^2}\,(12 - 2x) = 2\,\frac{6 - x}{9}$$

وتحتوى الاعمدة الثلاثة التالية 4 ، 5 ، 6 على قيم ϕ و $\sin\phi$ و $\cos\phi$. ويحتوى العمودان 7 و 13 على قيم Q^0 و M^0 على التوالى ، وهى مأخوذة من الرسوم البيانية الموضحة فى الشكل (٣ — ١٥ ، جـ ، د) . وتحتوى الأعمدة من 8 إلى 12 ، على قيم حاصل ضرب قوة القص Q^0 (للعتبة البسيطة) والقوة الدفعية ($H = 6\ t$) فى $\sin\phi$ و $\cos\phi$ ، والاحداثيات الرأسية y لنقاط محور العتبة .

وتبين الأعمدة الثلاثة الأخيرة 14 ، 15 ، 16 ، للجدول (٣ — ١) ، قيم الإجهادات أو القوى الداخلية Q و M و N ، المؤثرة فى المقاطع العرضية للعقد . وهذه القيم محسوبة من الصيغ



الشكل ٣ — ١٦

جدول ٣ — ١

x.m	y.m	tan φ	φ	sin φ	cos φ	Q^0 t	$Q^0 \sin\phi$ t	$Q^0 \cos\phi$ t	$-H \sin\phi$ t	$H \cos\phi$ t	$-Hy$ t m	M^0 t m	Q t	M tm	N t
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	1.333	53°08′	0.800	0.600	10	8.00	6.00	— 4.80	3.60	0	0	1.20	0	11.60
1	1.222	1.111	48°01′	0.743	0.669	8	5.94	5.35	— 4.46	4.01	— 7.33	9	0.89	1.67	9.95
2	2.222	0.889	41°38′	0.664	0.747	6	3.98	4.48	— 3.98	4.48	— 13.33	16	0.50	2.67	8.46
3	3.000	0.667	33°42′	0.555	0.832	4	2.22	3.33	— 3.33	4.99	— 18.00	21	0	3.00	7.21
4	3.556	0.444	23°56′	0.406	0.914	2	0.81	1.83	— 2.44	5.48	— 21.33	24	— 0.61	2.67	6.29
5	3.889	0.222	12°31′	0.217	0.976	0	0	0	— 1.30	5.86	— 23.33	25	— 1.30	1.67	5.86
6	4.000	0	0	0	1.000	— 2	0	— 2.00	0	6.00	— 24.00	24	— 2.00	0	6.00
7	3.889	— 0.222	—12°31′	— 0.217	0.976	— 2	0.43	— 1.95	1.30	5.86	— 23.33	22	— 0.65	— 1.33	6.29
8	3.556	— 0.444	—23°56′	— 0.406	0.914	— 2	0.81	— 1.83	2.44	5.48	— 21.33	20	0.61	—1.33	6.29
9	3.000	— 0.667	—33°42′	— 0.555	0.832	— 2 — 6	1.11 3.33	— 1.66 — 4.99	3.33	4.99	— 18.00	18	1.67 — 1.66	0	6.10 8.32
10	2.222	— 0.889	—41°38′	— 0.664	0.747	— 6	3.98	— 4.48	3.98	4.48	— 13.33	12	— 0.50	— 1.33	8.46
11	1.222	— 1.111	—48°01′	— 0.743	0.669	— 6	4.46	— 4.01	4.46	4.01	— 7.33	6	0.45	— 1.33	8.47
12	0	— 1.333	—53°08′	— 0.800	0.600	— 6	4.80	— 3.60	4.80	3.60	0	0	1.20	0	8.40

رقم (3—3)، التى تنتج منها قيم Q بجمع القيم المدرجة فى العمودين 9 و 10 من الجدول (٣—١)، وقيم M بجمع القيم المدرجة فى العمودين 12 و 13 ، وقيم N بجمع القيم المدرجة فى العمودين 8 و 11 .

وطبقاً لمعطيات الأعمدة الثلاثة من الجدول (٣ — ١) تم تخطيط الرسوم البيانية لـ Q و M و N الناشئة فى المقاطع العرضية للعقد * (شكل ٣ — ١٦ ، هـ ، و ، ز) . والاحداثيات الرأسية هنا ، وضعت من المحور الأفقى . أن أحد هذه الرسوم البيانية (الرسم البيانى لـ M) موضح بالإضافة إلى ذلك فى الشكل (٣ — ١٦ ، ح) باحداثيات رأسية موضوعة من المنحنى الذى يعبر عن محور العقد .

٢ — الطريقة التخطيطية

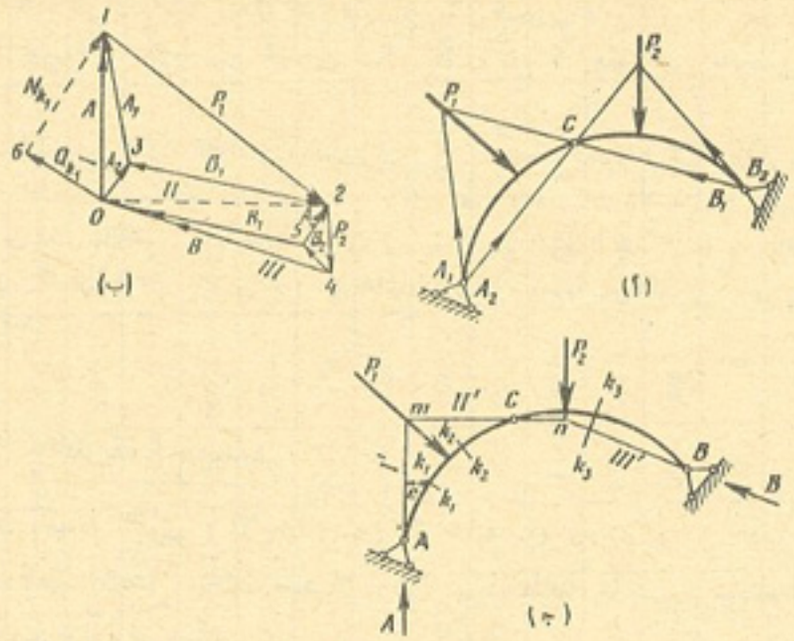
إن تحديد القوى (الاجهادات) الداخلية Q و M و N فى المقاطع العرضية للعقد المتصل بثلاث مفصلات ، يتم بتخطيط ما يسمى بمضلع الضغط (polygon of pressure) .

ويبين الشكل (٣ — ١٧ ، أ) أحد العقود المتصلة بثلاث مفصلات ، وقد حمل بالقوتين P_1 و P_2 . وفى هذه الحالة ، قد سلطت قوة واحدة إلى يسار المفصلة C وقوة واحدة أيضاً إلى يمين المفصلة المذكورة ، ولذلك ليست هناك حاجة إلى تحديد محصلة الأحمال المؤثرة على كل قسم من قسمى العقد . وقد تم تحديد ردى فعل المسندين A و B ** ، بالطريقة التخطيطية ، وذلك برسم مضلع القوى المبين فى الشكل (٣ — ١٧ ، ب) .

والآن نرسم المضلع الحبلى (شكل ٣ — ١٧ ، جـ) ، المناظر لمضلع القوى (شكل ٣ — ١٧ ، ب) . نمد رد فعل المسند الأيسر A (شكل ٣ — ١٧ ، جـ) حتى يتقاطع مع القوة P_1 . ثم نرسم من نقطة تقاطعهما m ، المستقيم II' ، بحيث يوازى المستقيم II لمضلع القوى (إن المستقيم II هو عبارة عن محصلة القوتين A و P_1) . ثم نرسم المستقيم III' من نقطة تقاطع الشعاع II مع القوة P_2 ، وهى نقطة n ، بحيث يوازى المستقيم III ، الذى يمثل محصلة القوى A و P_1 و P_2 .

* لقد اتخذت مقاييس رسم مختلفة للاحداثيات الرأسية فى الرسوم البيانية المختلفة .

** راجع الشكل (٣ — ٨) فى البند (٣ — ٢) مع الشرح الملحق به .



الشكل ٣ — ١٧

وإذا كان الرسم صحيحا ، نرى بأن المستقيم II' (المستقيم $m - n$) الذى يمثل خط تأثير محصلة القوتين A و P_1 ، يجب أن يمر فى المفصلة C ، وأن الشعاع III' ، المنطبق على خط تأثير رد فعل المسند B ، يجب أن يمر فى مفصلة المسند اليمنى .

أن المضلع الحبلى $I' - II' - III'$ المرسوم بهذه الطريقة (شكل ٣—١٧ ، ج) يسمى بمضلع الضغط ، وذلك لأن كل مستقيم منه ينطبق على مستقيم الضغط ، المنتقل من أحد قسمى العقد إلى القسم الآخر .

وإن كل ضلع من أضلاع مضلع الضغط ، ينطبق مع خط تأثير محصلة كافة القوى اليسرى (أو اليمنى) فى العقد . وبالفعل ، لا يؤثر إلى يسار المقطع $k_1 - k_1$ (شكل ٣—١٧ ، ج) إلا رد فعل المسند A فقط ، إذن نجد بأن المستقيم I' من المضلع الحبلى ، المنطبق مع اتجاه القوة A ، يمثل أيضاً خط تأثير محصلة القوى اليسرى ، للمقطع الذى يجرى بحثه . وتؤثر إلى يسار المقطع $k_2 - k_2$ قوة رد الفعل

A والقوة P_1 ، اللتان تمر محصلتهما فى نقطة تقاطعهما وتنطبق مع المستقيم II' من مضلع القوى . وتؤثر إلى يسار المقطع $k_3 - k_3$ ، القوى A و P_1 و P_2 ، التى تمر محصلتها فى نقطة تقاطع المستقيم II' مع القوة P_2 (وذلك لأن المستقيم II' هو عبارة عن خط تأثير محصلة القوتين A ، P_1) وينطبق مع المستقيم III' :

وهكذا نجد بالفعل ، بأن أى ضلع من اضلاع مضلع الضغط $AmnB$ يمثل خط تأثير محصلة كافة القوى ، الواقعة إلى يسار (أو يمين) المقطع الذى يجرى بحثه . وتحدد قيمة هذه المحصلة فى كل مقطع من المقاطع ، باستخدام مضلع القوى (شكل ٣ — ١٧ ، ب) ، مثلاً نجد بأن قيمة محصلة القوتين A و P_1 ، تساوى طول المستقيم II ، المقاس بنفس مقياس رسم القوى .

ويمكن باستخدام مضلع القوى ومضلع الضغط ، تحديد كافة القوى الداخلية فى أى مقطع من مقاطع العقد . وعلى سبيل المثال ، يمكن إيجاد عزم الانحناء حول مركز ثقل المقطع المعين بضرب محصلة القوى (اليسرى أو اليمنى) ، فى ذراعها (المسافة من المحصلة إلى مركز المقطع) .

إن عزم الانحناء فى المقطع $k_1 - k_1$ (شكل ٣ — ١٧ ، ج) يساوى ما يلى :

$$M_{k_1} = Ae$$

حيث e — ذراع القوة ، أى طول العمود النازل من مركز ثقل المقطع المعين (شكل ٣ — ١٧ ، ج) على اتجاه محصلة القوى اليسرى ، وفى هذه الحالة بالذات ، على اتجاه رد فعل المسند A .

ولتحديد القوة الطولية وقوة القص ، المؤثرتين فى المقطع $k_1 - k_1$ ، نحلل محصلة القوى اليسرى (المستقيم I) ، أى رد الفعل A ، إلى مركبتين هما المركبة $1 - 6$ ، الموازية لمماس محور العقد فى المقطع المذكور ، والمركبة $6 - 0$ ، العمودية على المماس المذكور (شكل ٣ — ١٧ ، ب) . أن المركبة $6 - 0$ تمثل قوة القص Q فى المقطع $k_1 - k_1$ من العقد ، أما المركبة $1 - 6$ فتمثل القوة الطولية N فى نفس المقطع المذكور .

إن مضلع الضغط يعطى انطباعاً واضحاً للعين ، عن سلوك العقد عند تعرضه للأحمال . ويتضح من الشكل (٣ – ١٧ ، ج) بأن النصف أو القسم الأيمن للعقد فى المثال المذكور (حيث تمر محصلة القوى فى كل مقطع من المقاطع ، فى أسفل المحور) ينحنى بحيث يكون تحدبه إلى الأعلى ، أى يزداد انحناؤه أكثر من السابق . أما فى القسم الأيسر فيحدث العكس ، حيث يتجه تحدب العقد الناجم عن الإنحناء ، إلى الأسفل ، أى تحدث استقامة فى محور العقد .

وعندما تؤثر على العقد ، مجموعة من القوى (الأحمال) المركزة P_1 و P_2 و P_3 وإلى آخره ، يرسم مضلع الضغط بالطريقة التالية :

١ – تستخرج محصلة كافة القوى الخارجية الفعالة المؤثرة فى النصف الأيسر للعقد وهى المحصلة R_1 (بدون أخذ ردود فعل المساند فى الاعتبار) ،

٢ – تستخرج محصلة كافة القوى الخارجية الفعالة . المؤثرة فى النصف الأيمن للعقد ، وهى المحصلة R_2 (بدون أخذ ردود فعل المساند فى الاعتبار) ،

٣ – تحدد ردود فعل المساند A و B (الناجمة عن تأثير المحصلتين R_1 و R_2) ،

٤ – يرسم مضلع القوى ومضلع الضغط (مع أخذ كافة القوى P فى الاعتبار) .

ولكل حمل من الأحمال المؤثرة على العقد المتصل بثلاث مفصلات ، مضلع ضغط واحد فقط ، مناظر له . وعندما يؤثر على العقد حمل موزع ، يتحول مضلع الضغط إلى منحنى الضغط .

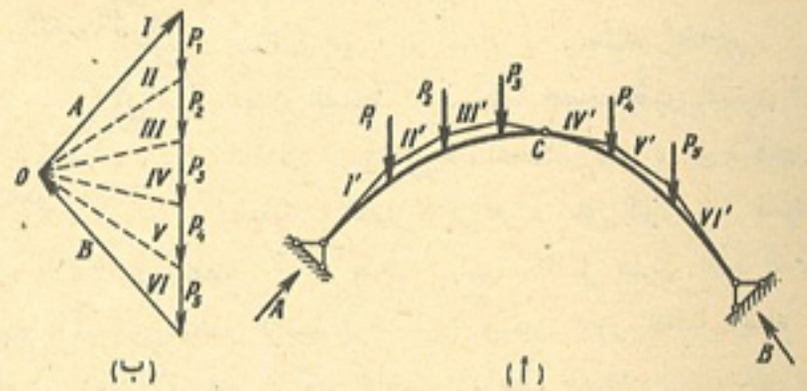
وإذا خططنا العقد بشكل يجعل محوره ينطبق مع مضلع الضغط ، الناجم عن الحمل المعين ، عندئذ لا تظهر فى العقد عزوم انحناء ولا قوى قص . وفى هذه الحالة سيكون العقد معرضا للانضغاط فقط ، وهو أمر ملائم للغاية ، وخاصة بالنسبة للإنشاءات الحجرية والخرسانية : ويسمى هذا الشكل التخطيطى لمحور العقد ، بالشكل الواقعى المقبول .

ويجب أن نشير هنا ، إلى أننا نستطيع رسم أو إيجاد مضلع الضغط ، بالطريقة التحليلية أيضا . وللقيام بذلك يجب تحديد قيم M و N فى عدد من المقاطع العرضية ثم إيجاد اللاتمركزية ، من المعادلة للعقد التالية :

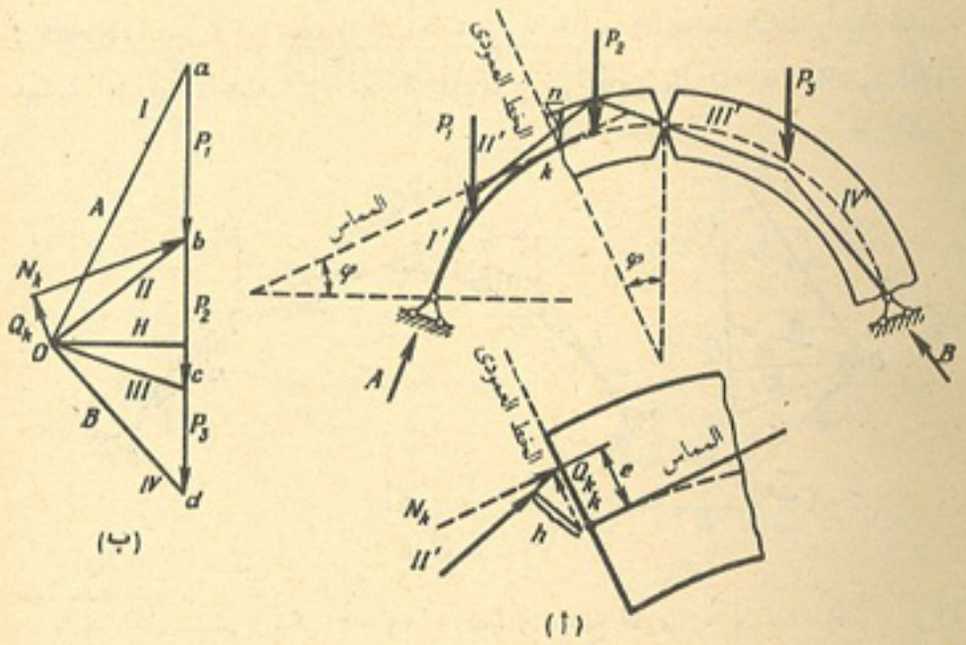
$$e = \frac{M}{N}$$

نضع من محور العقد على المستقيم العمودى عليه ، الأقسام المساوية لقيم اللاتمركزية ، ثم نوصل أطرافها مع بعضها البعض ، فنحصل على مضلع الضغط .

ويبين الشكل (٣ – ١٨) طريقة رسم مضلع الضغط فى العقد ، وقد تم



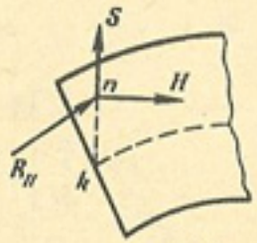
الشكل ٣ – ١٨



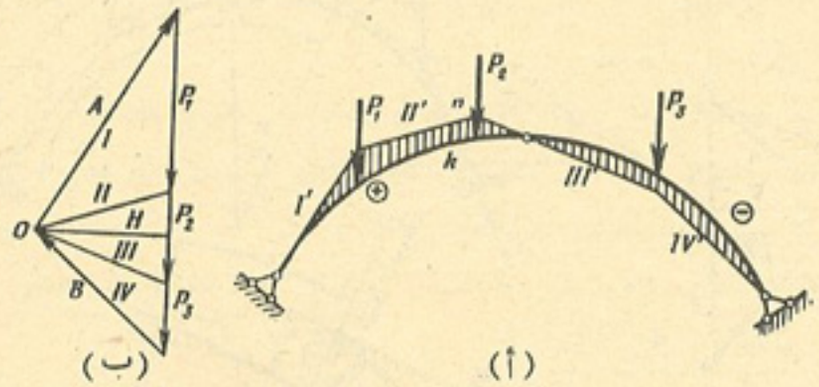
الشكل ٣ – ١٩

تحديد ردود فعل مسانده سابقاً (شكل ٣ — ٩) . ويبين الشكل (٣ — ١٩) كيفية أو طريقة تحديد القوى الداخلية (الاجهادات) فى المقطع k من العقد .

وعندما تؤثر على العقد قوى (أحمال) رأسية فقط ، نجد بأن المركبة الأفقية لأية محصلة من محصلات القوى (الأحمال) اليسرى أو اليمنى ، تساوى القوة الدفعية H* . ولذلك ، إذا أقمنا من أية نقطة من نقاط محور العقد (شكل ٣ — ٢٠) ، كنقطة k مثلا ، مستقيما عموديا $n - k$ ، وجعلناه يتقاطع مع مضلع الضغط ، ثم حللنا محصلة القوى اليسرى فى نقطة التقاطع n (وهى هنا المحصلة R_{II}) ، إلى مركبتين رأسية وأفقية ، هما S و H ، على التوالى ، فسوف نجد بأن عزم الانحناء فى المقطع k ، سوف يساوى حاصل ضرب القوة الدفعية H فى القسم الرأسى (القطعة الرأسية) $n - k$ ، بين محور العقد وضلع مضلع الضغط ، وذلك لأن عزم المركبة الرأسية S حول نقطة k ، يساوى صفرا . وينتج من ذلك ، بأنه عند تأثير الحمل الرأسى على العقد ، تكون جميع الأقسام (القطع) المحصورة بين مضلع الضغط ومحور العقد ، بمثابة احداثيات رأسية للرسوم البيانية لعزوم الانحناء ، مقاسة بمقياس رسم معين وثابت ، بالنسبة لكافة



الشكل ٣ — ٢٠



الشكل ٣ — ٢١

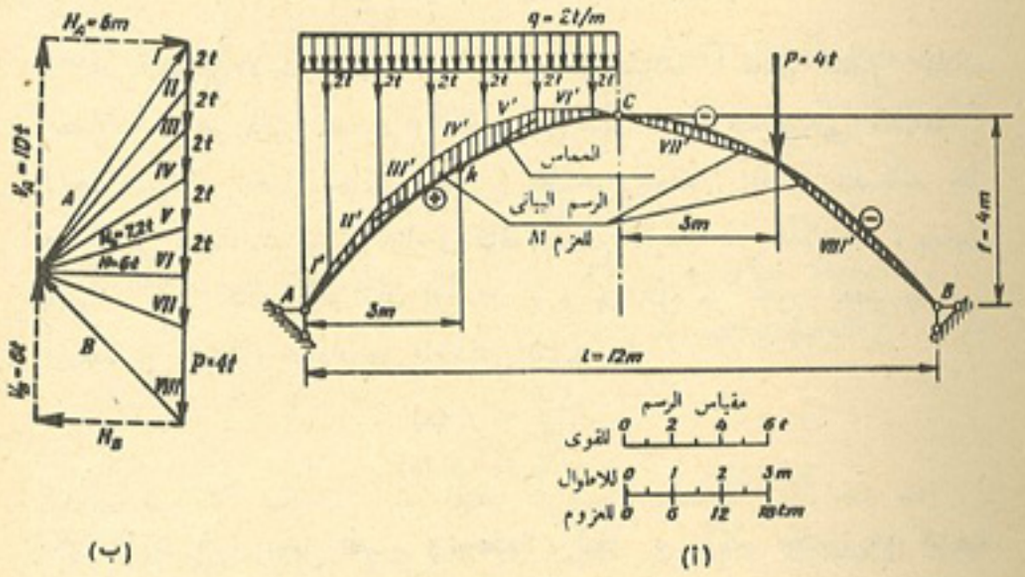
* إن لكل مستقيم (شكل ٣ — ١٩ ، ب) فى مضلع القوى ، فى هذه الحالة ، مركبة أفقية واحدة ، مساوية للقوة الدفعية H.

مقاطع العقد . أن الرسم البيانى لعزوم الانحناء المرسوم بهذه الطريقة ، للعقد المبين فى الشكل (٣ — ١٩ ، أ) ، موضح فى الشكل (٣ — ٢١) ، ويكون الرسم فى هذه الحالة ، مخططا من جهة الألياف المضغوطة .

مثال ٣ : يطلب استخدام الطريقة التخطيطية لرسم مضلع الضغط ، للعقد المصمم فى المثال ٢ (لاحظ الشكل ٣ — ١٦) ، وتحديد القوى الداخلية فى المقطع العرضى k من العقد المذكور (شكل ٣ — ٢٢ ، أ) .

الحل : نقوم بتقسيم الحمل الموزع بانتظام ، المؤثر على العقد فى القسم الافقى الذى يبلغ طوله ٦ م ، إلى ٦ اقسام طول كل منها ١ م ، ونعوض عن الحمل المؤثر على كل منها ، بقوة مركزة قدرها ٢ طن . ونستخدم ردود فعل المساند ، التى حصلنا عليها بعد حل المثال ٢ ، والحمل المعين ، لرسم مضلع القوى ، ثم بعد ذلك نرسم المستقيمات الثمانية المرقمة من I إلى VIII (شكل ٣ — ٢٢ ، ب) .

وبرسم المستقيمات الموازية لهذه المستقيمات (شكل ٣ — ٢٢ ، أ) ، نحصل على مضلع الضغط . أن الأقسام المخططة بمستقيمات رأسية ، الواقعة بين مضلع الضغط ومحور العقد ، تمثل الرسم البيانى للعزوم M . وهذا الرسم مشابه للرسم البيانى للعزوم M ، الناتج فى



الشكل ٣ — ٢٢

المثال ٢ ، بالطريقة التحليلية ، والموضح فى الشكل (٣ – ١٦ ، ح) ، ولكنه يختلف عنه بالتخطيط الرأسى للاحداثيات الرأسية (بدلا من التخطيط باتجاه الخطوط العمودية على محور العقد ، كما فى الشكل ٣ – ١٦ ، ح) وبوجوده فى جهة الألياف المضغوطة (بدلا من وجوده ، فى جهة الألياف المشدودة ، شكل ٣ – ١٦ ، ح) .

ويبين الشكل (٣ – ٢٢) مقاييس الرسم المتخذة للقوى وللأطوال . وبالإضافة إلى ذلك أعطى مقياس الرسم ، الذى تقاس بواسطته الإحداثيات الرأسية لعزوم الانحناء ، على الرسم البيانى للعزوم M . وقد تم الحصول عليه ، بضرب الأعداد المبينة على مقياس رسم الأطوال ، فى قيمة القوة الدفعية H ، التى تساوى ٦ أطنان .

ويحدد عزم الانحناء فى النقطة k ، بقياس الاحداثى الرأسى للرسم البيانى للعزوم M ، فوق هذه النقطة ، فنحصل على : $M_k = 3$ tm . أن مماس محور العقد فى نقطة k (شكل ٣ – ٢٢ ، أ) يوازى المستقيم IV (شكل ٣ – ٢٢ ، ب) الذى يساوى (فى المقياس المتخذ للقوى) محصلة كافة القوى المؤثرة على العقد ، إلى يسار المقطع k . إذن $Q_k = 0$ ، والقوة الطولية N_k تساوى طول القسم IV ، أى تساوى ٧,٢ طن .

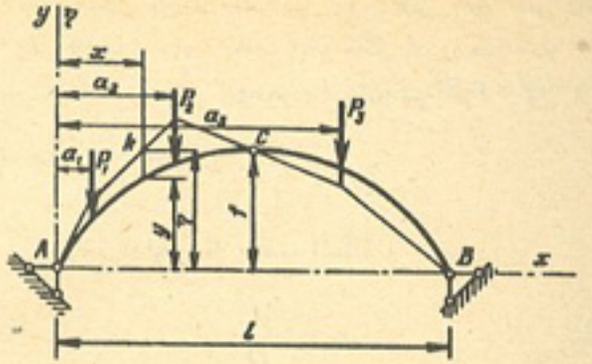
البند ٣ – ٤ : تصاميم العقود المتصلة بثلاث مفصلات ، الأكثر ملاءمة من الناحية الاقتصادية

إن التصميم الأكثر ملاءمة من الناحية الاقتصادية ، للعقد المتصل بثلاث مفصلات ، هو ذلك التصميم (التخطيط) الذى ينطبق فيه منحنى الضغط ، الناجم عن تأثير الحمل الساكن المعين ، مع محور العقد . إذن ، عند تأثير مثل هذا الحمل ، نجد بأن عزم الانحناء فى كافة المقاطع العرضية لمثل هذا العقد ، يساوى صفراً . وإذا كان الأحداثيان الرأسيان y و η لكل من محور العقد ومنحنى الضغط على التوالى ، يحددان من المعادلتين التاليتين :

$$y = f(x)$$
$$\eta = \phi(x)$$

يكون الشرط الذى يجعل تصميم (تخطيط) العقد ، أكثر ملاءمة من الناحية الاقتصادية ، هو التطابق ، أو التساوى :

$$y = \eta$$



الشكل ٣ – ٢٣

والآن نبحث الحالة التى يؤثر فيها على العقد حمل رأسى فقط (شكل ٣ – ٢٣) . نضع الصيغة المعبرة عن عزم القوى اليسرى حول أية نقطة من نقاط منحنى الضغط ، كنقطة k مثلا :

$$M_k = V_A x - H \eta - \Sigma P (x - a) = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$\eta = \frac{V_A x - \Sigma P (x - a)}{H}$$

إن بسط المعادلة الأخيرة ، يساوى عزم الانحناء فى العتبة البسيطة ، فى المقطع الذى احداثيه السينى يساوى x ، أى M_x^0 ، ولذلك :

$$\eta = \frac{M_x^0}{H}$$

وباستخدام العلاقة $y = \eta$ ، نحصل على المعادلة التالية ، للعقد الأكثر ملاءمة من الناحية الاقتصادية :

$$y = \frac{M_x^0}{H}$$

إذن عند تأثير الأحمال الرأسية ، يكون محور العقد أكثر ملاءمة من الناحية الاقتصادية ، إذا تغير تصميمه (تخطيطه) ، طبقا لقانون تغير عزم العتبة البسيطة .

مثال : لدينا عقد متصل بثلاث مفصلات ، يؤثر عليه حمل رأسى موزع بانتظام (على امتداد باعه) بشدة قدرها q . يطلب بيان شكل محور هذا العقد ، الأكثر ملاءمة من الناحية الاقتصادية ، إذا علمنا بأن باعه هو l ، وسهم انحنائه f ، والاحداثى الخاص بالمفصلة المتوسطة C هو $x = \frac{l}{2}$.

الحل : نستخدم المعادلة التالية لحل هذه المسألة :

$$y = \frac{M_x^0}{H}$$

حيث نجد فى هذه الحالة :

$$M_x^0 = \frac{ql}{2}\,x - qx\,\frac{x}{2} = \frac{qx}{2}\,(l - x)$$

$$H = \frac{M_c^0}{f} = \frac{q\,\frac{l}{2}}{2}\left(l - \frac{l}{2}\right) \times \frac{1}{f} = \frac{ql^2}{8f}$$

إذن :

$$y = \frac{\frac{qx}{2}\,(l - x)\;8f}{ql^2} = \frac{4f}{l^2}\,(l - x)\,x$$

أى أن محور العقد الأكثر ملاءمة من الناحية الاقتصادية ، فى هذه الحالة ، يجب أن يخطط طبقا لقطع المكافىء التربيعى .

البند ٣ ــ ٥ : تصميم العقود المتصلة بثلاث مفصلات ، المعرضة لتأثير الأحمال المنتقلة

١ ــ خطوط تأثير ردود فعل المساند

نأخذ عقداً متصلاً بثلاث مفصلات ، ونسلط عليه القوة الرأسية أو الحمل الرأسى $P = 1$ ، على مسافة x من المسند الأيسر (شكل ٣ ــ ٢٤ ، أ) ، ثم نضع معادلات عزوم كافة القوى ، حول مفصلات المساند :

$$\Sigma\, M_B = V_A\, l - 1 \times (l - x) = 0$$

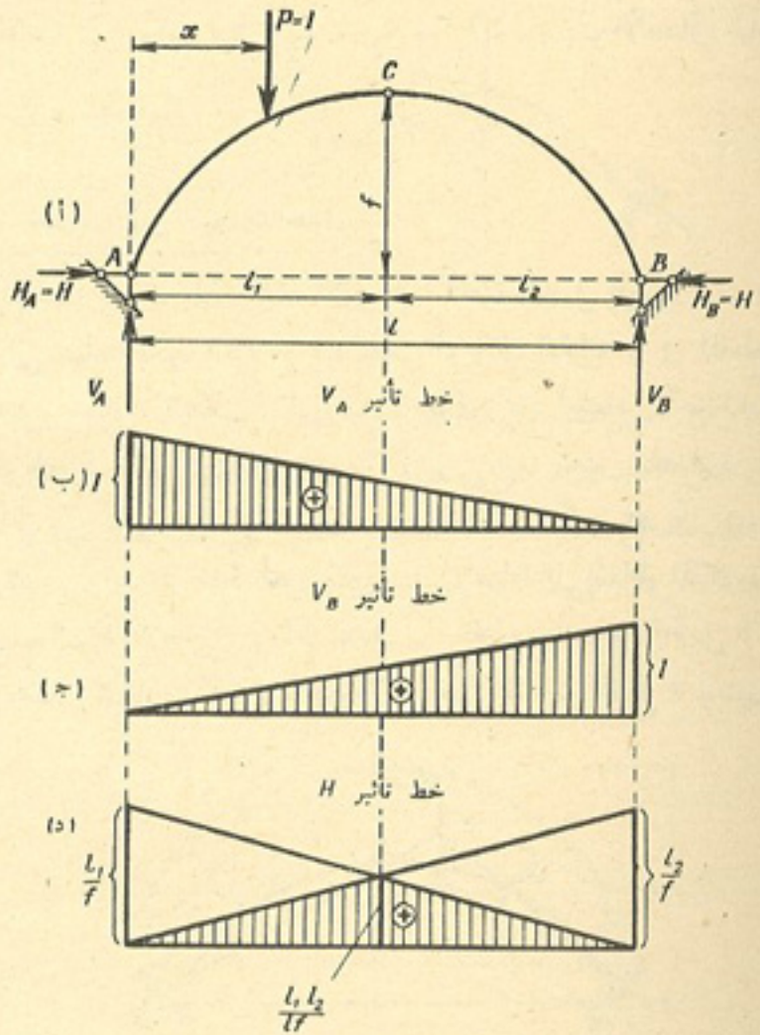
$$\Sigma\, M_A = -\,V_B\, l + 1 \times x = 0$$

ومن هاتين المعادلتين ، نجد ما يلى :

$$V_A = \frac{l - x}{l}$$

$$V_B = \frac{x}{l}$$

إن معادلتى V_B و V_E تنطبقان أو تتشابهان مع معادلتى ردود فعل المساند ،



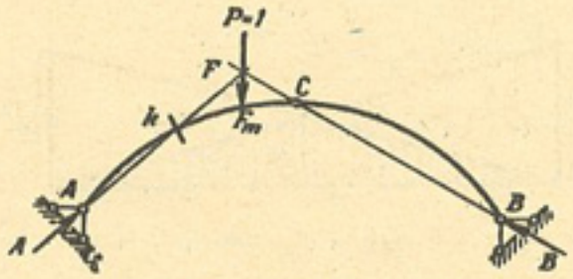
الشكل ٣ ــ ٢٤

الناتجتين فى البند (٢ – ٢) للعتبة البسيطة . وبالتالى فإن خطوط تأثير V_A و V_B لا تختلف أبدا عن خطوط تأثير ردود فعل المساند فى العتبة البسيطة المحمولة على مسندين ، وهذه الخطوط مبينة فى الشكل (٣ – ٢٤، ب، ج) :

وتحدد القوة الدفعية H من المعادلة $H = \frac{M_c^0}{f}$ ، التى ينتج منها أن شكل خط تأثير H ، هو نفس شكل خط تأثير عزم العتبة M_c^0 ، ولا يختلف عنه إلا بقيمة المعامل الثابت $\frac{1}{f}$. وخط التأثير هذا ، مبين فى الشكل (٣ – ٢٤ ، د)، وفى الحالة الخاصة التى يكون فيها $l_1 = l_2 = \frac{l}{2}$ ، نجد بأن الأحداثى الرأسى تحت المفصلة C يساوى $\frac{l}{4f}$.

٢ – خطوط تأثير القوى الداخلية

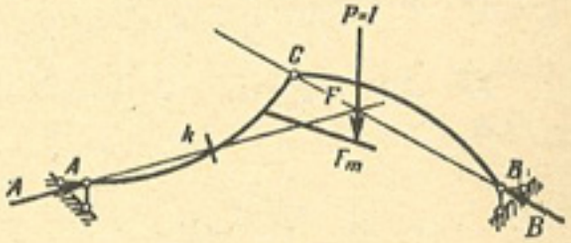
نقوم سلفا ببحث طرق إيجاد الأوضاع الخاصة للحمل الرأسى P ، المؤثر على العقد، التى عندها يكون العزم أو قوة القص أو القوة الطولية ، فى المقطع k الذى يجرى بحثه ، مساوية للصفر ، أى نبحث طرق إيجاد أوضاع الأحداثيات الرأسية الصفرية لخطوط تأثير كل من M_k و Q_k و N_k . وتعتبر مفصلات المساند ، من النقاط التى تكون فيها الاحداثيات الرأسية لخطوط تأثير M_k و Q_k و N_k ، مساوية للصفر . وتوجد نقاط أخرى كهذه ، بالإضافة إلى النقاط المذكورة . وسوف نسمى هذه النقاط الأخيرة ، بنقاط الصفر : مثلا ، عند وجود الحمل P فى النقطة F_m من العقد (شكل ٣–٢٥) ، نجد بأن عزم الانحناء فى المقطع k يساوى صفراً ،



الشكل ٣ – ٢٥

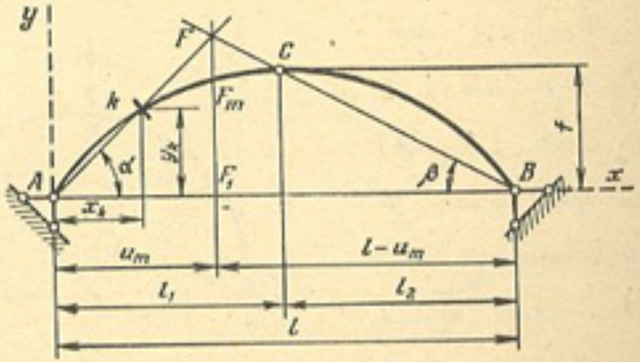
وذلك لأن محصلة القوى اليسرى (رد فعل المسند A) فى هذه الحالة، تمر فى المقطع k . والنقطة F_m تحدد وضع نقطة الصفر لعزم الانحناء فى المقطع k . وتقع النقطة F_m على نفس العمود (المستقيم الرأسى) الذى تقع عليه النقطة F – نقطة تقاطع المستقيمين Ak و BC .

وبالنسبة للعقد المبين فى الشكل (٣ – ٢٦) ، يكون عزم الانحناء فى المقطع k ، مساوياً للصفر ، إذا كان الحمل P مؤثراً على الكابول (المثبت فى العقد



الشكل ٣ – ٢٦

لهذا الغرض، فى القسم الواقع بين المقطع k والمفصلة المتوسطة C) فى النقط F_m ، وذلك لأن رد فعل المسند A ، يمر فى هذه الحالة خلال النقطة k . وإذا لم يكن الكابول موجوداً بالفعل ، لوجدنا بأن العقد لا يحتوى على نقطة صفر حقيقية لعزم الانحناء فى المقطع k . وفى الواقع ، إذا نقلنا الحمل P بصورة عمودية ، إلى



الشكل ٣ – ٢٧

الأعلى (شكل ٣ – ٢٦) وجعلناه يؤثر على القسم الأيمن للعقد ، فسوف نجد بأن اتجاه رد فعل المسند A يتغير (سوف يمر رد الفعل هذا ، خلال المفصلتين A و C) ، وسوف لا يكون عزم الانحناء فى المقطع k ، مساويا للصفر .

نرمز إلى الأحداثى السينى لنطقة الصفر التابعة لعزم الانحناء فى المقطع k ، بالرمز u_m ، أى للنقطة F_m (شكل ٣ – ٢٧) . ومن المثلثين AFF_1 و BFF_1 نجد ما يلى :

$$\overline{FF_1} = u_m \tan \alpha = u_m \frac{y_k}{x_k}$$

$$\overline{FF_1} = (l - u_m) \tan \beta = \frac{(l - u_m) f}{l_2}$$

لهذا يكون :

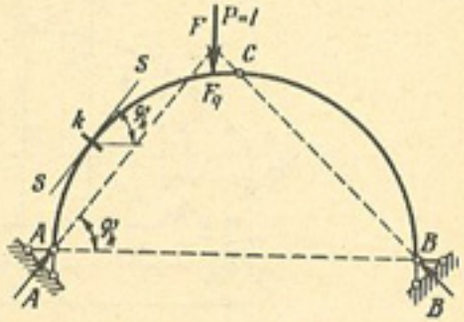
$$\frac{u_m \; y_k}{x_k} = \frac{(l - u_m) f}{l_2}$$

وينتج من ذلك ، أن :

$$u_m = \frac{l \, f \, x_k}{y_k \, l_2 + x_k \, f} \qquad (3-4)$$

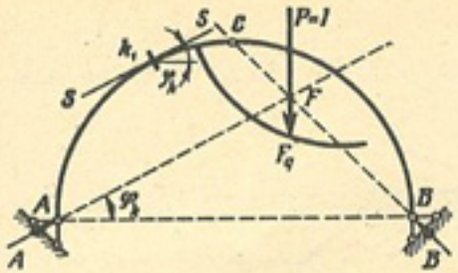
إن الصيغة الناتجة تساعد على إيجاد الأحداثى السينى u_m لنقطة الصفر التابعة لخط تأثير عزم الانحناء M_k بالطريقة التحليلية .

ولتحديد نقطة الصفر التابعة لقوة القص Q_k (شكل ٣ – ٢٨) نرسم من مفصلة المسند اليسرى A ، مستقيما موازيا لمماس محور العقد $S - S$ ، فى المقطع k ، إلى أن يتقاطع مع اتجاه BC فى نقطة F . والآن إذا وضعنا الحمل P فى النقطة F_q ، التى تقع على نفس العمود الذى تقع عليه النقطة F ، لوجدنا بأن Q_k تصبح مساوية للصفر ، لأنه فى هذه الحالة ، سيؤثر إلى يسار المقطع k ،



الشكل ٣ – ٢٨

رد فعل المسند A فقط ، الموازى لمحور العقد فى نقطة k . وقوة القص فى المقطع k_1 من نفس العقد (شكل ٣ – ٢٩) ستساوى صفراً ، إذا جعلنا الحمل P يؤثر على الكابول (المثبت لهذا الغرض فى العقد ، فى القسم الواقع بين المقطع k_1 والمفصلة المتوسطة C) فى النقطة F_q ، الواقعة على نفس العمود الذى تقع عليه النقطة F – نقطة تقاطع المستقيمين AF و BC .



الشكل ٣ – ٢٩

ويتضح من الشكل (٣ – ٣٠) أن :

$$\overline{FF_1} = u_q \tan \phi_k$$

$$\overline{FF_1} = (l - u_q) \tan \beta$$

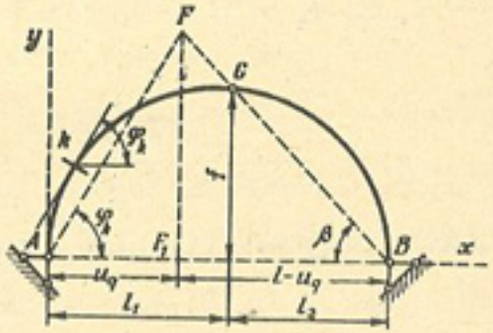
ولذا يكون لدينا :

$$u_q \tan \phi_k = (l - u_q) \tan \beta$$

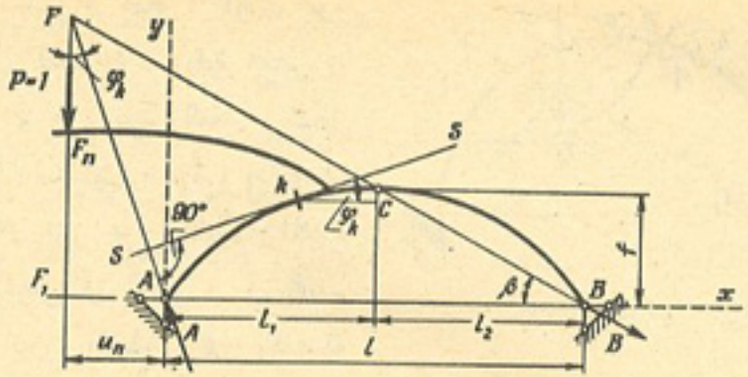
ومنها ينتج ما يلى :

$$u_q = \frac{l \tan \beta}{\tan \beta + \tan \phi_k} \qquad (3-5)$$

إن الصيغة الناتجة تساعد على إيجاد الأحداثى السينى لنقطة الصفر التابعة لخط تأثير قوة القص Q_k ، بالطريقة التحليلية .



الشكل ٣ – ٣٠



الشكل ٣ – ٣١

والقوة الطولية فى المقطع k ، تكون مساوية للصفر ، عندما يكون الحمل P مؤثراً على الكابول فى النقطة F_n (شكل ٣–٣١) الواقعة على نفس العمود الذى تقع عليه النقطة F . ويحدد موضع النقطة F ، متقاطع اتجاه AF ، العمودى على مماس محور العقد $S - S$ فى نقطة k ، مع اتجاه BC .

من الشكل (٣–٣١) نحدد ما يلى :

$$\overline{FF_1} = - u_n \cot \phi_k$$

$$\overline{FF_1} = (l - u_n) \tan \beta$$

ومنها ينتج أن :

$$- u_n \cot \phi_k = (l - u_n) \tan \beta$$

إذن :

$$u_n = \frac{l \tan \beta}{\tan \beta - \cot \phi_k} \qquad (3 - 6)$$

إن الصيغة الأخيرة ، تحدد تحليليا الأحداثى السينى لنقطة الصفر التابعة لخط تأثير القوة الطولية N_k .

وإذا كانت قيمة الأحداثى السينى ، المستخرجة من المعادلات (4 — 3) ،

(5 — 3) أو (6— 3) ، سالبة ، فهذا يعنى بأن نقطة الصفر التابعة لخط التأثير الذى يجرى بحثه ، تقع إلى يسار المسند A .

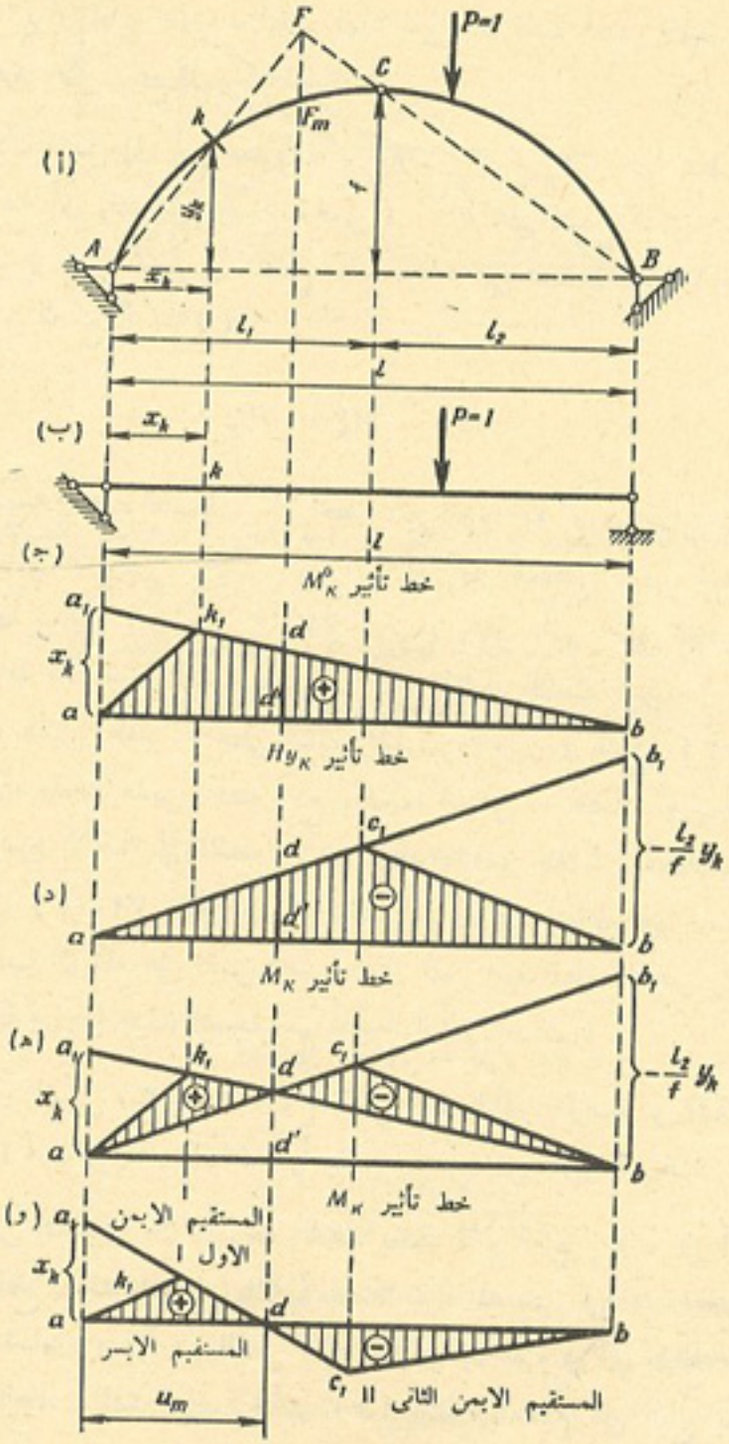
والآن ننتقل إلى رسم خطوط تأثير M_k ، Q_k ، N_k . نبدأ بخط تأثير العزم M_k . عند أى وضع من أوضاع الحمل $P = 1$ على العقد (شكل ٣–٣٢، أ)، نجد بأن عزم الانحناء فى المقطع k ، يحدد من الصيغة التالية (راجع الصيغة الثانية من الصيغ 3 — 3) :

$$M_k = M_k^0 - Hy_k$$

وينتج من هذه الصيغة ، بأن خط تأثير العزم M_k ، هو عبارة عن مجموع خطى التأثير التاليين : خط تأثير الانحناء M_k^0 للمقطع k من العتبة البسيطة التى باعها يساوى l (شكل ٣–٣٢ ، ب) وخط تأثير القوة الدفعية ، الذى تكون كافة احداثياته الرأسية مضروبة فى المعامل الثابت ($-y_k$) . والرسم التخطيطى لهذين الخطين (خطى التأثير المنفردين) مبين فى الشكل (٣–٣٢،جـ، د) . وإذا وضعنا هذين الخطين مع بعضهما البعض ، لحصلنا على خط التأثير المطلوب لعزم الانحناء فى المقطع k من العقد المتصل بثلاث مفصلات ، المبين فى الشكل (٣–٣٢ ، هـ) . إن النقطة d ، التى يتقاطع فيها المستقيمان a_1b و ab_1 يجب أن تقع على نفس العمود الذى تقع عليه نقطة الصفر F_m ، وهذا يعتبر بمثابة مراجعة جيدة لصحة رسم خطوط التأثير المذكورة .

ويبين الشكل (٣–٣٢ ، و) نفس خط التأثير الموضح فى الشكل (٣–٣٢ ، هـ) ، ولكن الاحداثيات الرأسية فيه مرسومة من محور السينات .

ويمكن أن نبين بأن المساحة المحاطة بخط تأثير العزم M_k ، فى أى مقطع k من مقاطع العقد المتصل بثلاث مفصلات ، المصمم على هيئة قطع مكافئ تربيعى ، تساوى صفراً . وبالفعل ، يجب أن يكون العزم فى أى مقطع من مقاطع مثل هذا العقد ، عند تعرضه لتأثير الحمل الموزع بانتظام على الباع بأكمله ، مساويا للصفر (راجع المثال المقدم فى البند ٣–٤) . وبعد تحديد قيمة هذا العزم



الشكل ٣ – ٣٢

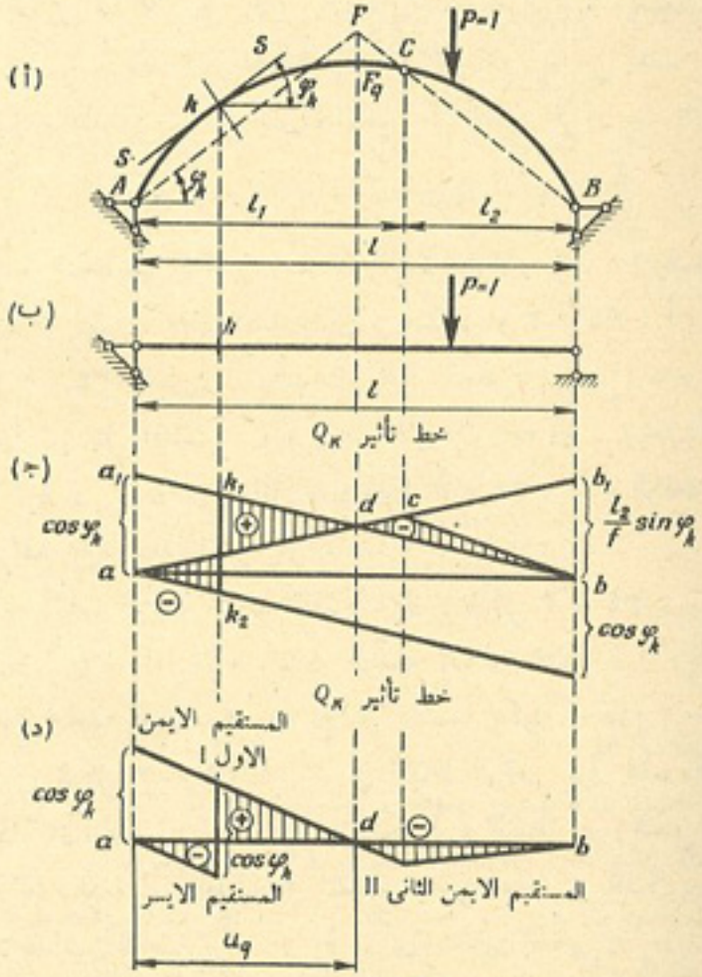
باستخدام خط التأثير ، نضع المعادلة التالية $M_k = q\,\Omega$ ، ولكن بما أن $M_k = 0$ ، إذن تصبح المساحة المحاطة بخط التأثير Ω مساوية للصفر أيضا : $\Omega = 0$.

وعند رسم خط تأثير قوة القص Q_k للمقطع k من العقد (شكل ٣ – ٣٣ ؛

أ) نستخدم الصيغة التالية (بناء على الصيغة الأولى من الصيغ المرقمة (3 — 3)) :

$$Q_k = Q_k^0 \cos \phi_k - H \sin \phi_k$$

حيث Q_k^0 – قوة القص فى المقطع k من العتبة البسيطة ، المحمولة على مسندين ، التى يبلغ طول باعها l (شكل ٣ – ٣٣ ، ب) .



الشكل ٣ – ٣٣

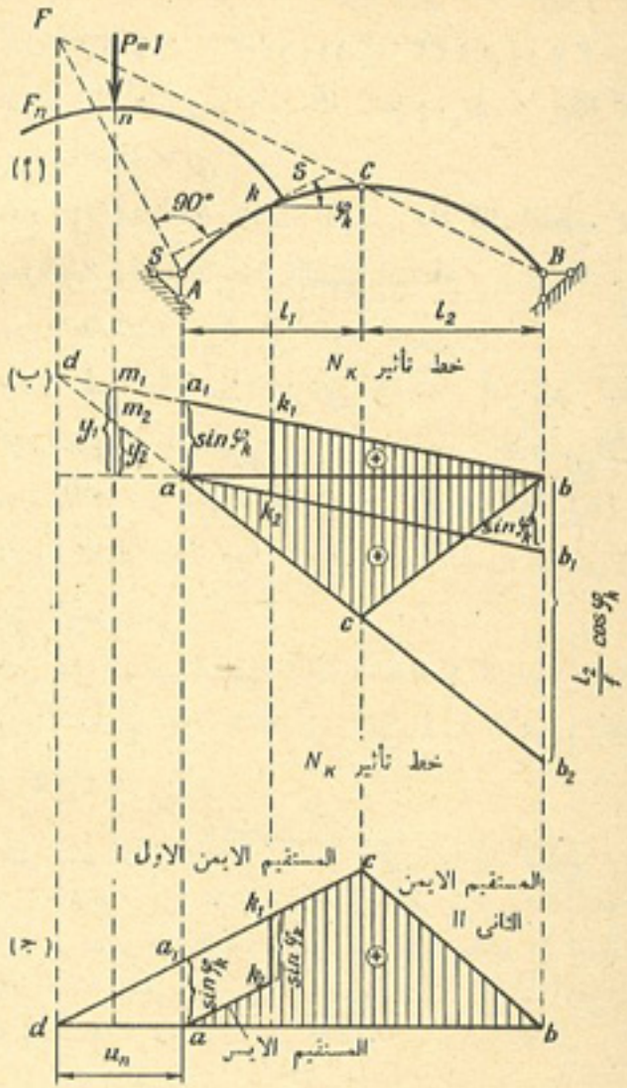
ومن معادلة قوة القص Q_k ، ينتج بأن خط التأثير المطلوب ، يمكن الحصول عليه بجمع خط تأثير قوة القص Q_k^0 ، الذى تكون جميع احداثياته الرأسية مضروبة فى المعامل الثابت $\cos \phi_k$ ، مع خط تأثير القوة الدفعية H ، الذى تكون جميع احداثياته الرأسية مضروبة فى المعامل الثابت ($-\sin \phi_k$) . أن نتيجة جمع خطى التأثير المذكورين . موضحة فى الشكل (٣ – ٣٣ ، ج) حيث يمثل الخط المحيطى $a\ b\ k_1\ k_2\ a$ خط تأثير $Q_k^0 \cos \phi_k$ ، ويمثل المثلث $a\ c\ b$ خط تأثير $H \sin \phi_k$. ويجب أن تقع النقطة d (شكل ٣ – ٣٣ ، ج) على نفس العمود الذى تقع عليه نقطة الصفر F_q . ويبين الشكل (٣ – ٣٣ ، د) نفس خط التأثير المذكور ، ولكن جميع إحداثياته الرأسية مرسومة من محور السينات . وعند رسم خط تأثير القوة الطولية N_k للمقطع k من العقد المذكور ، نستخدم الصيغة التالية [بناء على الصيغة الأخيرة من الصيغ رقم (3 — 3)] :

$$N_k = Q_k^0 \sin \phi_k + H \cos \phi_k$$

إن الجمع التخطيطى لمركبتى خط تأثير القوة الطولية N_k (وهما المركبتان $Q_k^0 \sin \phi_k$ و $H \cos \phi_k$) للعقد المبين فى الشكل (٣ – ٣٤ ، أ) ، موضح فى الشكل (٣ – ٣٤ ، ب) : وهنا يمثل الخط المحيطى $a\ b\ k_1\ k_2\ a$ خط تأثير $Q_k^0 \sin \phi_k$ ، ويمثل المثلث $a\ b\ c$ خط تأثير $H \cos \phi_k$. ويجب أن يتقاطع المستقيمان $a_1 b$ ، $a\ b_2$ فى النقطة d (شكل ٣ – ٣٤ ، ب) الواقعة على نفس العمود الذى تقع عليه نقطة الصفر F_n .

إن الاحداثيات الرأسية الموجبة للقسم da_1 (شكل ٣ – ٣٤ ، ب) تحدد قيمة $Q_k^0 \sin \phi_k$ ، أما الإحداثيات الرأسية السالبة للقسم $d\ a$ (الواقعة فوق المستقيم $a\ b$) فتحدد قيمة $H \cos \phi_k$ ، عندما يكون الحمل $P = 1$ مؤثرا على الكابول (شكل ٣ – ٣٤ ، أ) فى النقاط الواقعة فوق هذه الاحداثيات الرأسية . وإذا كان الحمل $P = 1$ مؤثرا على الكابول فى النقطة n (شكل ٣ – ٣٤ ، أ) ، عندئذ تحدد قيمة القوة الطولية فى المقطع k من العقد ، بالفرق بين القيمتين المطلقتين للاحداثيين الرأسيين y_1 و y_2 ، أى ستساوى القسم $m_1\ m_2$.

ويبين الشكل (٣ – ٣٤ ، ج) خط تأثير N_k ، الذى تكون احداثياته



الشكل ٣ – ٣٤

الرأسية مقامة من محور السينات .

وإذا حددنا نقاط الصفر سلفاً ، عند رسم خطوط تأثير M_k و Q_k و N_k ، يمكن عندئذ عدم القيام بالجمع التخطيطى لمركبات خطوط التأثير ، بل ترسم مباشرة باحداثيات رأسية مقامة من محور السينات . إن هذه الطريقة لرسم خطوط التأثير ، تسمى بطريقة نقطة الصفر . ويمكن بسهولة إقرار وتثبيت نظام رسم خطوط تأثير M_k و Q_k

و N_k بطريقة نقطة الصفر ، بواسطة خطوط تأثير هذه القوى (الاجهادات) ، المبينة فى الأشكال الثلاثة (٣ — ٣٢ ، و) و(٣ — ٣٣ ، د) و (٣ — ٣٤ ، ج) : وعلى سبل المثال ، إذا أردنا رسم خط تأثير العزم M_k ، بهذه الطريقة (شكل ٣ — ٣٢ ، و) يجب القيام بما يلى :

١ — نضع على العمود المار بالمسند الأيسر (إذا كان المقطع k واقعاً فى القسم أوالنصف الأيسرللعقد) قيمة الاحداثى السينى للمقطع k ، أى القسم أو القطعة x_k ؛

٢ — نعين نقطة الصفر F_m على المحور السينى ،

٣ — نوصل قمة الاحداثى الرأسى للمسند x_k مع نقطة الصفر d الواقعة على المحور السينى (المستقيم $a_1 d c_1$ ، المسمى بالمستقيم الأيمن الأول) ،

٤ — نعين المقطع k على المستقيم الأيمن الأول (النقطة k_1) ،

٥ — نوصل النقطة k_1 مع «صفر» على المسند الأيسر (المستقيم $k_1 a$ المسمى بالمستقيم الأيسر) ،

٦ — نعين على المستقيم الأيمن الأول ، المفصلة المتوسطة C (النقطة c_1) :

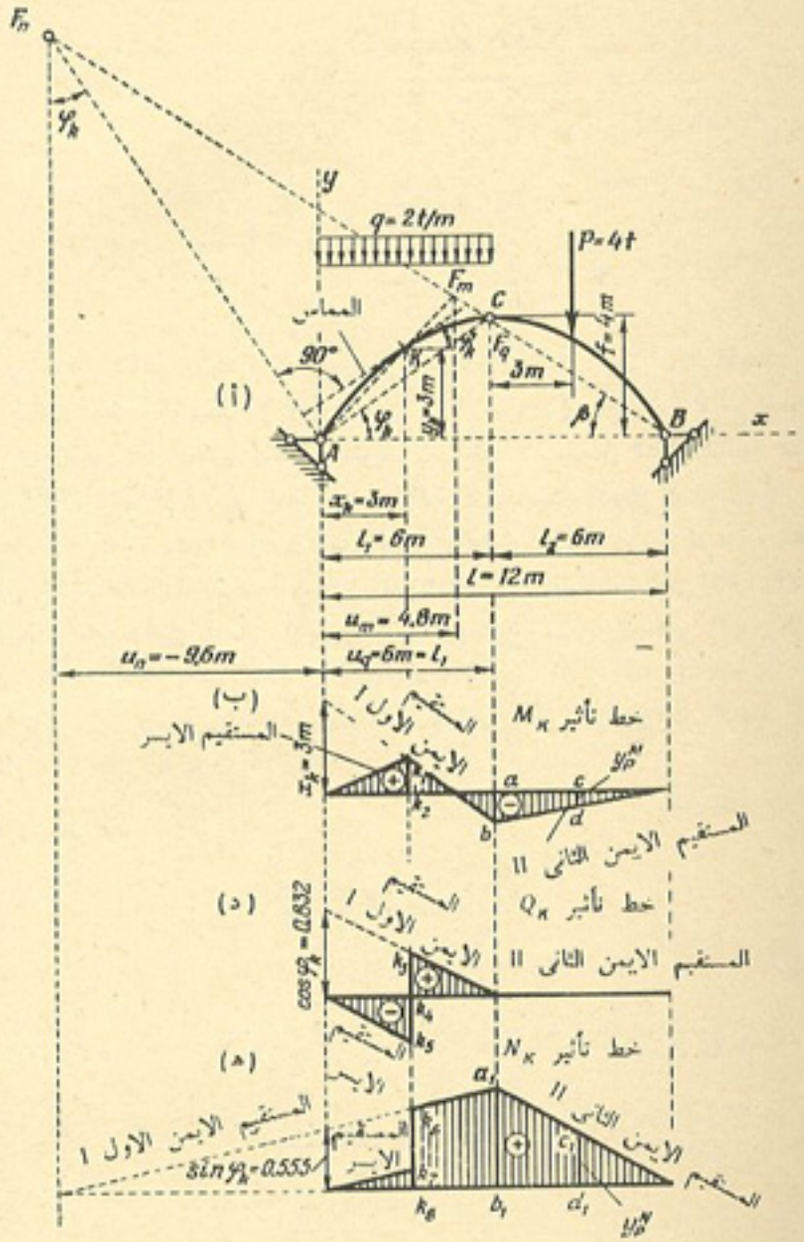
٧ — نوصل النقطة c_1 مع « الصفر » على المسند الأيمن (المستقيم $c_1 b$ يسمى بالمستقيم الأيمن الثانى) :

مثال : يطلب رسم خطوط تأثير M_k و Q_k و N_k للمقطع k من العقد المتصل بثلاث مفصلات ، المخطط على هيئة قطع مكافىء مخروطى ، والمحسوب فى المثال الثانى من البند (٣ — ٣) ، ويطلب بموجب هذه الخطوط ، تحديد القوى (الإجهادات الناجمة فى المقطع نتيجة لتأثير الحمل المعلوم (شكل ٣ — ٣٥ ، أ) . أن الاحداثيات الرأسية والقيم الأخرى المتعلقة بنقطة k ، هى :

$$x_k = y_k = 3 \text{ m} \quad ; \quad \tan \phi_k = \frac{2}{3}$$

$$\sin \phi_k = 0.555 \quad ; \quad \cos \phi_k = 0.832$$

الحل : نرسم خطوط التأثير بطريقة نقطة الصفر . ولهذا الغرض ، نجد على الشكل (٣—٣٥ ، أ) مواضع نقاط الصفر F_m و F_q و F_n والاحداثيات السينية لهذه النقاط ، هى u_m و u_q و u_n . ولاجل المراجعة والتأكد ، نحسب أو نستخرج هذه ، الاحداثيات السينية بالطريقة التحليلية أيضاً ، باستخدام الصيغ (4 — 3) و (5 — 3) و(6 — 3) ، كما يلى :



الشكل ٣ — ٣٥

$$u_m = \frac{12 \times 4 \times 3}{3 \times 6 + 3 \times 4} = 4.8 \text{ m}$$

$$u_q = \frac{12 \times \frac{4}{6}}{\frac{4}{6} + \frac{2}{3}} = 6 \text{ m}$$

$$u_n = \frac{12 \times \frac{4}{6}}{\frac{4}{6} - \frac{3}{2}} = -9.6 \text{ m}$$

ولرسم المستقيم الأيمن الأول I ، نضع على كل خط تأثير ، تحت المسند الأيسر A ، الاحداثى الرأسى المبين فى الشكل (٣ – ٣٥ ، ب ، ج ، د) ونوصل قمته مع نقطة الصفر بمستقيم . ونعين على هذا المستقيم المفصلة المتوسطة C للعقد ، ونوصل النقطة الناتجة بمستقيم ، (المستقيم الأيمن الثانى II) مع نقطة الصفر الواقعة تحت المسند الأيمن B . أن المستقيم الأيسر لخط تأثير العزم M_k ، يوصل نقطة الصفر الواقعة تحت المسند الأيسر A ، مع النقطة k_1 الواقعة على المستقيم الأيمن الأول I . وتمر المستقيمات اليسرى الواقعة على خطى تأثير Q_k و N_k بنقطة الصفر الواقعة تحت المسند الأيسر A ، بصورة موازية للمستقيم الأيمن الأول I .

ومن تشابه المثلثين ، نحدد الاحداثيات الرأسية المميزة ، والمساحات المحصورة بخطوط التأثير ، ونحدد بالإضافة إلى ذلك ، القوى أو الإجهادات الناشئة فى العقد نتيجة لتأثير الأحمال المعينة .

أ) خط تأثير العزم M_k :

$$\frac{\overline{k_1 k_2}}{x_k} = \frac{u_m - x_k}{u_m}$$

ومنها ينتج أن :

$$\overline{k_1 k_2} = \frac{x_k (u_m - x_k)}{u_m} = \frac{3 (4.8 - 3)}{4.8} = 1.125 \text{ m}$$

$$\frac{\overline{ab}}{l_1 - u_m} = \frac{\overline{k_1 k_2}}{u_m - x_k}$$

ومنها ينتج أن :

$$\overline{ab} = \overline{k_1 k_2} \frac{l_1 - u_m}{u_m - x_k} = 1.125 \left(\frac{6 - 4.8}{4.8 - 3}\right) = -0.75 \text{ m}$$

$$\overline{cd} = y_p^M = \frac{\overline{ab}}{2} = -0.375 \text{ m}$$

أن المساحة المحصورة أو المحاطة بخط التأثير المناظر للحمل الموزع بانتظام تساوى ما يلى :

$$\omega_q^M = \frac{1.125 \times 4.8}{2} - \frac{0.75 (6 - 4.8)}{2} = 2.25 \text{ m}^2$$

وعزم الانحناء M_k يساوى :

$$M_k = q\, \omega_q^M + P y_p^M = 2 \times 2.25 - 4 \times 0.375 = 3.00 \text{ tm}$$

ب) خط تأثير قوة القص Q_k :

$$\frac{\overline{k_3 k_4}}{l_1 - x_k} = \frac{\cos \phi_k}{l_1}$$

ومنها ينتج أن :

$$\overline{k_3 k_4} = \frac{l_1 - x_k}{l_1} \cos \phi_k = \frac{6 - 3}{6} \times 0.832 = 0.416$$

$$\overline{k_4 k_5} = \cos \phi_k - \overline{k_3 k_4} = 0.832 - 0.416 = 0.416$$

$$y_p^Q = 0; \omega_q^Q = -\frac{0.416 \times 3}{2} + \frac{0.416 \times 3}{2} = 0$$

$$Q_k = q w_q^Q + P y_p^Q = 2 \times 0 + 4 \times 0 = 0$$

ج) خط تأثير القوة الطولية N_k :

$$\frac{\overline{k_6 k_8}}{x_k - u_n} = \frac{\sin \phi_k}{-u_n}$$

ومنها ينتج أن :

$$\overline{k_6 k_8} = \frac{x_k - u_n}{-u_n} \sin \phi_k = \frac{3 + 9.6}{9.6} \times 0.555 = 0.728$$

$$\overline{k_7 k_8} = \overline{k_6 k_8} - \sin \phi_k = 0.728 - 0.555 = 0.173$$

$$\frac{\overline{a_1 b_1}}{l_1 - u_n} = \frac{\sin \phi_k}{-u_n}$$

ومنها ينتج أن :

$$\overline{a_1 b_1} = \frac{l_1 - u_n}{-u_n} \sin \phi_k = \frac{6 + 9.6}{9.6} \times 0.555 = 0.902$$

$$\overline{c_1\ d_1} = y_p^N = \frac{\overline{a_1\ b_1}}{2} = \frac{0{,}902}{2} = 0.451$$

$$\omega_q^N = \frac{0.173 \times 3}{2} + \frac{0.728 + 0.902}{2} \times 3 = 2.705$$

$$N_k = q\,\omega_q^N + P y_p^N = 2 \times 2.705 + 4 \times 0.451 = 7.21 \text{ tons}$$

أن قيم M_k و Q_k و N_k المستخرجة هنا ، تطابق القيم التى حصلنا عليها سابقا للمقادير المذكورة (راجع الجدول (٣ – ١) على الصفحة ١٤٨ ، ولاحظ الشكل (٣ – ١٦ ، هـ ، و ، ز) .

البند ٣ – ٦ : عزوم القلب والإجهادات المتعامدة فى العقد المتصل بثلاث مفصلات

عند تعرض القضيب للانضغاط اللامركزى (لتأثير الحمل اللامركزى) تنشأ إجهادات متعامدة قصوى وصغرى فى النقاط الطرفية (الأكثر بعداً) لمقطع القضيب العرضى ، وتعين هذه الإجهادات من الصيغة التالية :

$$\sigma = \frac{N}{F} \pm \frac{M}{W}$$

حيث F – مساحة المقطع العرضى ،

W – معامل المقطع (section modulus) * ،

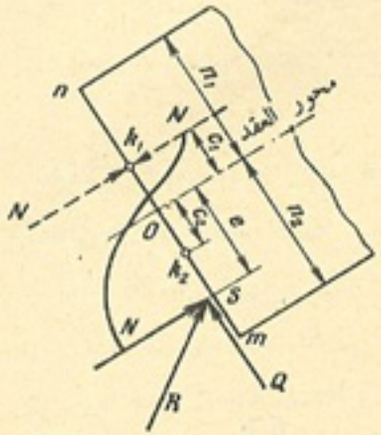
N و M – القوة الطويلة وعزم الانحناء فى المقطع الذى يجرى بحثه .

وفى هذه الحالة ، يفترض بأن القوتين N و M تؤثران فى المستوى المار بأحد المحاور الرئيسية للقصور الذاتى للمقطع العرضى ، وفى المستوى العمودى عليه .

ولتحديد الإجهادات المتعامدة القصوى ، بإستخدام الصيغة المذكورة ، عندما يؤثر على العقد حمل متنقل ، يجب فى نفس الوقت تحميل خطى تأثير N و M ، المختلفى الشكل (وبالإضافة إلى ذلك ، يكون أحد الخطين المذكورين ، محتوياً

* فى المقطع العرضى المتماثل بالنسبة للمحور الأفقى ، تكون معاملات المقطع W للألياف العليا والسفلى ، متساوية تماماً .

على قسمين ، سالب وموجب ، أى بعلامتين) : ولذلك يمكن من الملائم تغيير شكل علاقة أو صيغة الإجهادات σ ، بحيث تتحول من صيغة ذات حدين إلى صيغة ذات حد واحد :



الشكل ٣ – ٣٦

ولهذا الغرض نقوم بما يلى : نحلل محصلة القوى اليسرى R ، المؤثرة فى النقطة s من المقطع (شكل ٣ – ٣٦) إلى مركبتين N و Q : ونسلط فى إحدى النقاط الطرفية لقلب المقطع ، مثلا فى النقطة k_1 ، قوتان N متساويتان فى المقدار ومتعاكستان فى الاتجاه ، مؤثرتان فى النقطة المذكورة بصورة موازية للمقطع . ونتيجة لذلك ، ستؤثر فى المقطع ثلاث قوى N ، يمكن الاستعاضة عنها بقوتين ، هما العزم الذى يساوى $N\ (e + c_1)$ والقوة الطولية N ، المؤثرة فى أعلى نقطة طرفية من قلب المقطع :

ويمكن الآن إيجاد قيمة الإجهاد المتعامد فى النقطة m السفلى من المقطع ، بواسطة الصيغة التالية :

$$\sigma_m = \frac{N\ (e + c_1)}{W_m}$$

ذلك لأن الإجهادات المتعامدة ، الناشئة فى النقطة السفلى m من المقطع ، نتيجة لتأثير القوة الطولية N فى نقطة القلب العليا ، تساوى صفراً .

وحاصل الضرب $N\ (e+c_1)$ يمثل عزم القوة الطولية ، المؤثرة فى النقطة s ، حول نقطة القلب العليا k_1 ، ويسمى هذا العزم بعزم القلب (core moment). ويتميز عزم القلب عن عزم الانحناء العادى ، بشىء واحد فقط ، وهو أنه عند حساب عزم القلب يجب أن تضرب القوى اليسرى أو اليمنى ، ليس فى المسافة بينها وبين

مركز ثقل المقطع ، بل فى المسافة بينها وبين إحدى نقاط قلب المقطع . ومن الواضح أنه عند تحديد الاجهاد المتعامد فى النقطة n (شكل ٣ – ٣٦) يمكن استخدام للصيغة المماثلة التالية (ولكن مع أخذ عزم القوى اليسرى حول نقطة القلب السفلى ، والاستعاضة عن W_m بالمقدار W_n) :

$$\sigma_n = \frac{N\,(e - e_2)}{W_n}$$

وهكذا :

$$\sigma_m = \frac{M^c_{k_1}}{W_m}$$

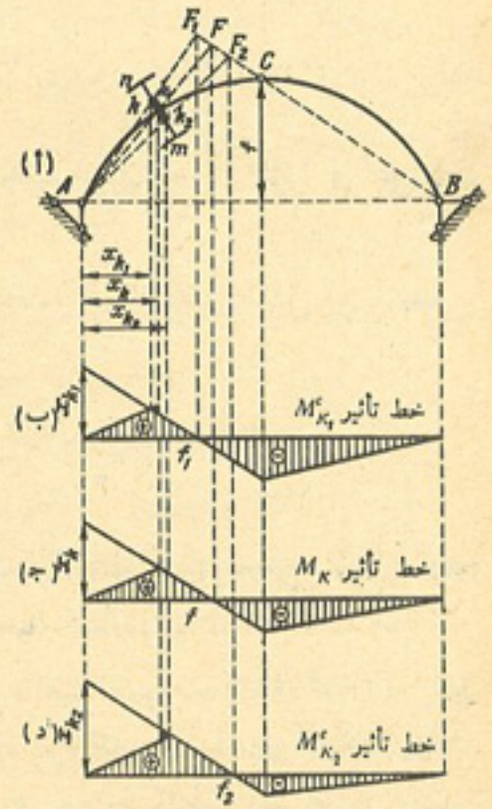
$$\sigma_n = \frac{M^c_{k_2}}{W_n}$$

حيث $M^c_{k_1}$ – عزم القوى الخارجية اليسرى أو اليمنى حول نقطة القلب العليا k_1 ،

$M^c_{k_2}$ – عزم القوى المذكورة ، حول النقطة k_2 .

إن هذه الصيغ ، ذات حد واحد ، ولذا فإنها تساعد بسهولة على حل المسائل المتعلقة بايجاد الإجهادات القصوى فى مقاطع العقد ، عند تعرضه لتأثير الأحمال المتنقلة . وترسم خطوط التأثير اللازمة لعزوم القلب ، فى هذه الحالة ، كما ترسم خطوط تأثير عزم الانحناء تماماً .

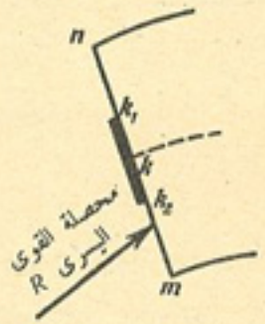
ويبين الشكل (٣– ٣٧) خطوط تأثير عزمى القلب وعزم



الشكل ٣ – ٣٧

الانحناء ، للمقطع k من العقد المتصل بثلاث مفصلات ، وقد رسمت بطريقة نقطة الصفر . وتوجد عند خطوط تأثير عزوم القلب ، تحت مركز ثقل المقطع k ، قفزات (طفرات) عمودية صغيرة ، تشكل مثلثات اضافية (مبينة فى الشكل وهى مظللة بالحبر) ، وسبب ذلك ، هو وجود قفزة أو طفرة لخط تأثير القوة الطولية N_k ، فى هذا الموضع بالذات : وعند حل المسائل العملية ، تهمل عادة مساحة هذه المثلثات الإضافية ، وذلك لضآلة مقاديرها .

والآن نحل المسألة التالية ، باستخدام خطوط تأثير عزوم القلب ، المرسومة أعلاه : يطلب تحديد قسم العقد ، الذى يجب تحميله بحمل موزع بانتظام (أو بأية مجموعة كانت من الأحمال المركزة) ، لكى تظهر فى النقطة العليا n من المقطع k (شكل ٣ – ٣٧ ، أ) إجهادات شد متعامدة قصوى : إن إجهادات الشد فى النقطة n ، لا تظهر إلا إذا كانت محصلة قوى الانضغاط اليسرى واليمنى فى المقطع المبحوث من العقد (شكل ٣– ٣٨) واقعة إلى أسفل نقطة القلب k_2 . وفى هذه الحالة ، سيكون عزم المحصلة حول النقطة k_2 ، سالباً . إذن لحل المسألة المذكورة ، يجب وضع الحمل المذكور ، على ذلك القسم من العقد ، الذى يناظر القسم السالب من خط تأثير العزم $M^c_{k_2}$. وعند تحميل القسم الموجب لنفس خط التأثير المذكور $M^c_{k_2}$ ، سوف تظهر فى النقطة n إجهادات انضغاط متعامدة :



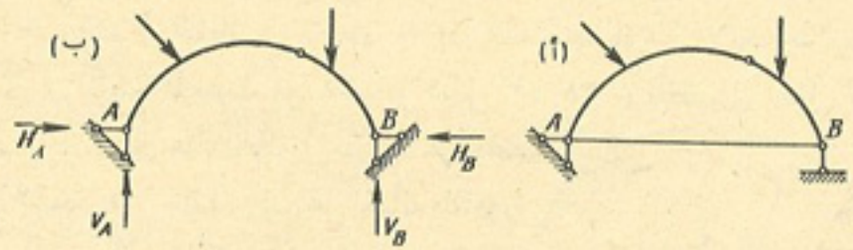
الشكل ٣ – ٣٨

البند ٣ – ٧ : حساب وتصميم العقود والأطر المتصلة بثلاث مفصلات ، والمربوطة بشدادات

بحثنا فى البندين (٣ – ٢) و (٣– ٦) طرق حساب وتصميم العقود العادية المتصلة بثلاث مفصلات ، أى العقود الخالية من الشدادات . وسنبحث فى هذا

البند ، حساب وتصميم أنظمة أخرى من الإنشاءات المصمتة المتصلة بثلاث مفصلات ، وخاصة العقود والإطر المتصلة بثلاث مفصلات ، المربوطة بشدادات . إن خصائص هذه الإنشاءات (التى تميزها عن العقود العادية) تدخل بعض التغيرات على طرق الحساب المشروحة أعلاه .

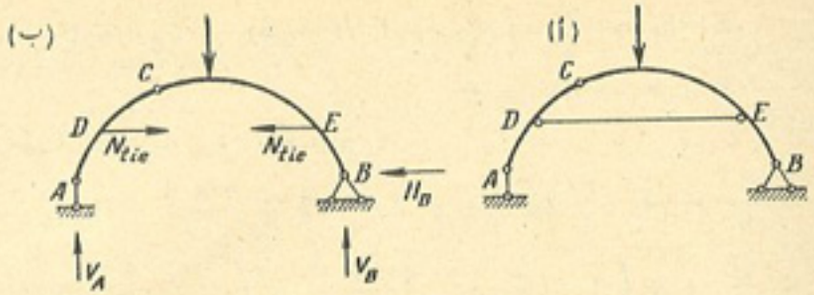
نأتى الآن إلى بحث العقد المتصل بثلاث مفصلات ، المربوط بشدادة واحدة (شكل ٣ — ٣٩ ، أ) ، المحتوى على مسند متحرك B . إن الشدادة تؤدى إلى استقرار (ثبات) المسند B فى الاتجاه الأفقى ، ويمكن اعتبارها بمثابة قضيب أفقى للمسند B . ولذلك يمكن اتباع نفس طرق الحساب المتبعة فى العقد العادى المتصل بثلاث مفصلات ، الخالى من الشدادة (شكل ٣ — ٣٩ ، ب) لإيجاد وتحديد كافة



الشكل ٣ — ٣٩

القوى والإجهادات فى العقد المربوط بشدادة . إن القوى فى المقاطع العرضية للعقد العادى ، ستساوى القوى فى المقاطع العرضية المناظرة للعقد المربوط بشدادة . والقوة (الإجهادات) فى الشدادة ، رد فعل المسند الأفقى H_B . وردود فعل المسند الرأسية ستساوى V_A و V_B ، أما رد فعل المسند الأفقى A ، فيساوى $H_A - H_B$. إن خطوط تأثير ردود فعل المساند ، والقوى الداخلية المؤثرة فى المقاطع العرضية ، للعقد المربوط بشدادة ، لا تختلف بأى شىء عن خطوط التأثير المناظرة لها ، فى العقد العادى .

والآن نأتى إلى بحث العقد المربوط بشدادة مرتفعة DE (فوق المساند) . كما مبين فى الشكل (٣—٤٠ ، أ). نبعد الشدادة ونسلط على العقد فى النقطتين D و E ، القوتين الأفقيتين N_{tie} ، المساويتين للقوة الطولية فى الشدادة (شكل ٣ —



شكل ٣ — ٤٠

٤٠ ، ب) : إن ردود فعل المساند الثلاثة V_A و V_B و H_B ، تحدد من معادلات التوازن الثلاثة ، لكافة القوى (الأحمال) الخارجية ، المؤثرة على العقد . ولا تدخل فى هذه المعادلات ، القوتان المتساويتان فى المقدار والمتعاكستان فى الاتجاه N_{tie} : ثم تحدد قيمة N_{tie} من المعادلة $\Sigma_L M_C = 0$ أو $\Sigma_R M_C = 0$ ، وهى المعادلة المعبرة عن عزم كافة القوى الخارجية ، المؤثرة على القسمين الأيسر أو الأيمن للعقد ، حول المفصلة المتوسطة C . إن الإجهادات أو القوى الداخلية فى المقاطع العرضية للعقد ، وكذلك نظام أو طريقة رسم خطوط تأثير هذه القوى ، تحدد بإستخدام الصيغ المرقمة (1 — 3) .

مثال ١ : لدينا عقد مربوط بشدادة مرتفعة (شكل ٣ — ٤١ ، أ) . يطلب تحديد ، ردود فعل المساند V_A و V_B و H_B ، والقوة فى الشدادة N_{tie} ، والقوى الداخلية M_k و Q_k و N_k فى المقطع k من هذا العقد ، ثم رسم خطوط تأثير كل من القوى التالية : V_A و V_B ، H_B ، N_{tie} ، M_k ، Q_k ، N_k . هذا مع العلم بأن العقد مخطط على هيئة قطع مكافىء تربيعى ، ومعادلته هى :

$$y = \frac{4f}{l^2}(l - x)\,x$$

الحل : لتحديد ردود فعل المساند ، نضع معادلات توازن كافة القوى الخارجية ، المؤثرة على العقد :

$$\Sigma M_B = V_A \times l - \frac{ql}{2} \times \frac{3}{4} l - Pb = 0$$

$$\Sigma M_A = \frac{ql}{2} \times \frac{l}{4} + P\,(l - b) - V_B\, l = 0$$

$$\Sigma X = - H_B = 0$$

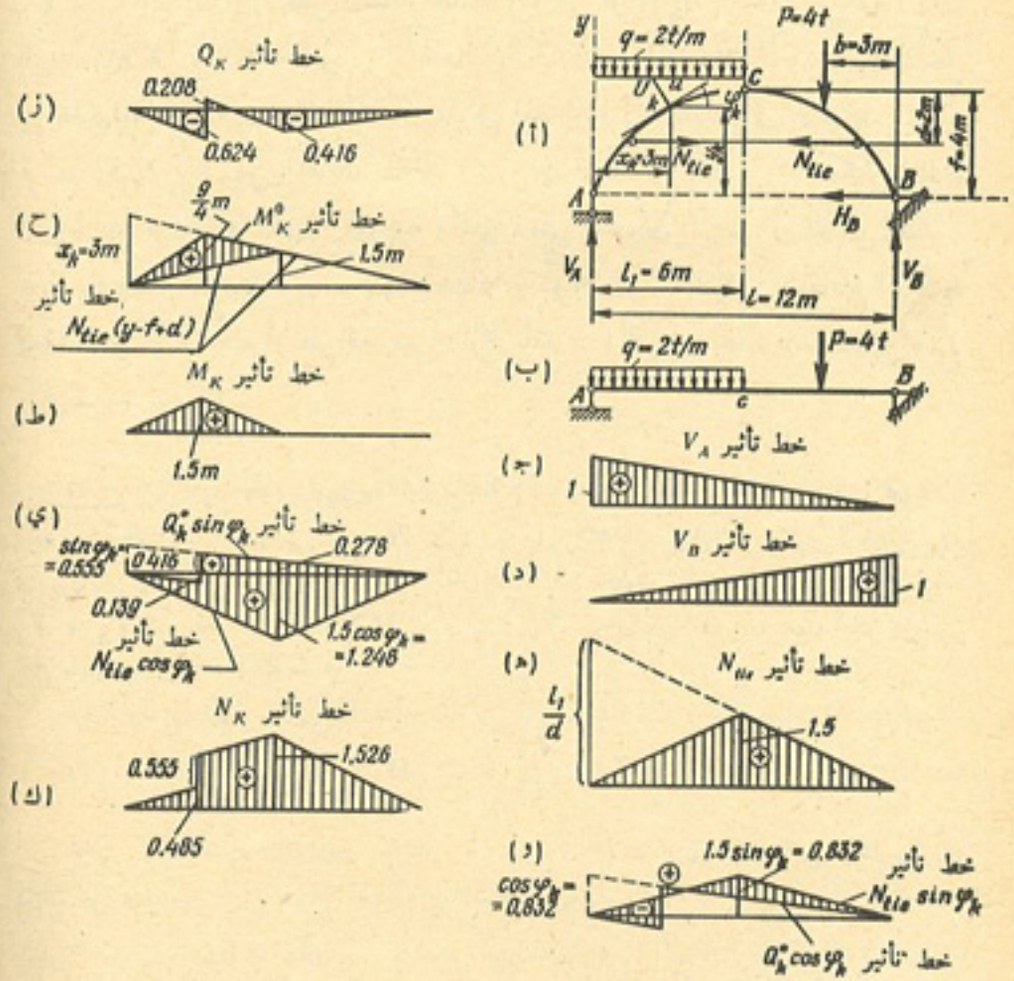
ومن هذه المعادلات المذكورة ، نجد ما يلى :

$$V_A = \frac{3}{8}\, ql + \frac{Pb}{l} = \frac{3}{8} \times 2 \times 12 + \frac{4 \times 3}{12} = 10 \text{ t}$$

$$V_B = \frac{ql}{8} + P\left(1 - \frac{b}{l}\right) = \frac{2 \times 12}{8} + 4\left(1 - \frac{3}{12}\right) = 6 \text{ t}$$

$$H_B = 0$$

لتحديد القوة الطولية فى الشدادة ، نضع المعادلة التالية :



الشكل ٣ – ٤١

$$\Sigma_L M_C = V_A \times \frac{l}{2} - N_{tie} \times d - \frac{ql}{2} \times \frac{l}{4} = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$N_{tie} = \left(V_A \times \frac{l}{2} - \frac{ql^2}{8}\right)\frac{1}{d} = \frac{M^0_C}{d} = \frac{10 \times \frac{12}{2} - \frac{2 \times 12^2}{8}}{2} =$$

$$= 12 \text{ t}$$

حيث M^0_C – عزم الانحناء فى المقطع C من العتبة البسيطة (شكل ٣ – ٤١ ، ب) .

والآن نحدد الزاوية ϕ_k المحصورة بين المحور x ومماس محور العقد فى النقطة k :

$$\tan \phi = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{4f}{l^2}(l - x)\,x\right\} = \frac{4f}{l^2}(l - 2x)$$

وعند

$$x = x_k = 3 \text{ m}$$

نجد بأن :

$$\tan \phi = \tan \phi_k = \frac{4 \times 4}{12^2}(12 - 2 \times 3) = \frac{2}{3}$$

ومنها ينتج أن :

$$\cos \phi_k = 0.832,\ \sin \phi_k = 0.555,\ \phi_k = 33°42'$$

ثم نحدد الاحداثى الرأسى y_k للنقطة k :

$$y_k = \frac{4f}{l^2}(l - x_k)x_k = \frac{4 \times 4}{12^2}(12 - 3)\,3 = 3 \text{ m}$$

ونستخدم الصيغة (3 — 1) لتحديد القوى فى المقطع k :

$$Q_k = \Sigma_L V = V_A \times \cos \phi_k - N_{tie} \times \sin \phi_k - qx_k \cos \phi_k =$$

$$= 10 \times 0.832 - 12 \times 0.555 - 2 \times 3 \times 0.832 = -3.33 \text{ t}$$

$$M_k = \Sigma_L M = V_A \times x_k - N_{tie}(y_k - f + d) - \frac{qx_k^2}{2} =$$

$$= 10 \times 3 + 12\,(3 - 4 + 2) - \frac{2 \times 3^2}{2} = 9 \text{ t/m}$$

$$N_k = \Sigma_L U = V_A \times \sin \phi_k + N_{tie} \times \cos \phi_k - qx_k \sin \phi_k =$$

$$= 10 \times 0.555 + 12 \times 0.832 - 2 \times 3 \times 0.555 = 12.20 \text{ t}$$

أن خطوط تأثير ردود فعل المساند V_A و V_B لا تختلف بأى شىء عن خطوط تأثير ردود الفعل نفسها فى العقد العادى المتصل بثلاث مفصلات ، وهى موضحة فى الشكل (٣ – ٤١ ، جـ ، د) . وباستخدام الصيغة $N_{tie} = \frac{M_C^0}{d}$ ، التى حصلنا عليها فى هذا المثال ، نرسم خط تأثير القوة الطولية فى الشدادة N_{tie} (شكل ٣ – ٤١ ، هـ) .

ولرسم خطوط تأثير Q_k و M_k و N_k نضع صيغ هذه القوى ، المماثلة للصيغ المرقمة (3 — 3) :

$$Q_k = Q_k^0 \cos \phi_k - N_{tie} \sin \phi_k$$

$$M_k = M_k^0 - N_{tie} (y_k - f + d)$$

$$N_k = Q_k^0 \sin \phi_k + N_{tie} \cos \phi_k$$

وباستخدام هذه الصيغ يرسم خط تأثير قوة القص Q_k (شكل ٣ – ٤١ ، و ، ز) ، وخط تأثير العزم M_k (شكل ٣ – ٤١ ، ح ، ط) وخط تأثير القوة الطولية N_k (شكل ٣ – ٤١ ، ى ، ك) .

ومن خطوط التأثير المرسومة ، نحدد القوى Q_k و M_k و N_k الناجمة عن تأثير الحمل المعين (لاحظ الشكل ٣ – ٤١ ، أ) :

$$Q_k = 2\left(\frac{-0.624 \times 3}{2} + \frac{0.208 \times 3}{2} - \frac{0.416 \times 3}{2}\right) - 4 \times \frac{0.416}{2} = -3.33 \text{ t}$$

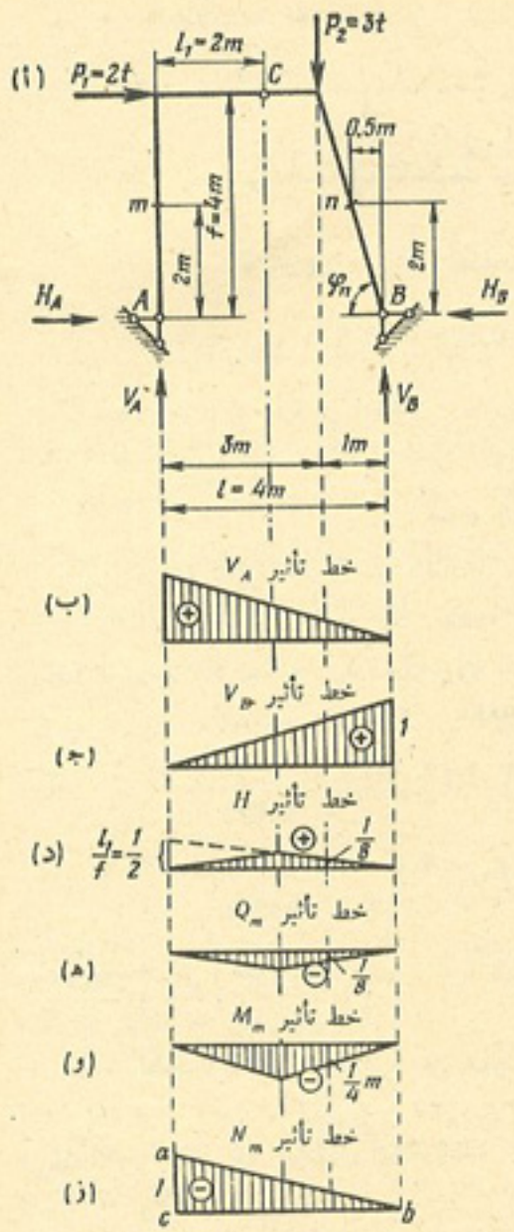
$$M_k = 2 \times \frac{1.5 \times 6}{2} = 9 \text{ tm}$$

$$N_k = 2\left(\frac{0.485 \times 3}{2} + \frac{0.485 + 0.555 + 1.526}{2} \times 3\right) + 4 \times \frac{1.526}{2} = 12.20 \text{ t}$$

أن قيم هذه القوى ، تتفق مع القيم التى حصلنا عليها سابقاً ، بطريقة مختلفة عن هذه الطريقة :

ونأتى الآن إلى بحث الإطر المتصلة بثلاث مفصلات . إن تحديد ردود فعل المساند لمثل هذه الإطر ، لا يختلف بأى شىء ، عن تحديد ردود الفعل فى العقد العادى المتصل بثلاث مفصلات . وكذلك يتم تحديد القوى الداخلية ورسم خطوط تأثيرها ،

بنفس الطرق المتبعة فى حساب وتصميم العقود العادية (بالطريقتين التحليلية والتخطيطية) : وتشذ عن ذلك طريقة رسم خطوط تأثير قوة القص وعزم الانحناء ، لمقاطع القطع الرأسية (العمودية) للإطار (إذا وجدت مثل هذه القطع) ، التى لا يمكن عندها اتباع طريقة نقطة الصفر . وعند رسم خطوط تأثير القوى فى المقاطع العرضية للقطع المائلة والأفقية للإطار المتصل بثلاث مفصلات وخطوط تأثير القوى الطولية فى القطع الرأسية ، يمكن فى هذه الحالة استخدام طريقة نقطة الصفر :



الشكل ٣ – ٤٢

مثال ٢ : يطلب تحديد ردود فعل المساند والقوى الداخلية فى المقطعين العرضيين m و n للضلعين القائمين (uprights) فى العقد المتصل بثلاث مفصلات (شكل ٣ – ٤٢ ، أ) ورسم خطوط تأثير ردود فعل المسندين والقوى الداخلية فى المقطع m .

الحل : لتحديد ردود فعل المسندين ، نضع معادلات التوازن التالية :

$$\Sigma M_A = P_1 \times 4 + P_2 \times 3 - V_B \times 4 = 0$$

$$\Sigma M_B = P_1 \times 4 - P_2 \times 1 + V_A \times 4 = 0$$

$$\Sigma_L M_C = V_A \times 2 - H_A \times 4 = 0$$

$$\Sigma X = P_1 + H_A - H_B = 0$$

ومن هذه المعادلات ، نجد ما يلى :

$$V_B = \frac{P_1 \times 4 + P_2 \times 3}{4} = \frac{2 \times 4 + 3 \times 3}{4} = 4.25 \text{ t}$$

$$V_A = \frac{P_1 \times 4 + P_2 \times 1}{4} = \frac{-2 \times 4 + 3 \times 1}{4} = 1.25 \text{ t}$$

$$H_A = \frac{V_A \times 2}{4} = = \frac{1.25 \times 2}{4} = -0.625 \text{ t}$$

$$H_B = P_1 + H_A = 2 - 0.625 = 1.375 \text{ t}$$

ثم نحدد القوى الداخلية فى المقطعين m و n للضلعين القائمين فى الإطار (نعتبر المقطع السفلى للضلع القائم ، بمثابة المقطع الأيسر) :

$$Q_m = -H_A = 0.625 \text{ tons}$$

$$M_m = -H_A \times 2 = 0.625 \times 2 = 1.25 \text{ tm}$$

$$N_m = V_A = -1.25 \text{ tons}$$

$$Q_n = -V_B \cos \phi_n + H_B \sin \phi_n = -4.25 \times 0.242 + 1.375 \times 0.968 = 0.304 \text{ t}$$

$$M_n = V_B \times 0.5 - H_B \times 2 = 4.25 \times 0.5 - 1.375 \times 2.0 = -0.625 \text{ tm}$$

$$N_n = V_B \times \sin \phi_n + H_B \times \cos \phi_n = 4.25 \times 0.968 + 1.375 \times 0.242 = 4.45 \text{ t}$$

ويبين الشكل (٣ – ٤٢ ، ب ، جـ ، د) خطوط تأثير ردود فعل المسندين V_A و V_B و $H_A = H_B = H$

وهذه الخطوط لا تختلف بأى شىء عن خطوط التأثير المرسومة للعقد العادى المبينة فى الشكل (٣ – ٢٤) . ويبين الشكل (٣ – ٤٢ ، هـ ، و ، ز) خطوط تأثير القوى Q_m و N_m و M_m المرسومة بناء على المعادلات الثلاثة التالية : $Q_m = -H_A$ و $M_m = -H_A \times 2$ و $N_m = V_A$.

ويمكن رسم خط تأثير القوة الطولية N_m أيضاً ، باتباع طريقة نقطة الصفر (لاحظ الشكل ٣ – ٣٤ ، جـ) التى تقع فى هذه الحالة فوق المسند B . وللقيام بذلك نضع القيمة $\sin \phi_m = 1$ فوق المسند A (شكل ٣ – ٤٢ ، ز) ونوصل النقطة الناتجة a مع نقطة الصفر b (أى مع الصفر فوق المسند B) .

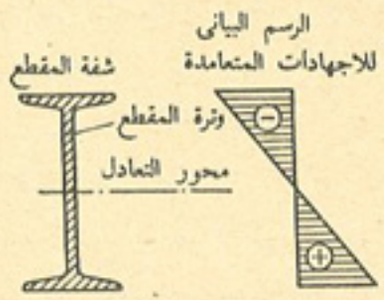
ويكون المستقيم ab بمثابة المستقيمين الايمنين الأول I والثانى II فى نفس الوقت . أما المستقيم الايسر ، فينطبق فى هذه الحالة مع المستقيم الرأسى أو العمود ac .

الفصل الرابع

الجمالونات

البند ٤ – ١ : معلومات عن الجمالونات وأصنافها

إن الجمالون هو عبارة عن إنشاء إطارى (هيكلى) يحافظ على استقراره الهندسى ، حتى فى حالة استبدال وصلاته الجاسئة ، اصطلاحياً ، بمفصلات : وفى حقيقة الأمر ، تستخدم الجمالونات لنفس الأغراض التى تستخدم لأجلها العتبات المصمتة المقطع ، ولكنها تستخدم لتسقيف (تغطية) الأبواع الواسعة جداً . وفى هذه الحالات ، تكون العتبات المصمتة غير ملائمة من الناحية الاقتصادية (مثل العتبات التى مقطعها على شكل I) نظراً لعدم الاستفادة التامة من مادة الوترة * التى تصبح فيها الإجهادات أقل مما هى عليه فى الشفهات (لاحظ الرسم البيانى للاجهادات المتعامدة فى المقاطع العرضية للعتبة المبينة فى الشكل ٤ – ١) ، وكذلك نظراً لاحتمال تحدب الوترة ، الذى يزداد بزيادة ارتفاع مقطع العتبة .

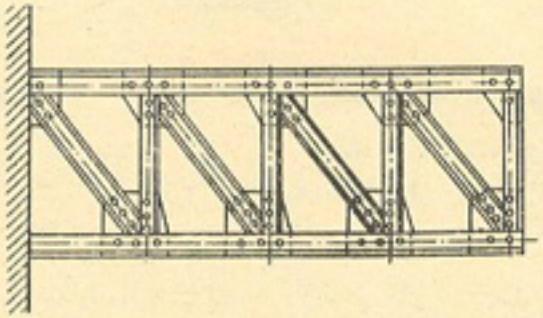


الشكل ٤ – ١

وفى هذه الحالات ، تستبدل العتبة المصمتة بجمالون ، تكون كافة قطعة (قضبانه) فى حالة انضغاط مركزى أو شد مركزى بصورة رئيسية ، عند تعرض الجمالون لتأثير الأحمال المركزة ، المسلطة فى الوصلات . وهذا الأمر يساعد كثيراً على رفع درجة الاستفادة من مادة الجمالون ، وذلك لأن الرسوم البيانية للاجهادات

* إن الوترة (web) هى الضلع القائم فى المقطع الذى على شكل I ، أما كل ضلع من الضلعين الأفقيين فيسمى بالشفة (flange) والجمع شفهات – المترجم .

المتعامدة فى المقاطع العرضية لكل قضيب من قضبانه ، تكون فى الواقع على شكل مستطيل . ولهذا السبب يكون الجمالون أخف وزنا من العتبة ذات الوترة المصمتة ، التى تساويه فى الباع والارتفاع . ويمكن إعتبار الانشاء المبين فى الشكل (٤ — ٢) بمثابة نموذج لجمالون من هذا النوع .



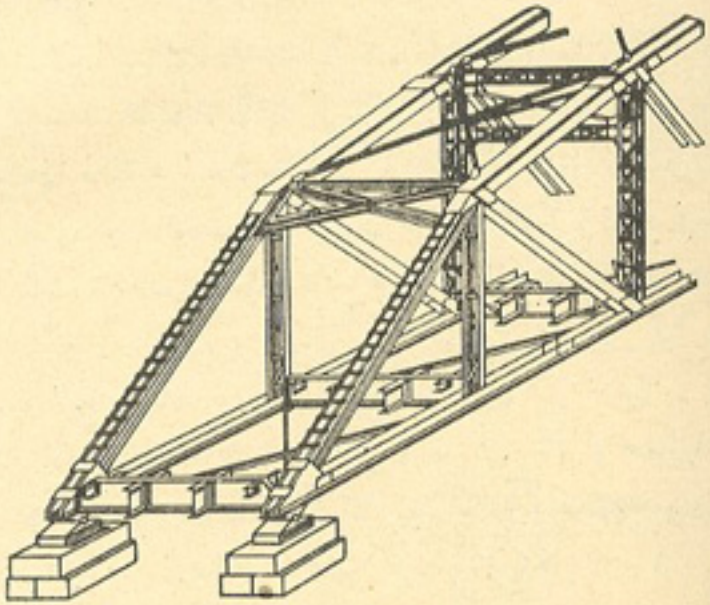
الشكل ٤ — ٢

وبالإضافة إلى الجمالونات المستوية ، التى تكون جميع محاور قضبانها (قطعها) واقعة فى نفس المستوى ، تستخدم أيضاً الجمالونات المجسمة أو الثلاثية الأبعاد ، التى لا تكون محاور قضبانها (قطعها) واقعة فى نفس المستوى (شكل ٤ — ٣) . وفى حالات كثيرة يتلخص حساب أو تصميم الجمالون المجسم ، فى حساب عدة جمالونات مستوية .

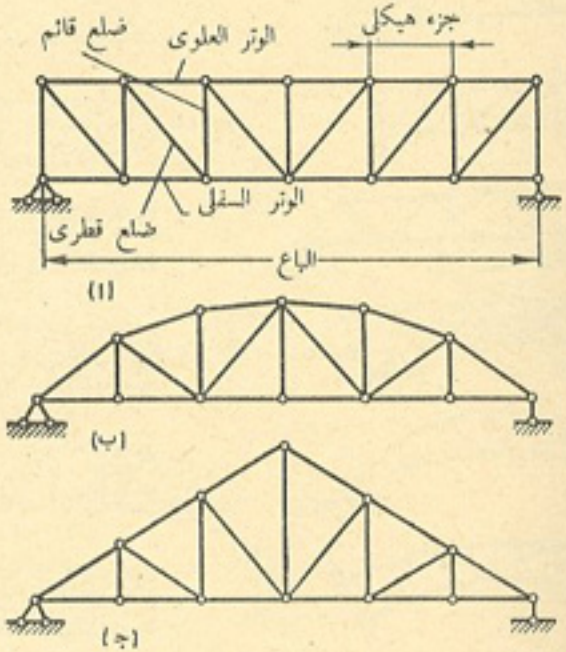
إن المسافة الواقعة بين محورى مسندى الجمالون (شكل ٤ — ٤ ، أ) تسمى بالباع ، والقضبان أو القطع الواقعة على المحيط الخارجى للجمالون تسمى بأوتار الجمالون ، والقضبان التى توصل الأوتار مع بعضها البعض ، تشكل شبكة الجمالون وتسمى القضبان الرأسية منها بالأضلاع القائمة ، والقضبان المائلة منها بالأضلاع القطرية : إن المسافة الموجودة بين كل وصلتين متجاورتين فى أى وتر من أوتار الجمالون تسمى بالجزء الهيكلى للجمالون (وتقاس عادة فى الاتجاه الأفقى) .

ويتم تصنيف الجمالونات ، تبعا للخصائص الخمسة التالية : أ) طبيعة تخطيط أو شكل المحيط الخارجى ، ب) نوع الشبيكة ، ج) طبيعة المساند ، د) الغرض الذى يستخدم لأجله الجمالون ، هـ) ارتفاع مستوى الأرضية .

وبالنسبة لطبيعة شكل الجمالون ، توجد هناك جمالونات متوازية الأوتار (شكل ٤ — ٤ ، أ) وجمالونات أوتارها على شكل مضلع أو مثلث ، أى مضلعة



الشكل ٤ — ٣

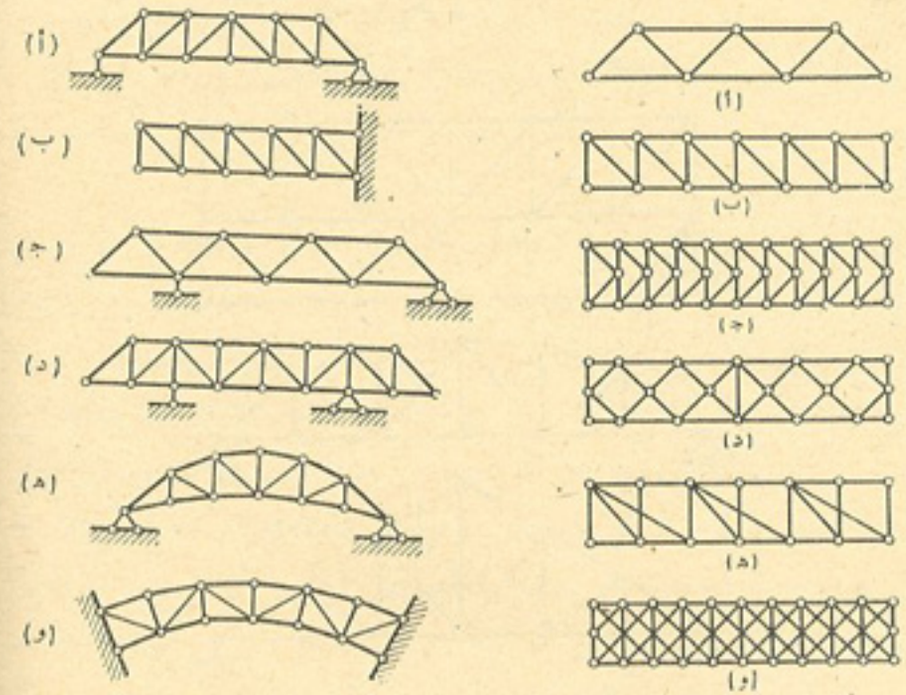


الشكل ٤ — ٤

أو مثلثة (شكل ٤ — ٤ ، ب ، ج) . ومن هذه الجمالونات الاخيرة مثلا ، الجمالونات التى يكون وترها العلوى على هيئة قطع مكافئ (شكل ٤—٤ ، ب) والجمالونات المثلثة الشكل (شكل ٤ — ٤ ، ج) .

أما بالنسبة لنوع الشبيكة ، فتوجد جمالونات ذات شبيكة مثلثة (شكل ٤ — ٥ ، أ) وجمالونات ذات شبيكة مائلة الأقطار (شكل ٤ — ٥ ، ب) وجمالونات ذات شبيكة أضلاعها مرتبة على هيئة حروف k (k — trusses) كما مبين فى الشكل (٤ — ٥ ، ج) ، وجمالونات ذات شبيكة على هيئة معين (شكل ٤ — ٥ ، د) وجمالونات ذات شبيكتين (شكل ٤ — ٥ ، هـ) وأخيرا جمالونات متعددة الشبيكات (شكل ٤ — ٥ ، و) .

وبالنسبة لنوع المساند ، هناك جمالونات مثبتة من طرفيها ، أى محمولة على مسندين — جمالونات عتبية (شكل ٤ — ٦ ، أ) أو جمالونات عقدية (شكل ٤ — ٦ ، هـ ، و) ، وجمالونات كابولية — مثبتة أو مستندة من طرف واحد (شكل ٤ — ٦ ، ب) وجمالونات عتبية كابولية (شكل ٤ — ٦ ، ج ، د) .

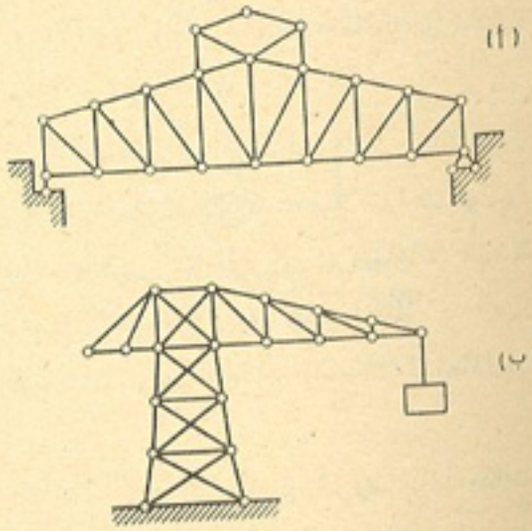


الشكل ٤ — ٥

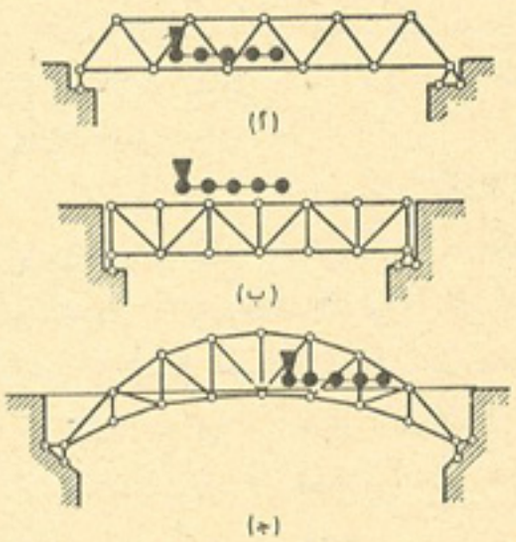
الشكل ٤ — ٦

وبالنسبة للغرض الذى تستخدم من أجله الجمالونات . توجد جمالونات سقفية (شكل ٤ — ٧ ، أ) وجمالونات أوناش (شكل ٤ — ٧ ، ب) وجمالونات برجية (شكل ٤ — ٧ ، ج) وجمالونات جسرية أو قنطرية (شكل ٤ — ٨) .

وتقسم الجمالونات الجسرية تبعاً لارتفاع مستوى الأرضية إلى جمالونات ذات أرضية سفلى (شكل ٤ — ٨ ، أ) وجمالونات ذات أرضية عليا (شكل ٤ — ٨ ، ب) وجمالونات ذات أرضية متوسطة (شكل ٤ — ٨ ، ج) .



الشكل ٤ — ٧



الشكل ٤ — ٨

البند ٤ — ٢ : الطرق التحليلية لتحديد الإجهادات (القوى) فى قطع الجمالونات البسيطة

إن الجمالونات البسيطة ، هى الجمالونات المؤلفة من مثلث مفصلى ، تضاف إليه الوصلات على التوالى (على أن تربط كل وصلة مع الوصلة التى تليها بواسطة قضيبين غير واقعين على استقامة واحدة) . وتكون هذه الجمالونات مستقرة هندسياً ومحددة استاتيكيا (راجع البندين ١ — ٢ و ١ — ٣) :

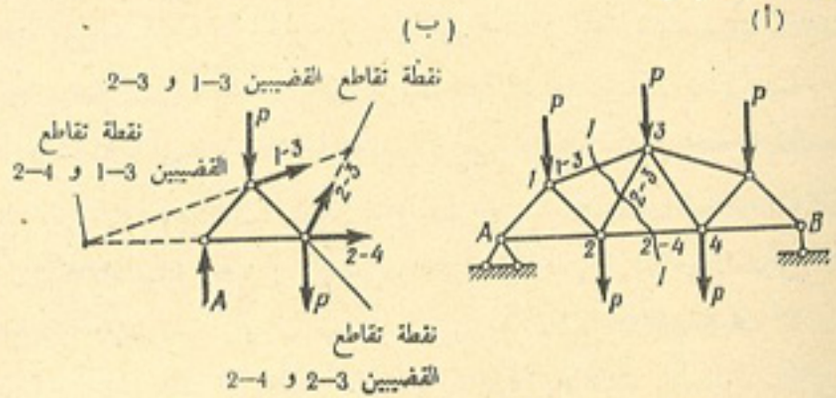
وقد ذكرنا فى البند (١ — ٣) بأنه يمكن أن يوضع لكل جمالون محدد استاتيكيا ، عدد من المعادلات الاستاتيكية يساوى $2K$ (حيث K تمثل عدد وصلات الجمالون) ، يمكن بواسطتها إيجاد ردود فعل المساند والقوى الداخلية أو الإجهادات الناشئة فى قطعه (قضبانه) نتيجة لتأثير الأحمال الخارجية . وفى هذه الحالة ، تحدد قبل كل شىء ردود فعل المساند . وعند تحديد ردود الفعل ، توضع ثلاث معادلات توازن ، للجمالون بأكمله .

ولتحديد الاجهادات (القوى الداخلية) ، يجب بحث شروط توازن مقاطع الوصلات أو القطع المنفردة للجمالون ، تحت تأثير الاحمال الخارجية والقوى الموجودة فى القطع (القضبان) التى أخذت فيها المقاطع . ويمكن فى الأحمال ، وضع عدد من المعادلات يساوى $2K - 3$ (أى عدد من المعادلات التى لا تعتمد على بعضها البعض) .

ويجب أن تفصل أو تفرد وصلات وأقسام الجمالون ، بطريقة تساعدنا على تحديد الاجهادات فى قطع الجمالون بأسهل ما يمكن ، دون اللجوء إلى الحل الآنى لعدد من المعادلات الموضوعة لهذا الغرض ، التى تحتوى على مجاهيل كثيرة . وهذا ما يساعد ليس على تبسيط الحساب إلى حد كبير وحسب ، بل وعلى إيجاد نتائج أكثر دقة .

وسنشرح فيما يلى طرق الحساب التى تساعد على تحديد القوى الداخلية أو الإجهادات فى كل قطعة من قطع الجمالون ، باستخدام معادلة واحدة ذات مجهول واحد كما هو متبع عادة :

طريقة نقطة العزم : إن طريقة نقطة العزم ، تستخدم بالدرجة الأساسية ، فى الحالات التى يمكن فيها تقسيم الجمالون إلى قسمين ، بحيث يمر مستوى التقسيم بثلاثة قضبان (قطع) منه ، لا تتقاطع اتجاهات محاورها فى نقطة واحدة (لاحظ مثلا ، المقطع $I - I$ فى الشكل ٤ — ٩ ، أ) * . إن اتجاهى كل زوج من أزواج هذه القضبان الثلاثة المقطوعة ، يتقاطعان فى نقطة واحدة ، وبذلك نجد بأن اتجاهات المحاور الثلاثة بأكملها ، ستتقاطع فى ثلاث نقاط ، غير واقعة على استقامة واحدة (شكل ٤ — ٩ ، ب) .



الشكل ٤ — ٩

وإذا وضعنا على التوالى ، معادلات عزوم كافة القوى (الخارجية والداخلية) ، المؤثرة على القسم المقتطع من الجمالون ، حول هذه النقاط الثلاثة ، فسوف نحصل فى كل مرة على معادلة ذات مجهول واحد ، يمثل القوة الداخلية فى القضيب المقطوع ، الذى لا يمر فى النقطة المبحوثة ، لتقاطع القضبان .

وهكذا لتحديد القوة أو الإجهاد فى أى قضيب من قضبان الجمالون ، يجب قطع الجمالون ، بحيث يشمل مستوى القطع هذا ، قضيبين آخرين بالإضافة إلى القضيب المعين (على أن لا يلتقى محورا هذين القضيبين مع محور القضيب الأخير فى نقطة واحدة) . وبعد ذلك يمكن بسهولة أن نستخدم معادلة العزوم

* إن طريقة نقطة العزم ، كما سيأتى ذكرها فيما بعد ، يمكن أن تستخدم فى الحالات الأكثر تعقيداً من الحالة الراهنة .

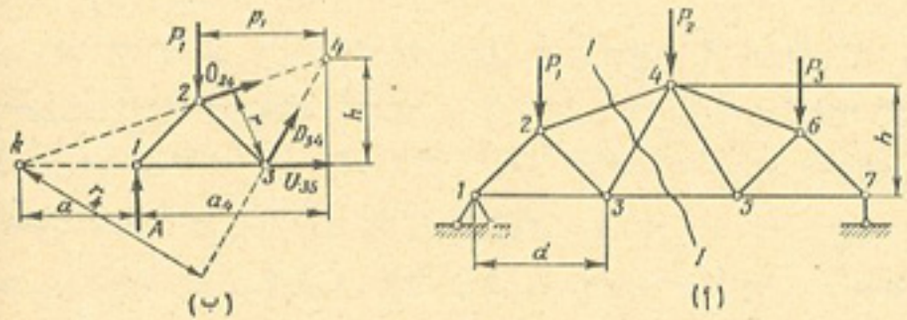
حول نقطة تقاطع محورى هذين القضيبين ، تحديد القوة (الإجهاد) فى ذلك القضيب المعين .

إن نقطة تقاطع محورى القضيبين ، التى توضع بالنسبة لها (حولها) معادلة العزوم ، تسمى بنقطة العزم :

وعند وضع معادلات التوازن ، يفترض بأن كافة القوى (الإجهادات) فى قضبان الجمالون ، تكون موجبة ، أى إجهادات شد . وبناء على ذلك تكون متجهة من الوصلات إلى الخارج . وإذا ظهر بعد حل المعادلات ، بأن إحدى القوى سالبة ، فهذا يعنى بأنها قوة انضغاط ، متجهة نحو الوصلة .

ونأتى الآن إلى بحث أمثلة الحساب ، التى توضح طريقة نقطة العزم .

نرمز إلى الإجهادات (القوى) فى قطع الوتر العلوى للجمالون ، بالحرف O ، وإلى الإجهادات فى قطع الوتر السفلى ، بالحرف U ، وإلى الإجهادات فى الأضلاع القطرية بالحرف D ، وإلى الاجهادات فى الأضلاع القائمة بالحرف V : وسوف نضع فى أسفل هذه الحروف ، الأرقام المناظرة لوصلات الجمالون ، التى يتصل معها القضيب المعين .



الشكل ٤ — ١٠

لنبحث الجمالون المبين فى الشكل (٤ — ١٠ ، أ) ، ونقوم بإيجاد الإجهاد فى القضيب 5—3 من هذا الجمالون : ولهذا الغرض ، نقطع الجمالون على امتداد الخط I — I ، الذى يقطع القضيب المبحوث وقضيبين آخرين : وبعد قطع

الجمالون بهذا الشكل ، إلى قسمين ، نهمل أحدهما ونبحث شرط توازن القسم الثانى .

ويكون من الأسهل دائماً ، بحث ذلك القسم من الجمالون ، المعرض لتأثير أقل عدد من القوى (الأحمال) ، ولذلك سنبحث فى هذه الحالة القسم الأيسر من الجمالون المذكور . ويجب أن يبقى هذا القسم فى حالة توازن ، تحت تأثير القوى الخارجية A و P_1 والإجهادات أو القوى الداخلية O_{24} ، D_{34} و U_{35} فى القضبان المقطوعة ، وهذه القوى تعوض عن تأثير القسم الأيمن المهمل من الجمالون على قسمه الأيسر المبحوث (شكل ٤ — ١٠ ، ب).

لتحديد الإجهاد المجهول U_{35} بإستخدام معادلة واحدة ذات مجهول واحد ، نضع معادلة مجموع عزوم كافة القوى المؤثرة على القسم الأيسر للجمالون ، حول نقطة تقاطع القضيبين المقطوعين 4 — 2 و 4 — 3 ، أى حول النقطة 4 . وستعتبر هذه النقطة ، عند تحديد الاجهاد فى القضيب 5 — 3 ، بمثابة ، نقطة العزم .

إن معادلة مجموع عزوم كافة القوى ، المؤثرة على القسم الأيسر للجمالون ، حول النقطة 4 ، تأخذ الشكل التالى :

$$\Sigma M_4 = Aa_4 - P_1 p_1 - U_{35} h = 0$$

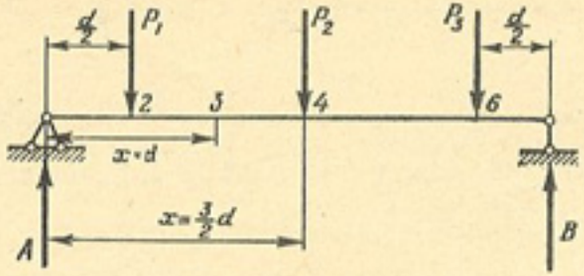
ومنها ينتج أن :

$$U_{35} = \frac{Aa_4 - P_1 p_1}{h} = \frac{M_4^0}{h}$$

حيث h — ذراع الاجهاد أو القوة U_{35} ، حول نقطة العزم ، ويساوى فى هذه الحالة ارتفاع الجمالون (ارتفاع مقطع الجمالون) ،

M_4^0 — عزم كافة القوى الخارجية (بما فيها رد فعل المسند) ، المؤثرة على القسم المنفصل من الجمالون ، حول الوصلة 4 ، الذى يساوى عزم الانحناء فى العتبة البسيطة ، الناجم فى المقطع المناظر لموضع نقطة العزم .

وبالفعل ، إذا إستبدلنا الجمالون المذكور ، والأحمال الرأسية المؤثرة عليه (شكل ٤ — ١١) بعتبة بسيطة لها نفس الباع ، فسوف نجد بأن عزم الانحناء فى مقطعها ، الذى إحداثيه السينى يساوى الإحداثى السينى لنقطة العزم 4 ،



الشكل ٤ — ١١

سيساوى عزم القوى المؤثرة فى القسم الأيسر المقطوع من الجمالون ، حول هذه النقطة .

وهكذا ، فإن الإجهاد فى قضيب الوتر السفلى للجمالون U_{35} ، يساوى نسبة عزم الانحناء فى المقطع المناظر من العتبة البسيطة ، إلى الذراع h .

ولما كان عزم الانحناء فى العتبة ، عند تأثير أى حمل كان من الأعلى إلى الأسفل ، موجباً دائماً ، يكون الإجهاد U_{35} موجباً أيضاً على الدوام ، أى يكون القضيب 5 — 3 فى حالة شد . وعند تأثير الحمل المذكور ، تكون كافة قضبان الوتر السفلى الباقية ، فى حالة شد أيضاً (مشدودة) .

نحدد الإجهاد فى القضيب (القطعة) 4 — 2 من الوتر العلوى للجمالون . ولهذا الغرض نضع المعادلة المعبرة عن عزم كافة القوى المؤثرة على القسم الأيسر المقطوع من الجمالون ، حول نقطة العزم (أى حول الوصلة 3 ، لاحظ الشكل ٤ — ١٠ ، ب) :

$$\Sigma M_3 = Ad - P_1 \frac{d}{2} + O_{24}\, r = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$O_{24} = \frac{Ad - P_1 \frac{d}{2}}{r} = -\frac{M_3^0}{r}$$

إن بسط الكسر المشار إليه بالمقدار التالى : $M_3^0 = A\,d - P_1 \frac{d}{2}$ ، يساوى عزم انحناء العتبة البسيطة (شكل ٤ — ١١) فى المقطع ذى الإحداثى السينى الذى يساوى $x = d$. ولما كان عزم «العتبة» M_3^0 عند تأثير الحمل المعلوم ، موجباً

دائماً ، وتوجد علامة سالبة قبل النسبة $\frac{M_3^0}{r}$ فى الصيغة المذكورة ، إذن يكون الإجهاد O_{24} سالباً ، أى يكون القضيب 4 — 2 فى حالة انضغاط (منضغطاً) .

ويمكن بنفس الطريقة ، أن نثبت بأن جميع قضبان (قطع) الوتر العلوى للجمالون ، عند تأثير الحمل من الأعلى إلى الأسفل ، ستكون فى حالة انضغاط (منضغطة) . ولتحديد الإجهاد D_{34} ، الناشئ فى الضلع القطرى 4 — 3 ، نضع المعادلة المعبرة عن عزم كافة القوى حول النقطة k ، الواقعة خارج محيط الجمالون (شكل ٤ — ١٠ ، ب) التى يتقاطع فيها محوراً القضيبين 4 — 2 و 5 — 3 :

$$\Sigma M_k = -Aa + P_1\left(a + \frac{d}{2}\right) - D_{34}\, r_k = 0$$

ومنها ينتج أن :

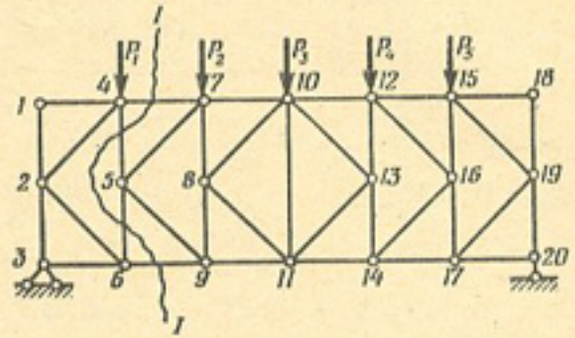
$$D_{34} = \frac{P_1\left(a + \frac{d}{2}\right) - Aa}{r_k} = \frac{M_k^0}{r_k}$$

وهكذا عند استخدام طريقة نقطة العزم ، يتم تحديد قيمة الإجهاد من المعادلة التالية :

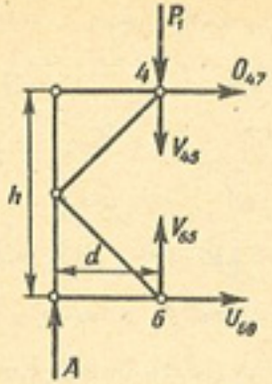
$$N = \frac{\text{عزم القوة الخارجية}}{\text{ذراع الاجهاد}} = \frac{M}{r} \qquad (1-4)$$

إن M هنا تعبر عن عزم القوى المؤثرة على القسم المقطوع من الجمالون ، حول نقطة العزم ، و r تعبر عن ذراع الإجهاد المجهول حول هذه النقطة بالذات .

وعند تحديد الإجهادات فى قضبان (قطع) الوتر العلوى أو السفلى ، لجمالون أكثر تعقيداً (من بين الجمالونات البسيطة) ، كالجمالون المبين فى الشكل (٤ — ١٢) ، يمكن كذلك استخدام طريقة نقطة العزم . وبالفعل إذا قطعنا الجمالون على امتداد الخط $I - I$ ووضعنا المعادلة المعبرة عن مجموع عزوم القوى المؤثرة على قسمه الأيسر (شكل ٤ — ١٣) حول الوصلة 6 ، التى تلتقى فيها ثلاثة من القضبان



الشكل ٤ — ١٢



الشكل ٤ — ١٣

الأربعة المقطوعة ، فإن المعادلة الناتجة عن ذلك ، وهى بمجهول واحد ، تساعد على تحديد الاجهاد فى القضيب الرابع 7 — 4 :

$$\Sigma M_6 = Ad + O_{47}\, h = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$O_{47} = -\frac{Ad}{h} = -\frac{M_6^0}{h}$$

ولتحديد الاجهاد فى القضيب 9 — 6 من الوتر السفلى للجمالون ، نضع المعادلة المعبرة عن عزوم القوى حول النقطة 4 .

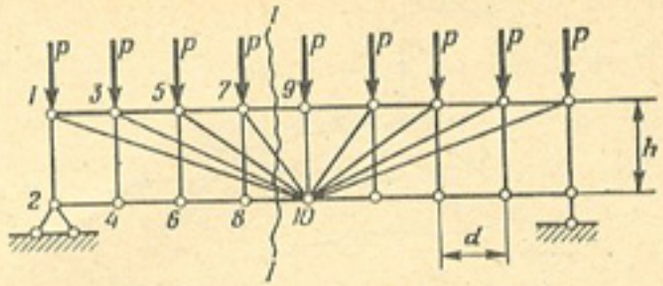
$$\Sigma M_4 = Ad - U_{69}\, h = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$U_{69} = \frac{Ad}{h} = \frac{M_4^0}{h}$$

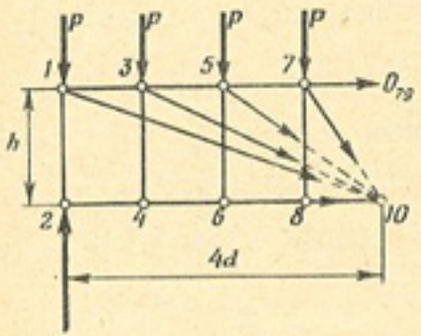
ويبين الشكل (٤ — ١٤) أحد الجمالونات المعقدة التركيب (الذى يعتبر أيضاً من الجمالونات البسيطة) ، ويمكن تحديد الاجهادات الناشئة فى أوتاره أيضاً بإستخدام طريقة نقطة العزم .

ولتحديد الإجهاد فى القضيب 9—7 نستحدث المقطع I—I ، الذى يمر مستواه



الشكل ٤ — ١٤

بالإضافة إلى القضيب المذكور ، بخمسة قضبان أخرى ، تلتقى فى نقطة مشتركة واحدة (فى الوصلة 10) : نضع المعادلة المعبرة عن مجموع عزوم كافة القوى المؤثرة على القسم الأيسر المقطوع من الجمالون (شكل ٤ — ١٥) حول هذه النقطة :



الشكل ٤ — ١٥

$$\Sigma M_{10} = A \times 4d - 4\,P \times 2.5 + O_{79}\, h = 0$$

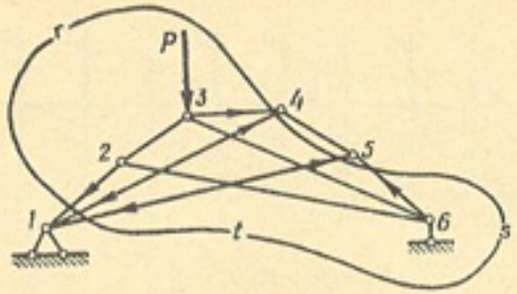
ومنها ينتج أن :

$$O_{79} = -\frac{4Ad - 10Pd}{h}$$

ولنبحث أيضاً الجمالون المسمى بجمالون السقف الشبكى ، الذى صممه المهندس الروسى شوخوف ، لتسقيف أحد المبانى الكبيرة (الواسعة الباع) فى مدينة موسكو (شكل ٤ — ١٦) * .

وهذا الجمالون مستقر هندسياً لأنه يتألف من مثلثين أساسيين هما : 5 — 4 — 1 و 6 — 3 — 2 ، مربوطين مع بعضهما البعض بواسطة ثلاثة قضبان هى 2 — 1 و 4 — 3 و 6 — 5 ، لا تتقاطع محاورها فى نقطة

* إن هذا الجمالون لا يعتبر من الجمالونات البسيطة ، ولكن يمكن تحديد الإجهادات (القوى الداخلية) فى قضبانه أو قطعه ، باتباع طريقة نقطة العزم .

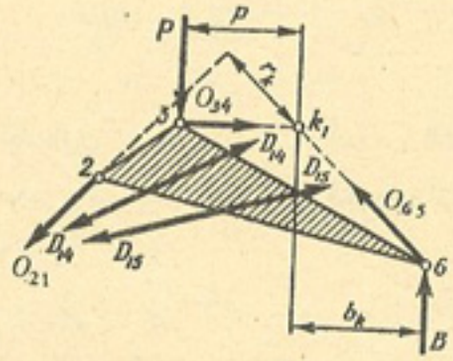


الشكل ٤ – ١٦

مشتركة واحدة . والجمالون محدد استاتيكيا ، لأن عدد قضبانه S يحقق الشرط $S = 2K - 3$ ، أى أن $9 = 2 \times 6 - 3$ ، أى $9 = 9$. ومما يستدعى الاهتمام فى جمالون شوخوف ، هو أنه لا يمكن استحداث مقطع فيه ، يمر بثلاثة قضبان فقط ، أو بأى عدد آخر من القضبان ، بحيث تكون جميعها ، ما عدا واحداً فقط ، متقاطعة فى نقطة واحدة .

ولحساب مثل هذا الجمالون ، نستحدث المقطع المقفل $r - s - t$ ، بحيث يمر مستواه بالقضبان 2 — 1 و 4 — 3 و 6 — 5 مرة واحدة فقط ، ويمر بالقضيبين 5 — 1 و 4 — 1 مرتين .

وكما يتضح من الشكل (٤ — ١٧) ، ستكون الأقسام المنفصلة من القضيبين



الشكل ٤ – ١٧

المقطوعين مرتين 4—1 و5—1 ، متوازنة بالقوى (الاجهادات) المؤثرة فى أطرافها ، ولا تبقى سوى ثلاثة إجهادات مجهولة هى : O_{21} ، O_{34} و O_{65} ، يمكن

تحديدها بسهولة ، بطريقة نقطة العزم :

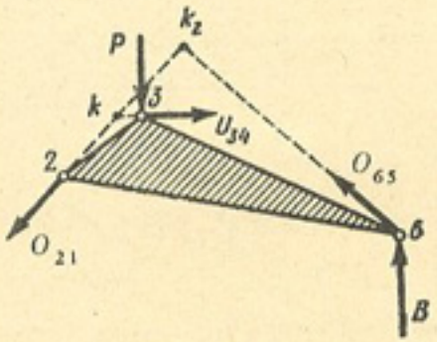
ولتحديد الإجهاد فى القضيب 2 — 1 ، نضع المعادلة المعبرة عن مجموع عزوم كافة القوى المؤثرة على قسم الجمالون المفصول بالمقطع $r - s - t$ ، حول نقطة تقاطع اتجاهى القضيبين 4 — 3 و 6 — 5 ، أى حول النقطة k_1 (شكل ٤ — ١٧) :

$$\Sigma M_{k1} = - O_{21} r_k - Pp - Bb_k = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$O_{21} = - \frac{Bb_k + Pp}{r_k}$$

إن نقطة العزم عند تحديد الإجهاد O_{34} ، ستكون نقطة تقاطع اتجاهى القضيبين 2 — 1 و 6 — 5 ، أى النقطة k_2 ، أما عند تحديد الإجهاد O_{65} ، فسوف تكون النقط k_3 بمثابة نقطة العزم (شكل ٤ — ١٨) .



الشكل ٤ — ١٨

وهكذا ، تحدد الإجهادات O_{21} ، O_{34} و O_{65} ، بصورة مستقلة عن بعضها البعض ، باستخدام ثلاث معادلات للتوازن ، تحتوى كل منها على مجهول واحد .

ويمكن تحديد الإجهادات فى بقية القضبان ، باستحداث مقاطع ، تمر فى أى عدد من القضبان ، إذا كانت الإجهادات المجهولة فى هذه الحالة ، هى الإجهادات الناشئة فى عدد من القضبان لا يزيد على الثلاثة .

ويمكن استخلاص النتائج التالية ، بناء على الأمثلة التى بحثناها أعلاه :

١ — من الأسهل استخدام طريقة نقطة العزم ، لحساب الجمالونات . عندما يمكن استحداث مقطع يمر مستواه ، بالإضافة إلى القضيب المبحوث (الذى يحدد الإجهاد فيه) ، بأى عدد من القضبان ، المتلاقية فى نقطة مشتركة واحدة ، لا تقع فى نفس اتجاه محور القضيب المبحوث .

٢ — إن طريقة نقطة العزم ملائمة أيضاً ، فى الحالات التى يمر فيها مستوى المقطع ، بأكثر من ثلاثة قضبان لا تلتقى فى نقطة واحدة ، إذا كانت الإجهادات الموجودة فى كافة القضبان ، ما عدا ثلاثة منها ، معروفة لدينا :

٣ — يمكن استخدام طريقة نقطة العزم أيضاً ، لحساب الجمالونات التى يمكن أن تستحدث فيها مقاطع تمر مستوياتها بأى عدد من القضبان يزيد على الثلاثة ، إذا قطع كل قضيب إضافى ، مرتين .

وكما يتضح ، عند حساب الجمالونات بطريقة نقطة العزم ، يحدد كل إجهاد بواسطة معادلة واحدة ذات مجهول واحد فقط . وفى هذه الحالة توضع معادلة العزوم ، بحيث لا تدخل فيها إلا القوى الخارجية المؤثرة على الجمالون ، مع إجهاد واحد محدد فى القضيب الذى يجرى بحثه . وفى هذه الحالات ، لا يؤثر الخطأ المحتمل عند تحديد الإجهاد فى أحد القضبان ، على قيمة الإجهاد فى القضيب الآخر .

طريقة المساقط : إن طريقة المساقط تستخدم بصورة رئيسية فى الحالتين التاليتين :

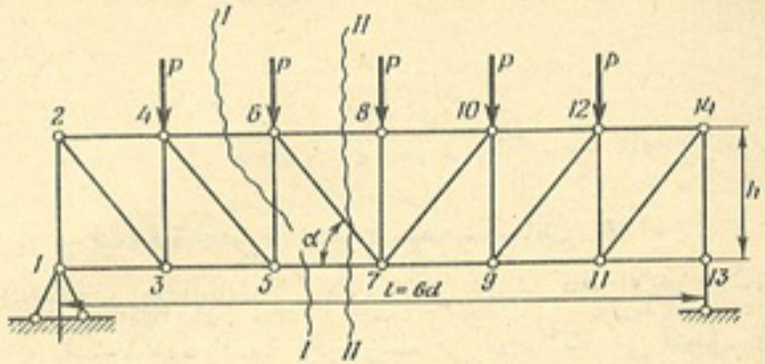
١) يبحث توازن أحد أقسام الجمالون (كما هو الحال عند اتباع طريقة نقطة العزم) ، عندما يكون قضيبان من القضبان الثلاثة المقطوعة ، متوازيين مع بعضهما .

٢) يبحث توازن الوصلات المفصولة من الجمالون (طريقة فصل الوصلات) *.

الآن نحدد الإجهادات فى قضبان (قطع) شبيكة الجمالون المبين فى الشكل (٤ — ١٩) .

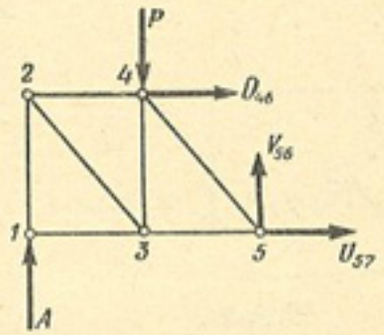
لتحديد الإجهاد V_{56} ، نقطع الجمالون بالمقطع $I - I$ ، الذى يمر بالقضيبين 6 — 4 و 7 — 5 . ولما كانت نقطة العزم للإجهاد V_{56} ، نتيجة لتوازى القضيبين 6 — 4 ، 7 — 5 تقع فى اللانهاية ، إذن لا يمكن وضع معادلة العزوم حول هذه النقطة . ولهذا السبب نضع معادلة (شرط) التوازن ، على هيئة مجموع مساقط

* غالباً ما تعتبر الحالة الأولى من الحالات المذكورة لطريقة المساقط ، وطرق نقطة العزم ، بمثابة حالة طريقة المقاطع .



الشكل ٤ — ١٩

كافة القوى المؤثرة فى القسم المقطوع من الجمالون (شكل ٤ — ٢٠) ، على المحور العمودى على الأوتار (إن الإجهادات الموجودة فى الأوتار لا تدخل فى هذه المعادلة ، لأنها عمودية على محور المساقط) :



الشكل ٤ — ٢٠

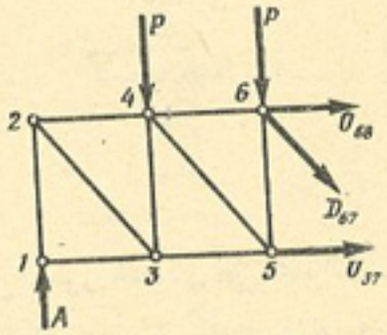
$$\Sigma Y = A - P + V_{56} = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$V_{56} = -(A - P) = -Q$$

حيث Q — تمثل قيمة قوة القص فى العتبة البسيطة .

ولتحديد الإجهاد D_{67} ، نقطع الجمالون على امتداد الخط $II - II$ (لاحظ الشكل ٤ — ١٩) ونضع معادلة التوازن للقسم الايسر منه (شكل ٤ — ٢١) :



الشكل ٤ — ٢١

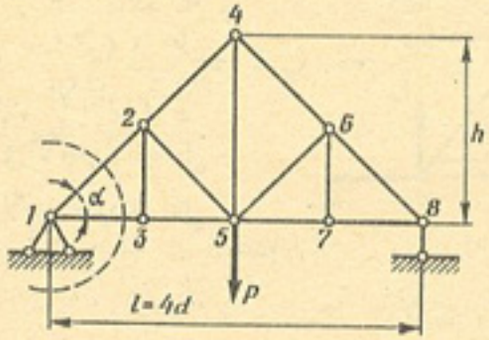
$$\Sigma Y = A - P - P - D_{67} \sin \alpha = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$D_{67} = \frac{A - 2P}{\sin \alpha} = \frac{Q}{\sin \alpha}$$

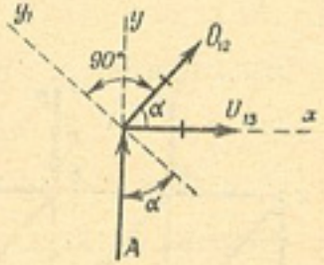
حيث Q — قيمة قوة القص فى العتبة البسيطة ، وتساوى $A - 2P$.

وعند حساب الجمالونات البسيطة ، يمكن تحديد كافة الإجهادات بطريقة المساقط ، باستخدامها بالنسبة لكل وصلة من الوصلات على التوالى. وفى هذه الحالة ، يجب البدء بتحديد إجهاد الوصلة ، التى يلتقى فيها ما يزيد على قضيبين فقط .



الشكل ٤ — ٢٢

وعلى سبيل المثال ، نحدد الإجهادات فى القضبان 2 — 1 ، 3 — 1 ، 3 — 2 و 5 — 3 من الجمالون المبين فى الشكل (٤ — ٢٢) : نقطع فى البداية وصلة المسند الأيسر (شكل ٤ — ٢٣) ونبحث شروط توازنها :



الشكل ٤ — ٢٣

ولتحديد الإجهاد O_{12} ، نعين (نسقط) كافة القوى المؤثرة فى الوصلة المذكورة . على المحور العمودى على اتجاه القضيب 3—1 ، أى على المحور الرأسى y :

$$\Sigma Y = A + O_{12} \sin \alpha = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$O_{12} = - \frac{A}{\sin \alpha}$$

وفى هذه الحالة $A = \frac{P}{2}$ ، إذن :

$$O_{12} = - \frac{P}{2 \sin \alpha}$$

ولتحديد الإجهاد U_{13} نعين (نسقط) كافة القوى المؤثرة فى وصلة المسند . على المحور العمودى على اتجاه القضيب 2 — 1 ، أى على المحور y_1 :

$$\Sigma Y_1 = A \cos \alpha - U_{13} \sin \alpha = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$U_{13} = \frac{A \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{P}{2} \cot \alpha$$

ونشير هنا إلى أنه كان فى الإمكان تحديد الإجهاد فى القضيب 3 من معادلة مساقط كافة القوى على المحور السينى x :

$$\Sigma X = U_{13} + O_{12} \cos \alpha = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$U_{13} = - O_{12} \cos \alpha$$

وبعد أن نعوض فى المعادلة الأخيرة ، قيمة الإجهاد O_{12} ، التى حصلنا عليها سابقاً ، نجد ما يلى :

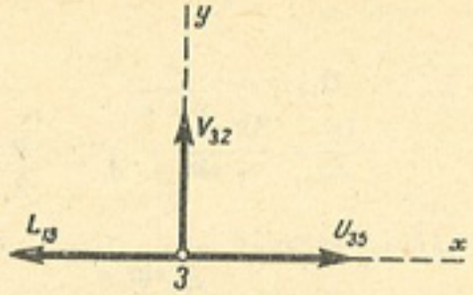
$$U_{13} = + \frac{P}{2 \sin \alpha} \times \cos \alpha = \frac{P}{2} \cot \alpha$$

ولتحديد الإجهاد فى القضيبين 2 — 3 و 5 — 3 ، نقطع الوصلة 3 ونبحث شروط توازنها (شكل ٤ — ٢٤) .

نضع معادلة مجموع مساقط القوى على المحور السينى x :

$$\Sigma X = - U_{31} + U_{35} = 0$$

ومن هذه المعادلة (باعتبار أن الرمزين U_{31} و U_{13} يعبران عن نفس الإجهاد



الشكل ٤ - ٢٤

بالذات ، وهو الإجهاد الناشئ في القضيب الذى يربط الوصلتين 1 و 3) نحصل على :

$$U_{35} = U_{13} = \frac{P}{2} \times \cot a$$

وبإسقاط (تعيين) كافة القوى على المحور الرأسى y ، نحصل على ما يلى :

$$\Sigma Y = V_{12} = 0$$

وكانت قيمة الإجهاد فى القضيب 2 — 3 ستساوى صفراً أيضاً ، لو لم يكن هذا القضيب عمودياً على القضيبين 3 — 1 و 5 — 3 .

إذن إذا تلاقت ثلاثة قضبان فى وصلة واحدة . وكان اثنان منهما واقعين على استقامة واحدة ، تكون الإجهادات الناشئة فى هذين القضيبين ، عند عدم وجود حمل خارجى مؤثر على الوصلة . متساوية مع بعضها فى المقدار والعلامة . ويكون الإجهاد الناشئ فى القضيب الثالث ، مساوياً للصفر .

وببحث شروط توازن الوصلة 2 ، نوجد الإجهادات فى القضيبين 4 — 2 و 5 — 2 ، وستحدد عن طريق الإجهادات التى أصبحت معروفة لدينا وهى O_{21} و V_{23} (أو O_{12} و V_{32}) .

وهكذا عند حساب الجمالونات بطريقة قطع الوصلات ، لا يمكن إيجاد الإجهادات الناشئة فى عدد من القضبان ، إلا بعد أن تحدد سلفاً الإجهادات الناشئة فى القضبان الأخرى . وبناء على ذلك ، يمكن أن يؤدى الخطأ الناجم عند تحديد أحد الإجهادات ، إلى عدم صحة تحديد الإجهادات فى مجموعة كاملة من القضبان .

وبالإضافة إلى ذلك . نجد بأن عيب هذه الطريقة . يتلخص فى الشرط الذى يؤدى دائماً إلى دخول الدوال المثلثية فى معادلات التوازن . الأمر الذى يؤدى إلى تعقيد الحساب .

ونشير هنا إلى أنه إذا كانت الوصلة التى يلتقى فيها قضيبان غير واقعين على استقامة ، خالية من تأثير الأحمال الخارجية ، نجد بأن الإجهادات فى هذين القضيبين تساوى صفراً . ويمكن التأكد من ذلك ببحث شروط توازن الوصلة 1 من الجمالون المبين فى الشكل (٤ - ٢٥) .

وبالفعل ، يمكننا من معادلتى مساقط كافة القوى المؤثرة فى الوصلة 1 (شكل ٤ — ٢٦) على المحورين العمودى y والأفقى x ، وهما المعادلتان :

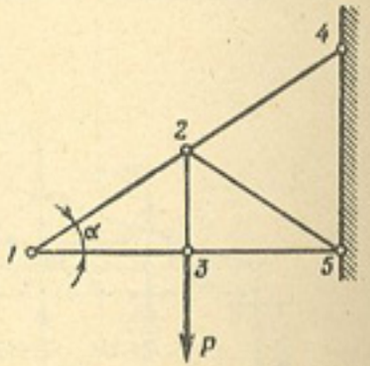
$$\Sigma Y = O_{12} \sin a = 0$$

$$\Sigma X = O_{12} \cos a + U_{13} = 0$$

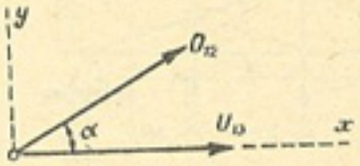
أن نحصل على ما يلى :

$$O_{12} = U_{13} = 0$$

وعادة عند حساب الجمالون تستخدم طريقة نقطة العزم وطريقة المساقط . حيث تستخدم فى كل مرة ، الطريقة التى يكون من الأسهل اتباعها ، لتحديد الإجهاد فى القضيب المعين .



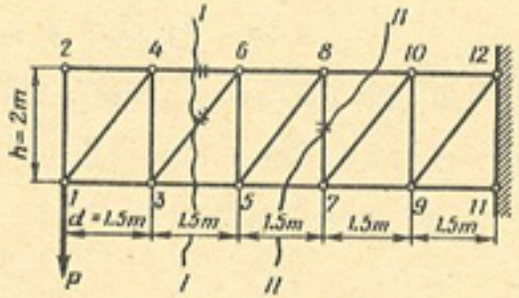
الشكل ٤ - ٢٥



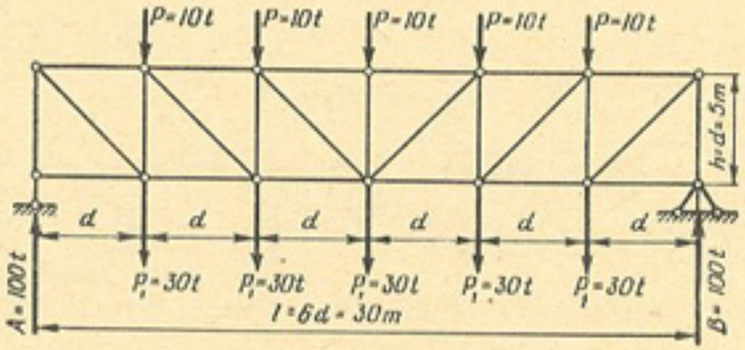
الشكل ٤ - ٢٦

مثال ١ : يطلب تحديد الإجهادات فى القضبان 6 — 4 و 6 — 3 و 8 — 7 من الجمالون الحامل لإفريز ، والمبين فى الشكل (٤ - ٢٧) .

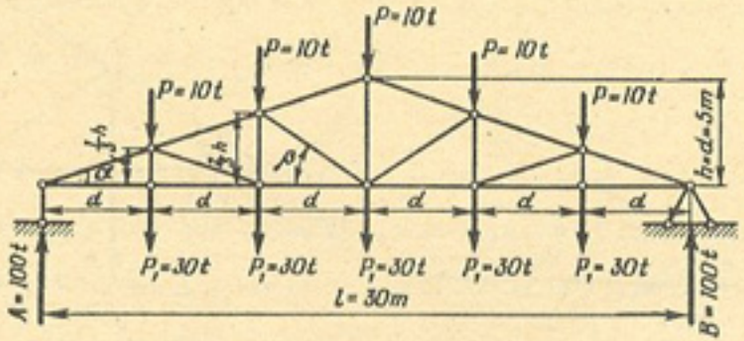
الحل : لتحديد الإجهادات المذكورة ، نقطع الجمالون بالطريقة المبينة فى الشكل (٤ - ٢٧) ونبحث توازن الأقسام اليسرى المقطوعة . أن كافة معطيات الحساب مدرجة فى الجدول العام (جدول ٤ - ١) . والأقسام المقطوعة من هذا الجمالون ، موضحة تخطيطياً فى العمود الثالث من الجدول المذكور . وتحتوى أحدة الجدول الأخرى ، على معادلات التوازن وحلولها .



الشكل ٤ — ٢٧

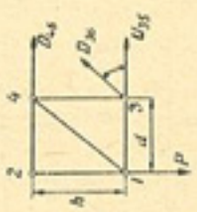
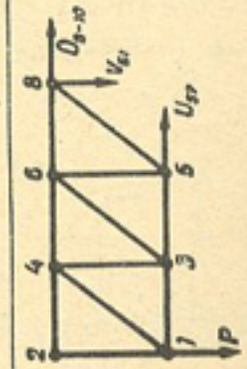


الشكل ٤ — ٢٨



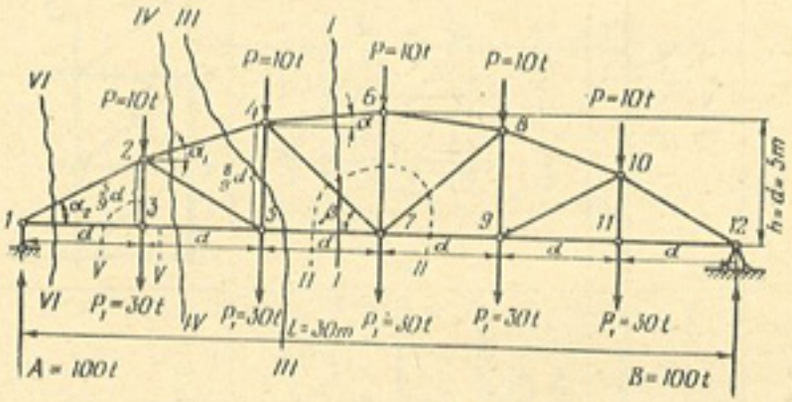
الشكل ٤ — ٢٩

جدول ٤ — ١

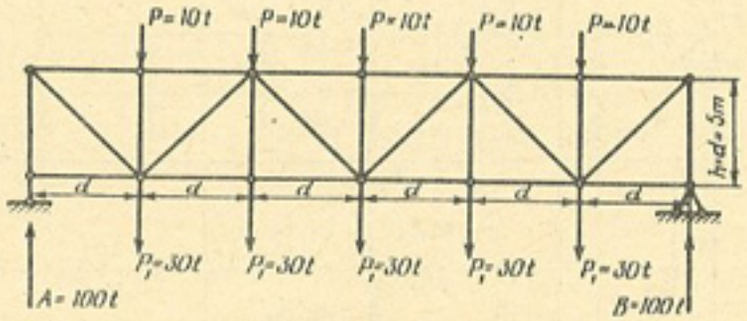
ملاحظات	قيمة الإجهاد م		حل المعادلات	معادلات التوازن	الرسم التخطيطى لقسم المبحوث	رقم المقطع	رقم القضيب
	إنضغاط (-)	شد (+)					
٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١
لاحظ الشكل (٤ — ٢٧) $h = 2$ m; $d = 1.5$ m; $\tan\alpha = \frac{h}{d} = \frac{2}{1.5} = \frac{4}{3}$; $\sin\alpha = \frac{4}{5}$		$\frac{3}{4}P$	$O_{46} = \frac{Pd}{h} = \frac{P \times 1.5}{2}$	$\Sigma M_3 = -Pd + O_{46}h = 0$		1 — 1	4 — 6
		$\frac{5}{4}P$	$D_{36} = \frac{P}{\sin\alpha} = \frac{P \times 5}{4}$	$\Sigma Y = -P + D_{36}\sin\alpha = 0$		1 — 1	3 — 6
لاحظ الشكل (٤ — ٢٧)	P		$V_{87} = -P$	$\Sigma Y = -P - V_{87} = 0$		II — II	7 — 8

مثال ٢ : يطلب تحديد الإجهادات فى كافة قضبان الجمالونات المبينة فى الأشكال (٤ – ٢٨) و (٤ – ٢٩) و (٤ – ٣٠) و (٤ – ٣١) ، مع العلم بأنها متساوية الأبواع والأحمال . ويطلب كذلك تخطيط الرسوم البيانية للإجهادات المذكورة .

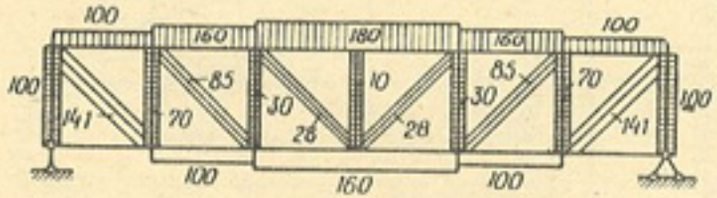
الحل : أن نتائج الحساب مبينة فى الأشكال (٤ – ٣٢) ، (٤ – ٣٣) و (٤ – ٣٤) و (٤ – ٣٥) على التوالى ، على هيئة رسوم بيانية للإجهادات . ويتناسب عرض كل شريط من أشرطة هذه الرسوم البيانية ، تناسباً طردياً مع قيمة الإجهاد فى القضيب المناظر من الجمالون . إن الأشرطة التى تعبر عن الإجهادات الموجبة (حالة الشد) غير مظللة ،



الشكل ٤ – ٣٠



الشكل ٤ – ٣١



الشكل ٤ – ٣٢

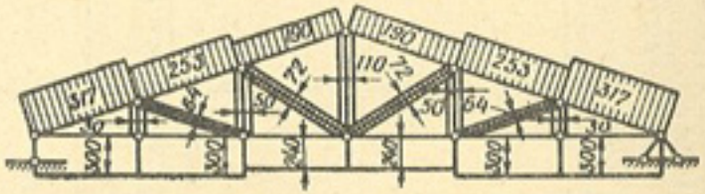
أما الإجهادات السالبة (حالة الانضغاط) فهى مظللة *

وبالنسبة للجمالون المبين فى الشكل (٤ – ٣٠) ، فقد وضع الجدول (٤ – ٢) ، الذى يبين طريقة الحساب بأكملها .

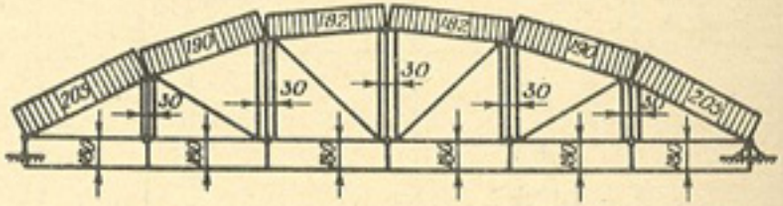
وبمقارنة الرسوم البيانية للإجهادات الناشئة فى قضبان الجمالونات الثلاثة مع بعضها ، (لها أبواع متساوية ، وشبيكاتها من نفس النوع ، والأحمال المؤثرة عليها متساوية أيضاً) ، وهى الجمالونات المبينة فى الأشكال (٤ – ٣٢) ، (٤ – ٣٣) و (٤ – ٣٤) ، نتوصل إلى النتيجة التالية : أن أسوأ الجمالونات غير الملائمة ، هو الجمالون المثلث (لاحظ الشكل ٤ – ٢٩) ، وذلك لأن المساحة الكلية لأشرطة رسمه البيانى ، أكثر مما هى عليه فى الجمالونين الآخرين ، إذن فهو الجمالون الأكبر وزناً ، من بين الجمالونات الثلاثة التى يجرى بحثها .

مثال ٣ : يطلب تحديد الإجهادات فى قضبان الجمالون المتوازى الأوتار ، ذى الشبيكة التى رتبت أضلاعها على شكل حرف k (شكل ٤ – ٣٦ ، أ) .

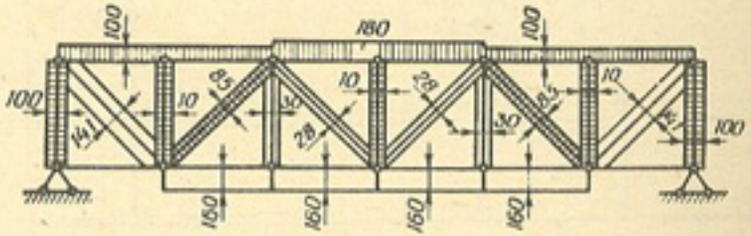
الحل : نقطع أية وصلة متوسطة (حيث يتقاطع فيها ضلعان مائلان مع ضلع قائم) ونسقط كافة القوى المؤثرة فيها ، على المحور الأفقى (شكل ٤ – ٣٦ ، ب) :



الشكل ٤ – ٣٣



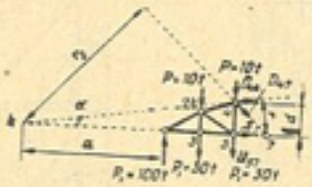
الشكل ٤ – ٣٤

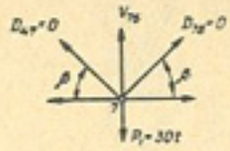
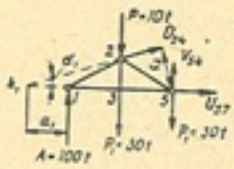


الشكل ٤ – ٣٥

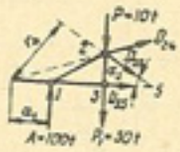
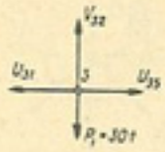
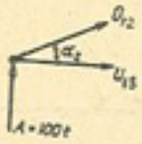
* إن الإجهادات الموجودة فى قضبان الجمالونات ، مقاسة بالأطنان .

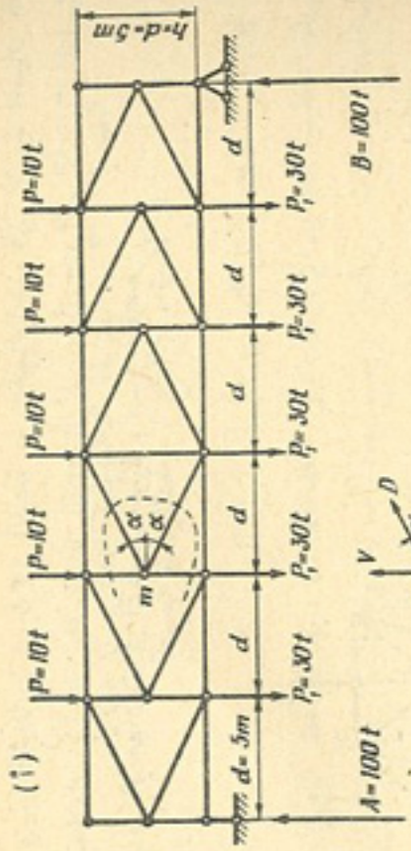
جدول ٤ — ٢

رقم القضيب	رقم المقطع	الرسم التخطيطي لقسم المبحوث	معادلة التوازن	حل المعادلات	قيمة الإجهاد ، م شد (+)	قيمة الإجهاد ، م إنضغاط (−)	ملاحظات
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
4 — 6	1 — 1		$\Sigma M_7 = A \times 3d - 2P \times 1.5d - 2P_1 \times 1.5d + O_{46} r_1 = 0$	$O_{46} = -\frac{A \times 3d}{r_1} + \frac{+3Pd + 3P_1 d}{r_1}$	182		$r_1 = (a + 3d) \sin \alpha$; $\tan \alpha = \frac{1}{9}$ (لاحظ الشكل ٤ — ٣٠) ومن الناحية الأخرى : $\tan \alpha = \frac{8}{9} \times \frac{d}{(a+2d)}$ وتحدد قيمة a من المعادلة الأخيرة : $a = 6d$. $\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$
4 — 7			$\Sigma M_k = -Aa + 2P(a + 1.5d) + 2P_1(a + 1.5d) + D_{47} r_2 = 0$	$D_{47} = \frac{Aa}{r_2} + \frac{-2P(a+1.5d)}{r_2} + \frac{-2P_1(a+1.5d)}{r_2}$	0	0	$r_2 = (a + 3d) \sin \beta$ $\tan \beta = \frac{8}{9}$ (لاحظ الشكل ٤ — ٣٠)

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
5 — 7			$\Sigma M_4 = A2d - Pd - P_1 d - U_{57} \frac{8}{9} d = 0$	$U_{57} = (A2d - Pd - P_1 d) \times \frac{9}{8d}$	180		لاحظ الشكل ٤ — ٣٠
7 — 6	11—11		$\Sigma Y = V_{76} - P_1 = 0$	$V_{76} = P_1$	30		$D_{47} = D_{73} = 0$ (لاحظ الشكل ٤ — ٣٠)
2 — 4	111-111		$\Sigma M_3 = A \times 2d - Pd - P_1 d + O_{24} r_3 = 0$	$O_{24} = -\frac{A2d}{r_3} - \frac{Pd + P_1 d}{r_3}$	190		$r_3 = (a_1 + 2d) \sin \alpha$; $\tan \alpha_1 = \frac{3}{9}$ ولتحديد a_1 يمكن وضع المعادلة التالية : $\frac{5}{9} \times \frac{d}{(a_1 + d)} = \tan \alpha_1 = \frac{3}{9}$
5 — 4			$\Sigma M_{k_1} = -Aa_1 + P(a_1 + d) + 2P_1(1.5d + a_1) - V_{34}(2d + a_1) = 0$	$V_{34} = \frac{P \times (a_1 + d)}{2d + a_1} + \frac{2P_1(1.5d + a_1)}{2d + a_1} - \frac{Aa_1}{2d + a_1}$		30	

تابع جدول : – ٢

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
2 — 5	IV — IV		$\Sigma M_{s_1} = -A a_1 + P(d + a_1) + P_1(d + a_1) + D_{25} r_4 = 0$	$D_{25} = \frac{A a_1 - P(d + a_1)}{r_4} - \frac{P_1(d + a_1)}{r_4}$	0	0	$r_4 = (a_1 + 2d) \sin a_2$; $\tan a_2 = \frac{5}{9}$
3 — 5			$\Sigma M_2 = Ad - U_{35} \frac{5}{9} d = 0$	$U_{35} = \frac{A d}{5 d} 9$	180		لاحظ الشكل : – ٣٠
1 — 3	V — V		$\Sigma X = -U_{31} + U_{35} = 0$	$U_{31} = U_{35}$	180		لاحظ الشكل : – ٣٠
3 — 2			$\Sigma Y = V_{32} - P_1 = 0$	$V_{32} = P_1$	30		
1 — 2	VI — VI		$\Sigma Y = A + O_{12} \sin a_2 = 0$	$O_{12} = -\frac{A}{\sin a_2}$		205	لاحظ الشكل : – ٣٠



الشكل : – ٣٦

$$\Sigma X = D \cos a + D' \cos a' = 0$$

ومنها ينتج أن :

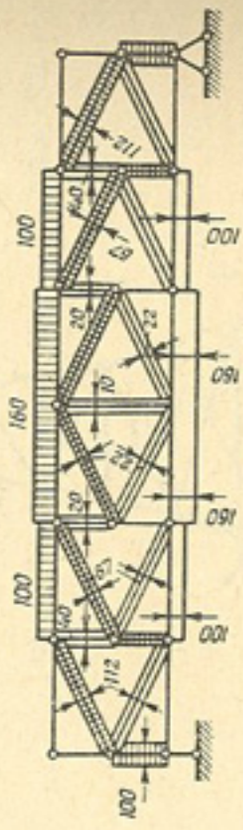
$$D \cos a = - D' \cos a'$$

حيث a و a' – زاويتا ميل الضلعين المائلين مع الأفق .

وإذا كانت $a = a'$ سوف نجد بأن :

$$D = - D'$$

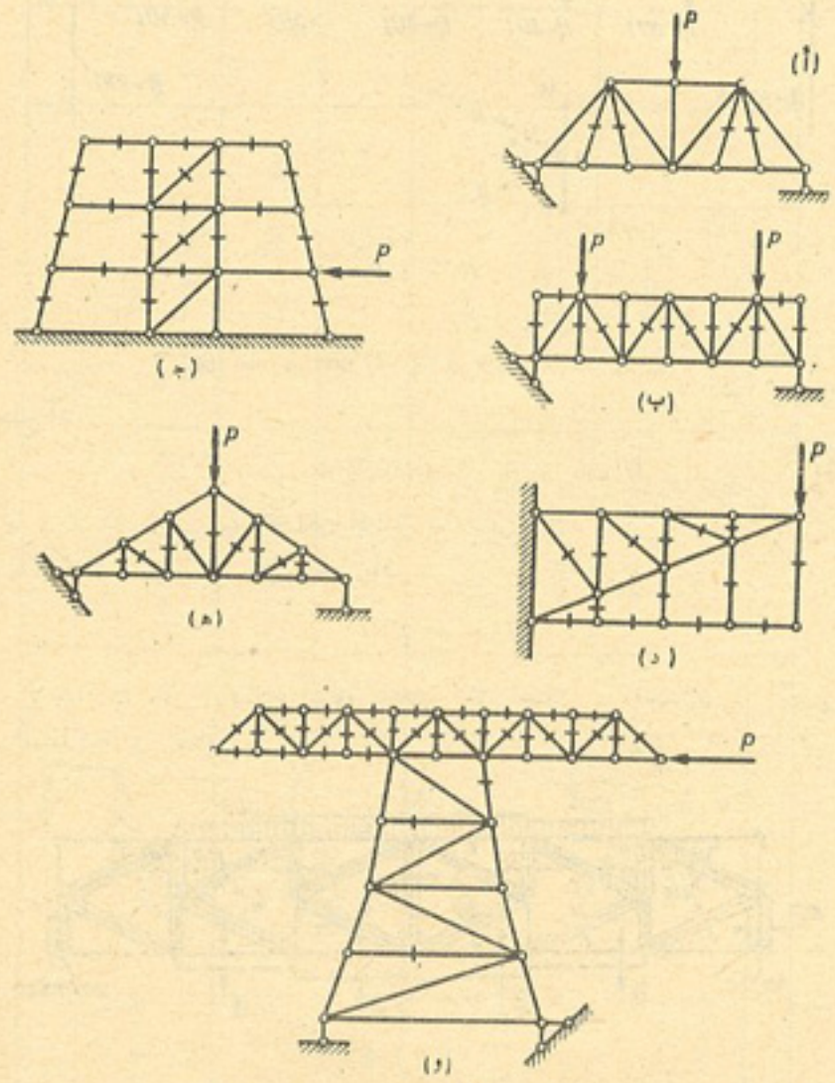
أي أن الإجهادات في الأضلاع المائلة لنفس الجزء المشكل من الجمالون ، متساوية في المقدار ومتعاكسة في العلامة .



الشكل : – ٣٧

وسوف لا نقوم بتحديد الإجهادات في كافة قضبان الجمالون . أن الرسم البياني للإجهادات ، مبين في الشكل (: – ٣٧) .

ويبين الشكل (٤–٣٨) أنظمة من الجمالونات . التى أشرت قضبان كثيرة منها بعلامات شارطة . ونقترح على القارئ أن يثبت بأنه عند تأثير الأحمال المعلومة . تكون قيم الإجهادات فى القضبان المؤثرة ، مساوية للصفر .



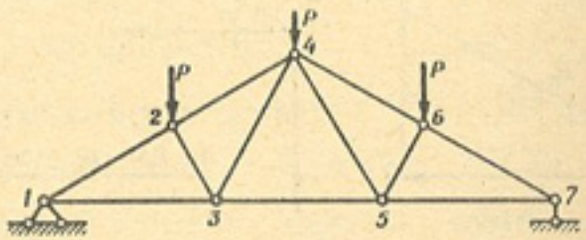
الشكل ٤ – ٣٨

البند ٤ – ٣ : الطريقة التخطيطية لتحديد الإجهادات فى قضبان (قطع) الجمالونات البسيطة

لقد أشرنا أعلاه ، إلى أنه عند حساب الجمالونات البسيطة ، يمكن اتباع الطريقة التحليلية لتحديد الإجهادات فى كافة القضبان ، بطريقة قطع الوصلات ، وذلك مقطع الوصلات على التوالى و وضع معادلات توازنها . إن لمثل هذه الجمالونات دائماً ، وصلة واحدة على الأقل ، يلتقى فيها قضيبان فقط . ويجب فى هذه الحالة حساب الجمالون ، ابتداء من هذه الوصلة .

وسوف تبحث فيما يلى الطريقة التحليلية لحساب الجمالونات البسيطة . وهذه الطريقة مبنية على التحليل التخطيطى للقوة ، إلى مركبتين . ويتم حساب الجمالون بهذه الطريقة ، حسب النظام التالى : توضع القوة المؤثرة فى الوصلة ، التى يلتقى فيها القضيبان ، على امتدادى هذين القضيبين ، ونتيجة لذلك تحدد الإجهادات المؤثرة فيهما . ويمكن القيام بتحليل هذه القوة إلى مركبتين ، برسم متوازى أضلاع القوى ، أو برسم مثلث القوة . ويجب أن يكون مثلث القوى هذا مقفلا ، وذلك لأن الوصلة التى يرسم لها هذا المثلث ، واقعة فى حالة توازن . ثم ننتقل إلى الوصلة التالية ونرسم مثلث القوى الخاص بها ، كما فى الحالة السابقة . ولهذا الغرض ، تحلل محصلة القوة الخارجية والإجهاد المستخرج سابقاً (فى أحد القضبان) ، إلى مركبتين فى اتجاهى قضيبين آخرين ، لا تزال الإجهادات فيهما مجهولة .

وبالانتقال هكذا من وصلة إلى أخرى ، يمكن تحديد الإجهادات فى كافة القضبان .

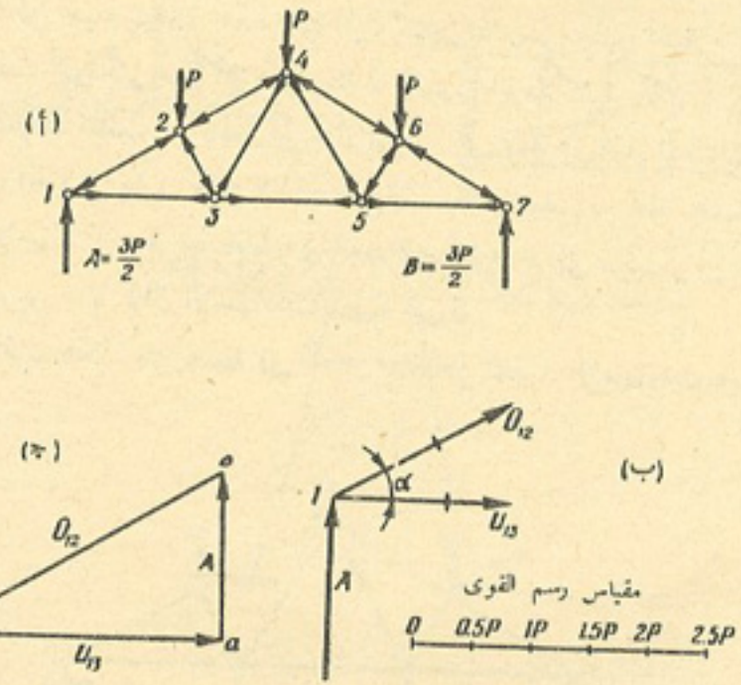


الشكل ٤ – ٣٩

ونقوم على سبيل المثال ، ببحث الجمالون المبين فى الشكل (٤ — ٣٩) والمعرض لتأثير القوى (الأحمال) المؤثرة فى وصلاته العليا . نهمل المسندين ونستعيض عنهما بردود الفعل ، التى يمكن إيجادها بالطريقتين التحليلية أو التخطيطية .

ويبين الشكل (٤ — ٤٠ ، أ) الجمالون مع كافة القوى المؤثرة عليه ، بما فيها ردود فعل المساند . نبدأ بتحديد الإجهادات من وصلة المسند الأيسر ، حيث يلتقى القضيبان 2 — 1 و 3 — 1 . نفصل هذه الوصلة ونبحث شروط توازنها (شكل ٤ — ٤٠ ، ب) . إن هذه الوصلة واقعة تحت تأثير رد فعل المسند الأيسر $A = \frac{3P}{2}$ والإجهادين (القوتين) O_{12} و U_{13} . وباعتبار الوصلة فى حالة توازن ، نرسم مضلع القوى الخاص بها (فى هذه الحالة مثلث القوى) . ولهذا الغرض نقوم بما يلى :

١ — نرسم أو نضع بمقياس رسم معين ، رد فعل المسند A ، المعلوم المقدار والاتجاه ،



الشكل ٤ — ٤٠

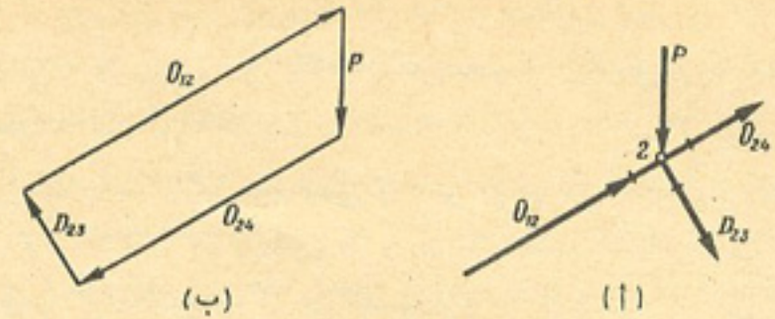
٢ — نرسم من بداية ونهاية رد فعل هذا ، مستقيمين موازيين للإجهادين المجهولين O_{12} و U_{13} ، حتى يتقاطعان مع بعضهما ، ونحصل نتيجة لذلك على مثلث القوى ، المبين فى الشكل (٤ — ٤٠ ، ج) .

وبواسطة مثلث القوى نحدد قيمتى واتجاهى الإجهادين الناشئين فى القضيبين 2 — 1 و 3 — 1 . إن الضلعين bc و ca ، المقاسين بمقياس رسم القوى ، يمثلان قيمتى الإجهادين فى كل من القضيبين 2 — 1 و 3 — 1 على التوالى . وتحدد اتجاهات (علامات) الإجهادات فى القضبان ، من الشرط الذى يجعل كافة القوى (الإجهادات) الواقعة على محيط مضلع القوى ، تتجه فى نفس الاتجاه . وفى هذه الحالة ، نستطيع بمعرفة اتجاه رد الفعل A ، إيجاد اتجاه الإجهاد O_{12} من b إلى c ، واتجاه الإجهاد U_{13} من c إلى a .

ولما كان الإجهاد O_{12} فى القضيب 2 — 1 ، مؤثراً فى اتجاه الوصلة . إذن يكون القضيب 2 — 1 معرضا للانضغاط . ولما كان الإجهاد U_{13} متجهاً من اليسار إلى اليمين ، أى مبتعداً عن الوصلة ، إذن يكون القضيب 3 — 1 معرضاً للشد .

ثم نضع اتجاهات الإجهادات التى وجدناها ، على الشكل (٤ — ٤٠ ، أ) . أن السهم المتجه نحو الوصلة ، يشير إلى أن القضيب معرض للانضغاط ، والسهم المبتعد عن الوصلة ، يشير إلى أن القضيب معرض للشد . إن الأسهم الموضوعة عند نهايتى القضيبين المتباعدتين ، عند الوصلتين 3 و 2 ، يجب أن تؤخذ فى الاعتبار عند بحث توازن الوصلتين المذكورتين .

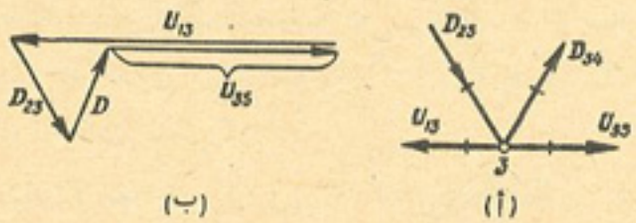
وبعد تحديد الإجهادين O_{12} و U_{13} ، ننتقل إلى الوصلة 2 ، التى تلتقى فيها القضبان الثلاثة 1 — 2 و 3 — 2 و 4 — 2 . لرسم مضلع القوى ، نضع الإجهاد الموجود فى القضيب 1 — 2 (الإجهاد المستخرج O_{12}) ، فى اتجاه الوصلة 2 (شكل ٤ — ٤١ ، أ) . وهكذا تصبح لدينا قوتان (O_{12} و P) ، معلومتا المقدار والاتجاه ، وقوتان (O_{24} و D_{23}) مجهولتا المقدار . ونستطيع إيجاد الإجهادين المجهولين فى القضيبين 4 — 2 و 3 — 2 بواسطة مضلع القوى المقفل (شكل ٤ — ٤١ ، ب) . ويبحث الشكل (٤ — ٤١ ، ب)



الشكل ٤ – ٤١

نستنتج بأن الإجهادات الناشئة فى القضيبين 4 — 2 و 3 — 2 ، هى إجهادات انضغاط .

ننتقل الآن إلى الوصلة 3 (شكل ٤ – ٤٠ ، أ) التى تلتقى فيها القضبان الأربعة 1 — 3 ، 2 — 3 ، 4 — 3 و 5 — 3 (شكل ٤ – ٤٢ ، أ) . إن الإجهادات المجهولة فى هذه الوصلة ، هى الإجهادات الموجودة فى القضيبين 4 — 3 و 5 — 3 فقط . ويمكن إيجاد قيمها برسم مضلع القوى ، الموضح فى الشكل (٤ – ٤٢ ، ب) . وكما يتضح من هذا الشكل ، تنشأ فى القضيبين 4 — 3 و 5 — 3 (شكل ٤ – ٤٠ ، أ) إجهادات شد .

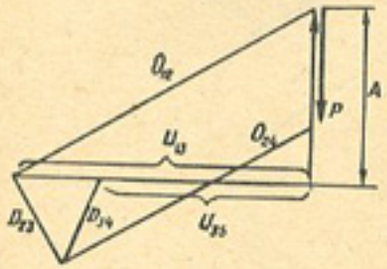


الشكل ٤ – ٤٢

ولا حاجة إلى تحديد الإجهادات فى قضبان النصف الأيمن من الجمالون ، وذلك نظراً لتماثل الجمالون والأحمال .

وهكذا يمكن برسم مضلع القوى المقفل ، المناظر لكل وصلة من الوصلات ، تحديد الإجهادات فى كافة قضبان الجمالون . وفى مثل مضلعات القوى هذه ،

يقابلنا كل إجهاد (كل قوة داخلية) مرتين : فى المرة الأولى كإجهاد مجهول فى إحدى الوصلات ، ثم كقوة معلومة ، مؤثرة فى الوصلة المجاورة (عند تحديد الإجهادين المجهولين لهذه الوصلة المجاورة) . ويمكن توحيد كافة مضلعات القوى المنفردة ، المرسومة لكافة وصلات الجمالون ، فى رسم بيانى عام (مشترك) ، يظهر فيه كل إجهاد مرة واحدة فقط .

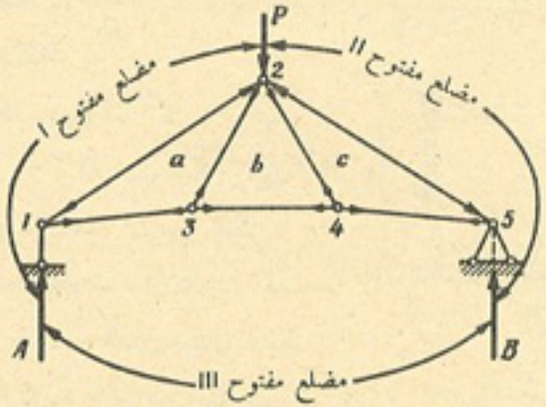


الشكل ٤ – ٤٣

ويبين الشكل (٤ – ٤٣) توحيد مضلعات القوى ، المرسومة للجمالون المبحوث . وقد ظهر بأن هذا التوحيد ممكن ، لأن القوى فى مضلعات القوى ، قد وضعت أو رتبت بالتتابع الذى تكون عليه الواحدة بعد الأخرى ، عند دورانها حول الوصلة المناظرة باتجاه عقرب الساعة (أو بعكس اتجاه عقرب الساعة) . وسوف نجعل القوى فيما بعد تدور حول الوصلة ، باتجاه عقرب الساعة دائماً . ولو فرضنا بأن القوى دارت حول الوصلة 1 (راجع الشكل ٤ – ٤٠ ، أ) باتجاه عقرب الساعة ، فسوف يأتى الإجهادان O_{12} و U_{13} على التوالى ، بعد رد فعل المسند A مباشرة . أما بالنسبة للوصلة 2 فسوف تأتى بعد الإجهاد O_{12} كل من القوى P و O_{24} و D_{23} على التوالى . أن القوى مرتبة بنفس التتابع أيضاً ، فى مضلعات القوى المبينة فى الشكلين (٤ – ٤٠ ، ج) و (٤ – ٤١ ، ب) .

إن الرسم البيانى العام للإجهادات (الذى يسمى برسم ماكسويل – كريمونة) لا يخطط عادة بتوحيد مضلعات القوى المرسومة سابقاً ، ولكنه يخطط مباشرة — بدون رسم مثل هذه المضلعات . وسوف نبحث طريقة تخطيطه ، بناء على أساس الجمالون المبين فى الشكل (٤ – ٤٤) . وعند تخطيط هذا الرسم البيانى ، يستخدم النظام التالى لرموز الإجهادات : تستخدم الحروف والأرقام ، ليس للرمز إلى القضبان المنفردة ، بل للرمز إلى مساحات (حقول) كاملة ، أى إلى المساحات المحاطة من جميع الجهات بالقضبان أو المساحات الملاصقة للمحيط الخارجى للجمالون والمنفصلة عن بعضها البعض بقوى خارجية (بما فى ذلك ردود فعل المساند) . ونلاحظ من الشكل

(٤ — ٤٤) بأن المساحات المحاطة بالقوى الخارجية ، مرقمة بالأرقام الرومانية I ، II و III (المساحات غير المقفلة) . أما المساحات الداخلية للجمالون ، والمحاطة بقضبانه ، فقد وضعت عليها الحروف الهجائية اللاتينية a ، b و c . وقد

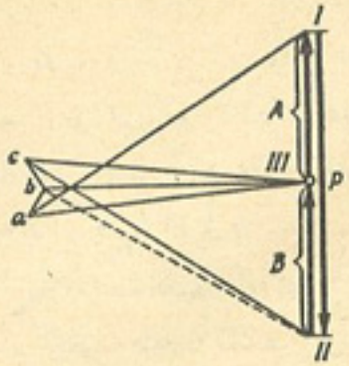


الشكل ٤ — ٤٤

رمز إلى كل قوة داخلية (إجهاد) وكل قوة خارجية (حمل) بعلامتين ، مناظرتين للمساحتين اللتين تفصل بينهما القوة الداخلية (الإجهاد) أو القوة الخارجية (الحمل) . وقد رمز إلى رَدّ فعل المسند الأيسر ، الذى يفصل بين المساحتين I و III ، بالرمز III — I ، وليس بالرمز I — III ، وذلك لأننا عند تخطيط الرسم البيانى ، ندور حول الوصلة فى اتجاه عقرب الساعة . لذا يرمز إلى الحمل P بالرمز II — I ، وإلى رد فعل المسند الأيمن بالرمز III — II . ويرمز إلى الإجهاد فى القضيب 2 — 1 ، عند رسم مضلع القوى لوصلة المسند 1 ، بالرمز a — 1 ، وذلك باتباع نفس الأصول السابقة . وعند رسم مضلع القوى للوصلة 2 سنرمز إلى الإجهاد فى القضيب المذكور بالرمز 1 — a . وتساعد طريقة وضع الرموز هذه ، على عدم ترقيم وصلات الجمالون .

نبدأ بتخطيط الرسم البيانى ابتداء من وصلة المسند الأيسر I ، التى يلتقى فيها قضيبان فقط . ولهذا الغرض ، نضع على المستقيم الرأسى ، بمقياس رسم معين ، قيمة رد فعل المسند الأيسر I — III . ولتحديد الإجهادين a — I و III — a ، نرسم من النقطتين I و III (شكل ٤ — ٤٥) مستقيمين موازيين لقضيبى

الجمالون 2 — 1 و 3 — 1 على التوالى . إن نقطة تقاطع هذين المستقيمين . الواقعة على الرسم البيانى للإجهادات ، المشار إليها بالحرف a ، تحدد قيم الإجهادات المجهولة فى قضبان الوترين العلوى a — 1 والسفلى a — III .



الشكل ٤ — ٤٥

وتوجد اتجاهات (علامات) هذه الإجهادات ، من الشرط الذى يجعل كافة القوى الواقعة على محيط الجمالون ، تسلك فى نفس الاتجاه ، وتؤلف حلقة مقفلة . أن اتجاه رد فعل I — III معروف من المثلث III — a — I — III التابع للرسم البيانى ، وهو الاتجاه من النقطة III إلى النقطة I ، لذا ستصبح الإجهادات فى بقية أضلاعه ، متجهة من النقطة I إلى النقطة a ، ومن النقطة a إلى النقطة III . وبعد الإشارة إلى هذه الاتجاهات بالأسهم ، على الرسم التخطيطى للجمالون (لاحظ الشكل ٤ — ٤٤) ، نجد بأن الإجهاد a — I هو إجهاد انضغاط ، والإجهاد a — III هو إجهاد شد .

ننتقل الآن إلى الوصلة 3 للوتر السفلى (القريبة من الوصلة 1) التى يؤثر فيها إجهاد الشد a — III الذى وجدناه الآن ، وإجهادان مجهولان هما a — b و III — b . ولتحديد هذين الإجهادين المجهولين ، نرسم من النقطتين III و a على الرسم البيانى ، مستقيمين موازيين للقضيبين III — b و a — b على التوالى . ثم نرمز إلى نقطة تقاطع هذين المستقيمين ، على الرسم البيانى للإجهادات ، بالحرف b . وبوجود قوة معلومة واحدة ، فى مثلث القوى الجديد III — a — b — III (لاحظ الشكل ٤—٤٥) وهى القوة a — III . نقوم كما فى الحالة السابقة ، بإيجاد اتجاهى المستقيمين a — b و III — b . وبنقل هذه الاتجاهات إلى الجمالون (لاحظ الشكل ٤ — ٤٤) نجد بأن كافة القضبان الملتقية فى الوصلة 3 . تكون معرضة للشد .

والآن ، نبحث كيفية رسم مضلع القوى للوصلة 2 ، التى يلتقى فيها الإجهادان

المعلومان $a - b$ و $I - a$ ، والقوة الخارجية $I - II$ والإجهادان المجهولان $II - c$ و $c - b$. وكما يتضح من الشكل (٤ – ٤٥) لدينا الإجهادان $b - a$ و $a - I$ المعينان على الرسم البيانى ، نضيف إليهما بالرسم ، القوة الخارجية $I - II$. ولهذا الغرض ، نرسم من النقطة I ، بمقياس الرسم المأخوذ ، قيمة القوة $I - II$. ونضعها إلى الأسفل .

إن محصلة القوى والإجهادات $b - a$ ، $a - I$ و $I - II$ ، ممثلة على الرسم البيانى ، بالخط المنقط $b - II$ ، الذى يمكن عدم رسمه . وبتحليل المحصلة $b - II$ (شكل ٤ – ٤٥) إلى مركبتين موازيتين للقضيبين 5 – 2 و 4 – 2 ، نحدد الإجهادين الموجودين فيهما ، المساويين للمستقيمين $II - c$ و $c - b$. وينتج من مضلع القوى $b - a - I - II - c - b$ المناظر للوصلة 2 من الجمالون ، بأن الإجهاد $III - c$ هو إجهاد انضغاط ، والإجهاد $c - b$ هو إجهاد شد .

نأتى الآن إلى رسم مضلع القوى المقفل ، للإجهادات والقوى الملتقية فى الوصلة 4 . لدينا هنا إجهادان معلومان فى قضيبين من قضبانه ، ويبقى إجهاد واحد مجهول ، وهو الإجهاد $c - III$.

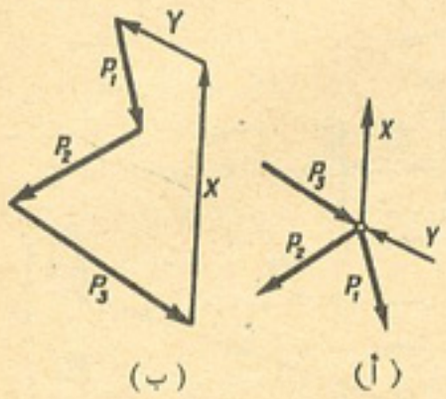
وإذا كان الرسم البيانى صحيحاً ، فإن المستقيم المار فى النقطة c والموازى للقضيب 5–4 ، سيمر حتماً فى النقطة III ، أى إن الرسم البيانى يجب أن يكون مقفلا . فى ذلك يتلخص التأكد من صحة الرسم البيانى .

إن مضلع القوى للوصلة 5 ، من الجمالون ، هو المضلع $II - c - III - II$.

وفى الرسم البيانى المرسوم ، وضعت القوى الخارجية بنفس الترتيب ، الذى كانت ستترتب بموجبه ، لو كانت ستمر حول المحيط الخارجى للجمالون ، فى اتجاه عقرب الساعة . إن قفل مضلع القوى الخارجية ، هو نتيجة لوجود الجمالون بأكمله فى حالة توازن .

وعادة يبدأ تخطيط الرسم البيانى ، برسم مضلع القوى الخارجية (بما فيها ردود فعل المساند) ، بوضعها بنفس الترتيب الذى تكون عليه ، عند مرورها حول محيط الجمالون فى اتجاه عقرب الساعة . ثم يتم تحليل القوى (الإجهادات) تخطيطياً ، فى كل وصلة من الوصلات ، ابتداء من الوصلة التى يلتقى فيها قضبان فقط .

وفى هذه الحالة ، توضع القوى (الاجهادات) بنفس الترتيب أو التتابع ، المناظر لدورانها حول الوصلة فى اتجاه عقرب الساعة .

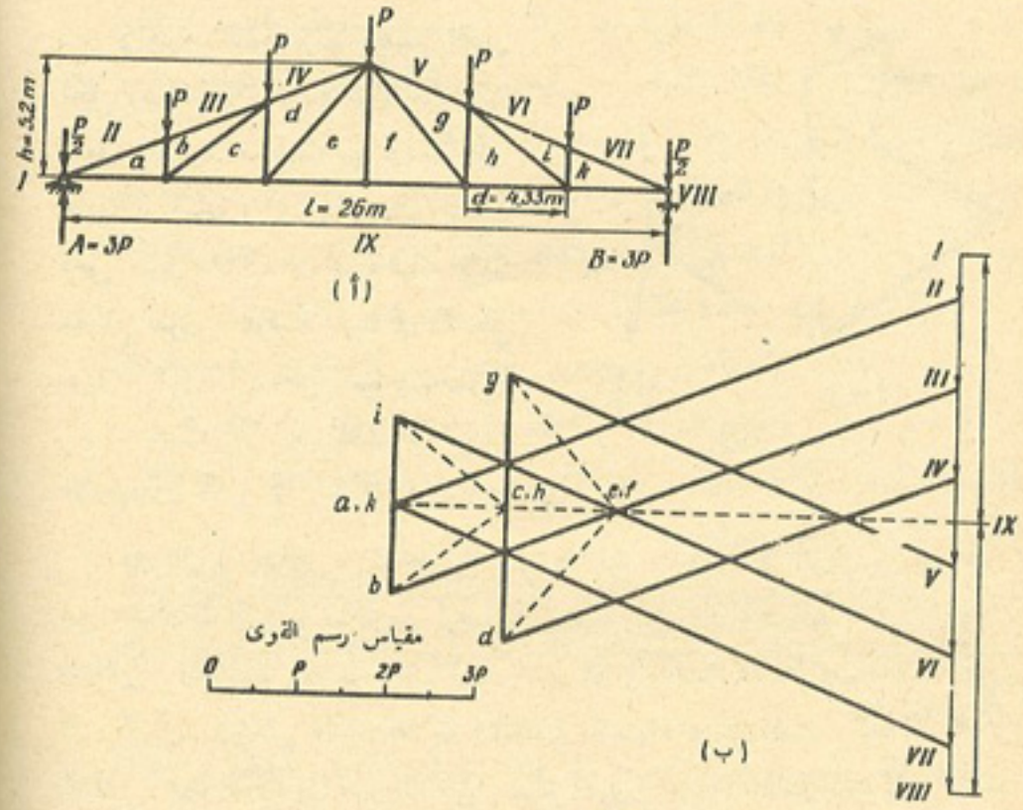


الشكل ٤ – ٤٦

ويجب البدء برسم مضلع القوى لكل وصلة من الوصلات ، من القوة الأولى المعلومة ، بحيث يبقى فى الأخير مجهولان اثنان ، أى إجهادان اثنان . وعلى سبيل المثال ، يجب البدء برسم مضلع القوى ، للوصلة المبينة فى الشكل (٤ – ٤٦ ، أ) ، من القوة (الحمل) P_1 ، بحيث يأتى بعد ذلك مباشرة . الاجهادان X و Y (شكل ٤ – ٤٦ ، ب) .

وفى الرسم البيانى ، تدخل كل قوة داخلية (إجهاد فى تركيب مضلعين من مضلعات القوى (مناظرين لوصلتين متجاورتين من الجمالون) فى اتجاهين مختلفين . ولذلك لا ينصح بوضع أسهم تشير إلى إتجاهات هذه الاجهادات ، على الرسم البيانى . ويمكن تحديد علامة (إتجاه) الاجهاد فى أى قضيب كان ، من الرسم البيانى ، دون اللجوء إلى الدوران حول مضلع القوى بأجمعه ، الذى يعود إلى الوصلة المعينة . وبالفعل ، يرمز إلى كل اجهاد فى الرسم البيانى ، بعلامتين تأتى إحداهما بعد الأخرى على التوالى ، حسب دورانهما حول الوصلة المعينة ، فى اتجاه عقرب الساعة . إن ترتيب وضع العلامات يختلف تبعاً للوصلة التى يعود إليها إجهاد القضيب المعين ، مثلا إذا كان الإجهاد فى القضيب 3 – 2 (لاحظ الشكل ٤–٤٤) يعود إلى الوصلة السفلى 3 ، يجب أن يرمز إليه بالرمز $b - a$ ، أما إذا كان يعود إلى الوصلة العليا 2 ، يجب أن يرمز إليه بالرمز $a - b$. إن النقطة a فى مضلع القوى (لاحظ الشكل ٤ – ٤٥) تقع إلى أسفل النقطة b ، ولذلك إذا بحثنا الوصلة السفلى ، يظهر لنا الاجهاد $b - a$ وكأنه « يندفع » فى مضلع القوى (لهذه الوصلة) من النقطة a إلى النقطة b (إلى الأعلى) ، أى سيكون الإجهاد مبتعداً عن الوصلة ، إذن يكون القضيب فى حالة شد .

مثال : يطلب تخطيط رسم ماكسويل – كريمون البيانى ، للجمالون السقى (شكل ٤ – ٤٧ ، أ) ، واستخدامه لتحديد الإجهادات فى كافة القضبان



الشكل ٤ – ٤٧

الحل : عند تخطيط الرسم البيانى ، نستخدم طريقة العلامات (الرموز) المذكورة اعلاه بالنسبة للمساحات (المجالات) ، وخاصة للمثلثات التى تشكلها قضبان الجمالون . ونرمز اليها بالحروف a ، b ، c . . . إلخ ، ونرمز إلى المساحات التى تشكلها القوى الخارجية (القوى المعلومة P وردود فعل المساند) بالارقام I II . . . IX ، وندور حول محيط الجمالون باكمله ، فى اتجاه عقرب الساعة . ثم نرسم مضلع القوى للقوى الخارجية $I—II$ . . . $IX—I$ ، ابتداء من رد فعل المسند الايسر ، وندور حول محيط الجمالون فى اتجاه عقرب الساعة . ونضع فى الاخير رد الفعل A ، أى القوة $I — IX$ ويكون مضلع القوى الناتج مقفلا ، وذلك لوجود القوى الخارجية (بما فيها ردود فعل المساند) فى حالة توازن*

* فى مضلع القوى ، ظهرت القوة $IX — VIII$ (رد الفعل B) والقوة $I — IX$ ، إلى يمين القوى الاخرى قليلا ، وذلك لكى لا تندمجان مع هذه القوى الاخرى المذكورة .

نبدأ بتخطيط الرسم البيانى ابتداء من وصلة المسند اليسرى ، نرسم مضلع القوى المقفل الخاص بالقوى المؤثرة فى هذه الوصلة . أن القوتين $I — IX$ و $I — II$ موضوعتان من قبل ، ومحصلتهما متجهة إلى الأعلى ، ومساوية للقوة $II — IX$. نضع هذه القوة على اتجاه القضيب $a — II$ للوتر العلوى ، واتجاه القضيب $a — IX$ للوتر السفلى ، وللقيام بذلك نرسم من النقطة II ، مستقيما موازيا للقضيب $a — II$ ، ومن النقطة IX ، مستقيما موازيا للقضيب $IX — a$. وبذلك نحصل على النقطة a للرسم البيانى . ولتحديد علامات الاجهادات فى القضبان ، نستخدم القاعدة التى تنص على أن كافة القوى الموجودة على محيط مضلع القوى ، تتجه فى نفس الاتجاه . والقوة $IX—I$ متجهة إلى الأعلى ، والقوة $I—II$ متجهة إلى الأسفل ، ولذلك يجب أن تكون القوة (الإجهاد) $a — II$ متجهة من اليمين إلى اليسار ، والقوة $a—IX$ من اليسار إلى اليمين . وبعبارة أخرى ، يكون الإجهاد فى القضيب $a — II$ متجهاً نحو الوصلة ، أى أن القضيب $a — II$ موجود فى حالة انضغاط ، والإجهاد فى القضيب $IX — a$ متجه إلى خارج الوصلة ، أى انه موجود فى حالة شد .

ثم نحدد مواضع النقاط b ، c ، d ، e . . . الخ . نعين النقطة b ، بأن نرسم على الرسم البيانى من النقطة a ، مستقيما موازياً للقضيب $a — b$ ، ومن النقطة III ، مستقيماً موازيا للقضيب $III — b$. ونعين النقطة c ، بأن نرسم من النقطة b ، مستقيماً موازياً للضلع القطرى المائل $b — c$ ، ومن النقطة IX ، مستقيما موازياً للوتر السفلى $IX — c$. ونحصل على النقطة d ، من تقاطع المستقيم المرسوم من النقطة c بصورة موازية للضلع القائم $c — d$ ، مع المستقيم المرسوم من النقطة IV ، بصورة موازية لقضيب الوتر العلوى $IV — d$. ونعين أو نوجد النقاط الاخرى e ، f ، g ، h ، i ، k بنفس الطريقة المتبعة اعلاه . وتنطبق النقطتان e ، f على بعضهما البعض ، إذن يصبح الإجهاد فى الضلع القائم $e — f$ ، مساويا للصفر ، وفى الإمكان عدم البحث عن النقاط g ، h ، i ، k وذلك لأنه عند تماثل الأحمال وتماثل تصميم الجمالون ، تكون الإجهادات فى قضبان النصف الايمن من الجمالون ، مساوياً تماماً للاجهادات الموجودة فى القضبان المناظرة لها فى النصف الايسر للجمالون .

وفى الرسم البيانى للاجهادات ، نرى بأن الاجهادات الموجودة فى القضبان المشدودة ، مرسومة بخط منقط ، أما الإجهادات الموجودة فى القضبان المضغوطة ، فقد رسمت بخط عادى . ونرى من الرسوم البيانية ، بأن الوتر السفلى للجمالون واضلاعه القطرية المائلة ، تكون مشدودة ، أما الأضلاع القائمة والوتر العلوى ، فتكون مضغوطة .

وبقياس الإجهادات فى الرسم البيانى المخطط (مع أخذ مقياس رسم القوى فى الاعتبار) نحصل على قيم هذه الإجهادات ، المدرجة فى الجدول (٤ – ٣) .

جدول ٤ – ٣

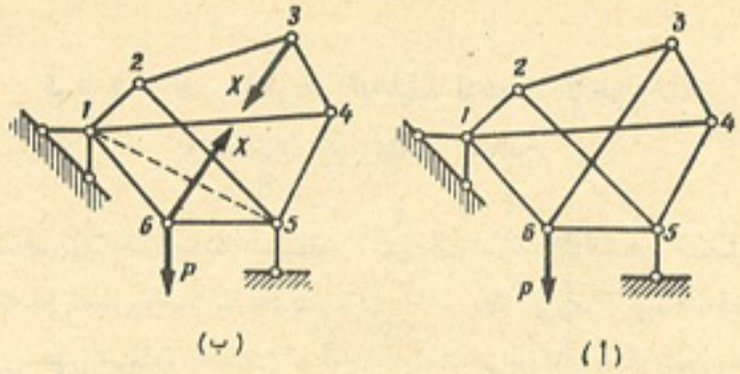
الأضلاع القطرية		الأضلاع القائمة		الوتر السفلى		الوتر العلوى	
القضيب	الإجهاد	القضيب	الإجهاد	القضيب	الإجهاد	القضيب	الإجهاد
$b - c$	$1.60\ P$	$a - b$	$-1.00\ P$	$a - IX$	$6.30\ P$	$a - II$	$-6.85\ P$
$d - e$	$1.95\ P$	$c - d$	$-1.50\ P$	$c - IX$	$5.05\ P$	$b - III$	$-6.85\ P$
$f - g$	$1.95\ P$	$e - f$	0	$e - IX$	$3.80\ P$	$d - IV$	$-5.40\ P$
$h - i$	$1.60\ P$	$g - h$	$-1.50\ P$	$f - IX$	$3.80\ P$	$g - V$	$-5.40\ P$
		$i - k$	$-1.00\ P$	$h - IX$	$5.05\ P$	$i - VI$	$-6.85\ P$
				$k - IX$	$6.30\ P$	$k - VII$	$-6.85\ P$

البند ٤ – ٤ : الطريقة التحليلية لتحديد الإجهادات فى قضبان الجمالونات المعقدة

بالإضافة إلى الجمالونات البسيطة ، أى الجمالونات المؤلفة من مثلث مفصلى تضاف إليه على التوالى وصلات جديدة (على أن تربط كل وصلة بواسطة قضيبين ، غير واقعين على استقامة واحدة) ، توجد أيضا جمالونات ذات شكل هندسى أكثر تعقيداً . وتسمى هذه الجمالونات بالجمالونات المعقدة ، ويمكن الحصول عليها فى عدد من الحالات ، من الجمالونات البسيطة ، بتبديل بعض القضبان بقضبان أخرى ، مع المحافظة على الاستقرار الهندسى للجمالون بأكمله .

إن حساب الجمالونات المعقدة ، غالبا ما يتطلب حلا آنيا للمعادلات . ولكن بتبديل (إعادة ترتيب) القضبان ، تتحول الجمالونات المعقدة ، فى حالات كثيرة ، إلى جمالونات بسيطة ، أو إلى جمالونات يمكن حسابها بطريقة أبسط ، لا تتطلب حلا آنيا للمعادلات . وتتلخص عملية تبديل القضبان ، فى إبعاد بعض القضبان – القضبان المستبدلة ، وادخال قضبان أخرى إلى الجمالون – القضبان البديلة . ولما كان الجمالون المعقد الذى نبحثه ، خاليا من القضبان البديلة ، إذن تتمثل الشروط الإضافية لتحديد الإجهادات فى قضبانه ، فى المعادلات التى تعبر عن مساواة الإجهادات فى كل قضيب من من القضبان البديلة ، للصفر .

إن طريقة حساب الجمالون المعقد ، المبنية على تحويله بطريقة إعادة ترتيب القضبان ، إلى جمالون ابسط من السابق ، تسمى بطريقة تبديل القضبان . وسنوضح جوهر هذه الطريقة فى المثال التالى : لنفرض بأنه يطلب تحديد الإجهادات فى الجمالون المبين فى الشكل (٤ – ٤٨ ، أ) الواقع تحت تأثير أية قوة خارجية ، كالحمل P مثلا ، المؤثر فى الوصلة 6. وبتحليل الشكل الهندسى للجمالون ، نجد بأنه لايدخل ضمن الجمالونات البسيطة . إن عدد القضبان الملتقية فى كل وصلة من وصلاته ، يساوى ثلاثة ، لذا فإن تحديد الإجهادات بطريقة المساقط تتطلب



الشكل ٤ – ٤٨

حلا آنيا للمعادلات . واستخدام طريقة نقطة العزم ، لا يسمح هنا أيضا ، بتوزيع المجاهيل على المعادلات . ولهذا السبب ، نحول الجمالون المذكور إلى جمالون أبسط ، بتبديل أحد قضبانه ، بقضيب آخر ، يوضع فى مكان جديد . ومن السبل الممكنة لاجزاء هذا التحويل (بتبديل القضيب 3 — 6 بالقضيب 5 — 1) مبين فى الشكل (٤ – ٤٨ ، ب) . أن الإستقرار الهندسى للجمالون ، الذى حصلنا عليه بهذا الشكل ، واضح تماماً ، وذلك لأنه مؤلف من المثلث المفصلى 6 — 5 — 1 ، الذى اضيفت إليه كل من الوصلات 2 ، 4 ، 3 على التوالى ، وقد ربطت كل وصلة بواسطة قضيبين ، غير واقعين على استقامة واحدة .

وسوف نصطلح على تسمية الجمالون الذى حصلنا عليه بهذه الطريقة ، بالجمالون المحول (transformed) أو المستبدل . ويمكن إيجاد الإجهاد فى أى قضيب من قضبانه ، بطريقة سهلة للغاية (مثلا بطريقة قطع الوصلات) بدون حل آنى لمجموعة المعادلات .

نرمز بالرمز X إلى الإجهاد الناشىء فى القضيب المستبدل 3–6 ، نتيجة لتأثير الحمل P ، فى الجمالون المعقد المذكور . والآن نسلط القوة X فى الوصلتين 3 و 6 من الجمالون المحول (شكل ٤ – ٤٨ ، ب) فى اتجاه القضيب المستبدل فى هذه الحالة ، معرضا للشد) .

إن الفرق الموجود (الاختلاف) فى إجهادات قضبان الجمالون المحول والجمالون المعطى فى البداية ، يزول تماماً إذا كان اختيار الإجهادات X ، سيتم بطريقة

تجعل الإجهاد فى القضيب البديل 5 — 1 من الجمالون المحول . الناجم نتيجة للتأثير الموحد لكل من الحمل P والقوة X ، مساويا للصفر . وفى هذه الحالة ، ستكون الاجهادات فى كافة قضبان الجمالون المحول ، كما هى عليه فى الجمالون المعطى سابقا . وبالفعل ، يحتوى الجمالون المحول على نفس الوصلات الموجودة فى الجمالون السابق ، وعلى نفس الحمل الخارجى كذلك . وعوضا عن القضيب المستبدل ، ستؤثر فى الجمالون المحول ، على امتداد محور القضيب المذكور ، القوتان المتعاكستان X ، المؤثراتان فى الوصلتين 3 و 6 . وهاتان القوتان تمثلان الإجهاد الناشىء فى القضيب 6–3 من الجمالون السابق . وإذا كان الإجهاد فى القضيب البديل 5 — 1 ، بالإضافة إلى ذلك ، مساويا للصفر ، فسوف نجد بأن الجمالون المحول ، سوف لا يختلف فى الحقيقة أى اختلاف عن الجمالون السابق .

ويمكن بناء على مبدأ تراكب القوى ، تحديد الإجهاد فى أى قضيب i من قضبان الجمالون المحول (وبالتالى ، فى قضبان الجمالون السابق) ، وذلك باستخدام الصيغة التالية :

$$N_i = N_{ip} + \overline{N}_{ix} \times X \qquad (4-2)$$

حيث N_{ip} — الإجهاد الناشىء فى الجمالون المحول ، نتيجة لتأثير الحمل المعين P ،

$\overline{N}_{ix}$ — الاجهاد الناشىء فى الجمالون المحول ، نتيجة لتأثير وحدة القوة $X = 1$.

ويمكن باستخدام هذه الصيغة أيضا ، تحديد الإجهاد فى القضيب البديل ، الذى يجب أن يساوى صفرا ، وذلك لعدم وجود قضيب بديل فى الجمالون السابق . نرمز إلى هذا الإجهاد بالرمز N_e فنحصل على :

$$N_e = N_{ep} + \overline{N}_{ex} \times X = 0$$

ومنه على أن :

$$X = -\frac{N_{ep}}{N_{ex}} \qquad (4-3)$$

وبموجب قيمة X المستخرجة ، يمكن باستخدام الصيغة (2 — 4) تحديد الإجهادات فى كافة قضبان الجمالون المذكور .

وفى الحالات الأكثر تعقيداً ، يجب تبديل قضيبين ، وأحيانا أكثر من قضيبين ، من قضبان الجمالون . وفى مثل هذه الحالات ، لاتفيد طريقة تبديل القضبان ، فى التخلص من حل المعادلات الآنية .

إن الاجهادات الكلية (مجمل الإجهادات) فى القضبان البديلة ، تساوى صفرا فى هذه الحالات أيضا ، ولذلك يجب أن تتحقق المعادلات التالية :

$$
\begin{aligned}
N_1 &= N_{1p} + \overline{N}_{11} X_1 + \overline{N}_{12} X_2 + \overline{N}_{13} X_3 + \dots = 0 \\
N_2 &= N_{2p} + \overline{N}_{21} X_1 + \overline{N}_{22} X_2 + \overline{N}_{23} X_3 + \dots = 0 \qquad (4-4) \\
N_3 &= N_{3p} + \overline{N}_{31} X_1 + \overline{N}_{32} X_2 + \overline{N}_{33} X_3 + \dots = 0
\end{aligned}
$$

حيث N_1 ، N_2 ، N_3 ... — الاجهادات الكلية ، فى القضبان البديلة : الأول والثانى والثالث على التوالى ،

X_1 ، X_2 ، X_3 ... — الاجهادات المجهولة فى القضبان المستبدلة ، التى تحدد بالحل الآنى لهذه المعادلات ،

$\overline{N}_{11}$ ، $\overline{N}_{12}$ ، $\overline{N}_{13}$ ... — الاجهادات الناشئة فى القضيب البديل الأول نتيجة لتأثير وحدات القوى التالية : $X_1 = 1$ ؛ $X_2 = 1$ و $X_3 = 1$ . . . على التوالى ،

$\overline{N}_{21}$ ، $\overline{N}_{22}$ ، $\overline{N}_{23}$ ... — الاجهادات الناشئة فى القضيب البديل الثانى . . . وهلم جرا .

وبحل مجموعة المعادلات المرقمة (4 — 4) نحدد قيم X_1 ، X_2 ، X_3 وهلم جرا .

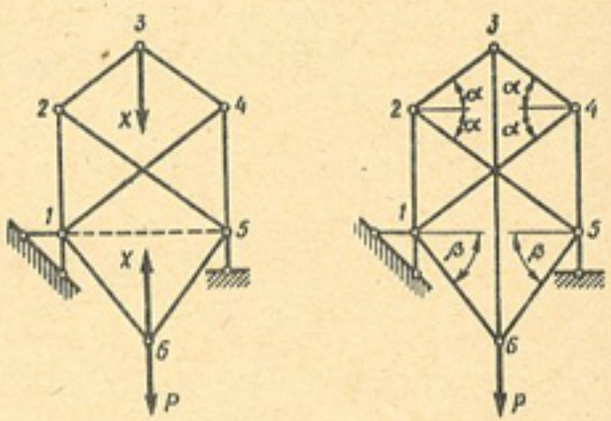
وموضع القضيب البديل فى الجمالون المعقد ، لايكون واضحا دائما ، ولكن يمكن تعيينه بالطريقة التالية : بعد إبعاد قضيب ما من قضبان الجمالون المعقد ، يجب تباعا حذف الوصلات الملحقة به ، المرتبطة (فى القسم المتبقى من الجمالون) بقضيبين لكل منهما . أن هذا الحذف للوصلات ، لا يؤثر على الاستقرار الهندسى للقسم المتبقى من الجمالون . ونواصل حذف الوصلات ، إلى

أن نعثر على القضيب الذى ليس له الارتباط الكافى ، مع القسم المتبقى من الجمالون ، وسيكون القضيب اللازم لتثبيته أو ارتباطه ، هو القضيب والبديل وإذا لم يصبح الجمالون الذى حصلنا عليه بهذا الشكل ، مع ذلك ، من الجمالونات البسيطة ، من حيث شكله الهندسى ، عندئذ يجب أن نرفع او نبعد منه للمرة الثانية قضيباً آخر ، ونحذف الوصلات المربوطة بقضيبين إلى أن نعثر مرة ثانية على القضيب الذى ليس له الارتباط الكافى مع القسم المتبقى من الجمالون . وسنحدد نتيجة لذلك ، الموضع الخاص بالقضيب البديل الثانى . ونستمر فى هذه العملية ، إلى أن نحدد موضع القضيب البديل الأخير .

مثال : يطلب استخدام طريقة تبديل القضبان ، لتحديد الإجهادات فى قضبان ، الجمالون المعقد ، المبين فى الشكل (٤ — ٤٩ ، أ) ، اذا علمنا بأن $\sin \alpha = 0.6$ و $\sin \beta = 0.8$.

الحل : نحول الجمالون المعقد المذكور إلى جمالون بسيط ، بتبديل القضيب 6 — 3 بالقضيب 5 — 1 (شكل ٤ — ٤٩ ، ب) . ويحدد الاجهاد X فى القضيب المستبدل 6 — 3 ، من شرط مساواة الاجهادات فى القضيب البديل 5 — 1 ، الصفر ، أى :

$$N_{15} = N_{15p} + \overline{N}_{15x} X = 0$$



الشكل ٤ — ٤٩

ومنها ينتج أن :

$$X = -\frac{N_{15p}}{\bar{N}_{15x}}$$

حيث N_{15p} و $\bar{N}_{15x}$ – الاجهادان الناشئان فى القضيب البديل 5 — 1 ، نتيجة لتأثير الحمل P والقوة $X = 1$ على التوالى .

وتحدد الاجهادات فى بقية قضبان الجمالون المذكور ، بواسطة الصيغة التالية :

$$N_i = N_{ip} + \bar{N}_{ix}\, X$$

حيث N_{ip} و $\bar{N}_{ix}$ — الاجهدان الناشئان فى قضيب الجمالون المحول ، نتيجة لتأثير الحمل P والقوة $X = 1$ على التوالى .

ومن السهولة تحديد الإجهادات N_{ip} و $\bar{N}_{ix}$ باستخدام طريقة قطع الوصلات وعند استخدام هذه الطريقة ، بالنسبة للوصلات 3 ، 2 ، 4 ، 6 ، 5 على التوالى ، يمكن بسهولة أن نثبت بان القوة P المؤثرة فى الجمالون البسيط (المحول) تؤدى إلى ظهور الإجهادات فى القضبان الثلاثة التالية فقط : 6 — 1 ، 6 — 5 ، 5 — 1 ، أما الإجهادات الناشئة عن تأثير هذه القوة P ، فتكون مساوية الصفر فى بقية قضبان هذا الجمالون

ان قيم الاجهادات N_{ip} و $\bar{N}_{ix}$ التى نحصل عليها ، مدرجة فى الجدول (٤ – ٤) . وقد ملأ العمودان الرابع والخامس من هذا الجدول ، بعد أن تم إيجاد الإجهاد X ، فى القضيب المستبدل 6 — 3

وقد حصلنا على القيم المدرجة فى العمود الرابع ، بضرب القيم الموجودة فى العمود الثانى فى قيمة X ، أما القيم المدرجة فى العمود الخامس من هذا الجدول ، فقد تم الحصول عليها بجمع القيم الموجودة فى العمودين الثالث والرابع

جدول ٤ – ٤

رقم القضيب	الإجهاد الناجم عن القوة $X = 1$	الإجهاد الناجم عن الحمل P	الإجهاد الناجم عن القوة X	الإجهاد الكلى فى الجمالون المعقد
١	٢	٣	٤	٥
3 — 2 او 4 — 3	$-\frac{5}{6}$	0	$+\frac{15}{14}P$	$+\frac{15}{14}P$
2 — 1 او 5 — 4	-1	0	$-\frac{9}{7}P$	$-\frac{9}{7}P$
5 — 2 او 4 — 1	$+\frac{5}{6}$	0	$-\frac{15}{14}P$	$-\frac{15}{14}P$
6 — 1 او 5 — 6	$-\frac{5}{8}$	$+\frac{5}{8}P$	$+\frac{45}{56}P$	$+\frac{10}{7}P$
1 — 5	$-\frac{7}{24}$	$-\frac{3}{8}P$	$+\frac{3}{8}P$	0

ملاحظة : الإجهاد فى القضيب المستبدل 6 — 3 يساوى :

$$X = -\frac{N_{15p}}{N_{15x}} = -\frac{3P \times 24}{8 \times 7} = -\frac{9}{7}P$$

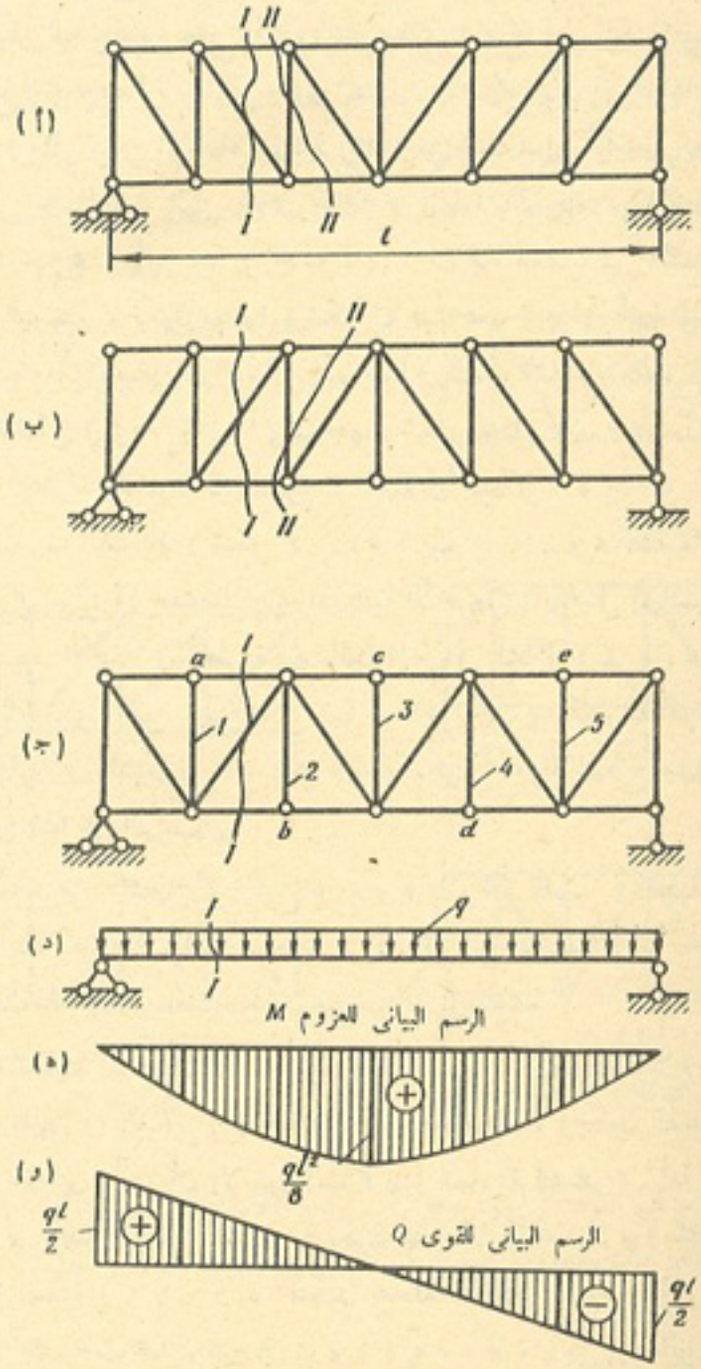
البند ٤ – ٥ : توزيع الاجهادات فى قضبان الجمالونات المختلفة الأشكال

أوردنا فى البند (٤ – ٢) نتائج حساب الجمالونات المختلفة الأشكال، المتساوية الأبواع والأرتفاعات وعدد الأجزاء الهيكلية ، تبعا لتأثير الحمل المتساوى . أن نتائج حساب الجمالونات الموضحة على الأشكال (٤ – ٣٢)، (٤ – ٣٣) ، (٤–٣٤) ، (٤– ٣٥) و(٤ –٣٧) تبين بأن الاجهادات فى أوتار بعض هذه الجمالونات، تزداد من المساند إلى الوسط (لاحظ الأشكال ٤–٣٢ ، ٤ – ٣٥ ، ٤ – ٣٧) ، وفى بعض الآخر، تتضاءل فى نفس الإتجاه (لاحظ الشكلين ٤ – ٣٣ و ٤ – ٣٤) .ومع تماثل نوع الشبيكة (أى تماثل مخطط ترتيب الأضلاع القائمة والأضلاع القطرية) نجد بأن الأضلاع القطرية فى أحد الجمالونات ، تكون مشدودة (لاحظ الشكل ٤ – ٣٢) ، وفى الآخر مضغوطة (لاحظ الشكل ٤ – ٣٣) .

وفى حالات كثيرة، يمكن تحديد طبيعة تغير الإجهادات فى أوتار الجمالونات . وعلامات الاجهادات وبعض الخصائص الأخرى لسلوك الجمالونات ، بدون إجراء الحسابات الخاصة بها .

ويبين الشكل (٤ – ٥٠ ، أ، ب، ج) ثلاثة جمالونات متوازية الأوتار، لا تختلف عن بعضها البعض إلا بترتيب الأضلاع القطرية .

والآن نأتى إلى بحث الإجهادات التى تنشأ فى قضبان هذه الجمالونات ، عند تعرضها لتأثير الأحمال الموزعة بإنتظام . وسنقارن عندئذ احد هذه الجمالونات ، مع العتبة البسيطة الوحيدة الباع (شكل ٤–٥٠ ، د) . ويبين الشكل (٤–٥٤ ، هـ، و) الرسوم البيانية لعزم الإنحناء M وقوة القص Q لمثل هذه العتبة . ويتضح من الرسم البيانى للعزم M ، بأن الألياف السفلى للعتبة تكون مشدودة ، والألياف العليا مضغوطة ، وبالتالى تكون قضبان الأوتار السفلى للجمالونات مشدودة ، وقضبان الأوتار العليا مضغوطة. ويزداد عزم الإنحناء M فى العتبة ، إبتداء من المساند إلى



الشكل ٤ – ٥٠

وسط العتبة ، أما ذراع القوى المزدوجة ، الناشئة من الإجهادات فى قضبان الوترين العلوى والسفلى للجمالون ، وهو الذراع الذى يساوى ارتفاع الجمالون ، فيبقى ثابتا على إمتداد (طول) الجمالونات التى يجرى بحثها . إذن نجد بأن الإجهادات الموجودة فى الأوتار (مثل عزوم الإنحناء) تزداد إبتداء من المساند إلى أواسط الجمالونات .

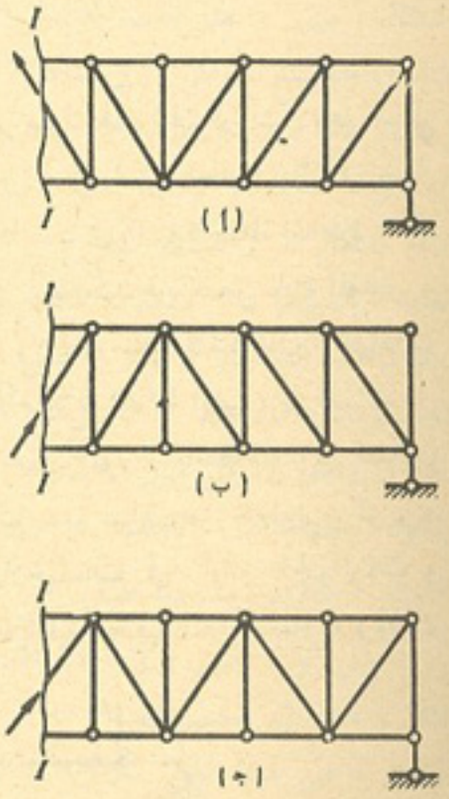
نقطع الجمالونات التى يجرى بحثها ، والعتبة البسيطة ، بالمقطع $I - I$ (شكل ٤ — ٥٠ ، أ ، ب ، ج ، د) . أن قوة القص فى المقطع $I - I$ من العتبة البسيطة ، تكون موجبة (شكل ٤ — ٥٠ ، و) أى أنها تؤثر فى القسم الأيمن للعتبة ، من الأسفل إلى الأعلى . إذن ينشأ فى الضلع القطرى المقطوع للجمالون ، المبين فى الشكل (٤ — ٥٠ ، أ) ، اجهاد شد (شكل ٤ — ٥١ ، أ) ، أما فى الأضلاع القطرية المقطوعة للجمالونات المبينة فى الشكل (٤ — ٥٠ ، ب ، ج) فتنشأ إجهادات انضغاط (شكل ٤ — ٥١ ، ب ، ج) . وبمناقشة مماثلة (عندما تمر المقاطع $I - I$ فى حدود الأجزاء الهيكلية الأخرى) ، نتوصل إلى النتيجة التالية ، وهى أن جميع الأضلاع القطرية للجمالون المبين فى الشكل (٤ — ٥٠ ، أ) تكون مشدودة وللجمالون المبين فى الشكل (٤ — ٥٠ ، ب) تكون مضغوطة . أما فى الجمالون المبين فى الشكل (٤ — ٥٠ ، ج) فيكون أحد الأضلاع مشدوداً والآخر مضغوطا وهكذا على الترتيب .

ويتضح من الشكل (٤ — ٥٠ ، و) بأن قوة القص فى العتبة البسيطة ، تتضاءل إبتداء من المساند إلى الوسط ، إذن قيم الإجهادات فى الأضلاع القطرية للجمالونات المبحوثة ، تتضاءل أيضا من المساند إلى الوسط .

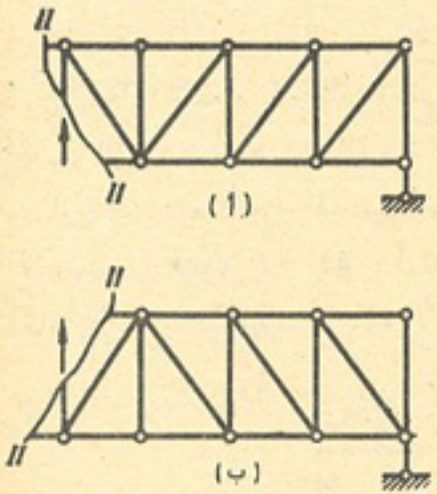
وعند تسليط الأحمال فى وصلات الوتر العلوى ، تكون الأضلاع 1 ، 3 ، 5 للجمالون المبين فى الشكل (٤ — ٥٠ ، ج) مضغوطة ، ويكون الضلعان القائمان 2 و 4 ، خاملين (أى أن الإجهادات فيهما مساوية للصفر) . أما عند تسليط الأحمال فى وصلات الوتر السفلى ، يكون الضلعان القائمان 2 و 4 مشدودين ، أما الأضلاع القائمة 1 ، 3 ، 5 ، فتكون خاملة . ويمكن التوصل إلى هذه النتائج بسهولة ، عند بحث توازن الوصلات a ، b ، c ، d ، e من الجمالون المذكور .

ولتحديد الإجهادات فى الاضلاع القائمة للجمالونات ، المبينة فى الشكل

(٤ — ٥٠ ، أ ، ب) نقطع الأقسام اليسرى للجمالونات بالمقاطع $II - II$ ، ونبحث الأقسام اليمنى المقطوعة لهذه الجمالونات (شكل ٤—٥٢ ، أ ، ب) . أن قوة القص Q فى النصف الأيسر من العتبة البسيطة ، موجبة (شكل ٤—٥٠ ، و) ، أى أنها تؤثر فى القسم الأيمن للعتبة ، من الأسفل إلى الأعلى . إذن تنشأ فى الأضلاع القائمة للجمالون الأول من الجمالونات التى نبحثها ، إجهادات إنضغاط (شكل ٤ — ٥٢ ، أ) ، وتنشأ فى الأضلاع القائمة للجمالون الثانى ، إجهادات شد (شكل ٤—٥٢ ، ب) . وتتضاءل هذه الأجهادات ، ابتداء من المساند إلى أواسط الجمالونات ، مثل قوة القص Q فى العتبة البسيطة (شكل ٤ — ٥٠ ، و) .



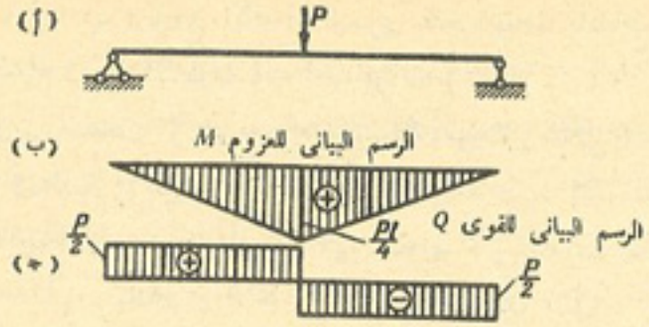
الشكل ٤ — ٥١



الشكل ٤ — ٥٢

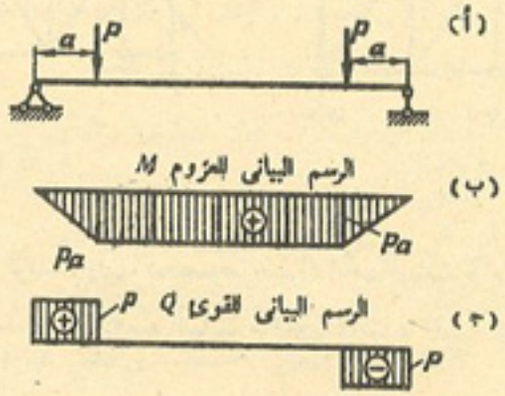
إن النتائج التى توصلنا إليها بخصوص سلوك الجمالونات ذات الأوتار المتوازية ، يمكن أن تراجع بأستخدام الرسوم البيانية للاجهادات ، المبينة فى الشكلين (٤ — ٣٢) و (٤ — ٣٥) .

وعندما تؤثر على الجمالونات المبحوثة (شكل ٤ — ٥٠ ، أ ، ب ، ج)



الشكل ٤ – ٥٣

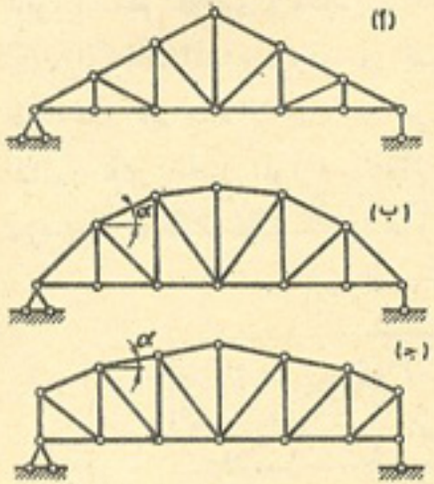
أحمال أخرى ، يمكن أن يؤدى ذلك إلى تغير سلوك هذه الجمالونات . وعلى سبيل المثال ، عندما يتعرض كل جمالون إلى تأثير حمل رأسى واحد ، مؤثر فى وسط الباع ، ستكون أشكال الرسوم البيانية للاجهادات ، فى العتبة البسيطة المناظرة ، كما هى عليه فى الشكل (٤ – ٥٣ ، ب ، جـ) . وستكون قوة القص ثابتة المقدار ، فى كافة الأقسام ، من المساند إلى وسط الباع ، وبالتالى سوف لا تتضاءل الإجهادات فى الأضلاع القطرية للجمالونات (وفى الأضلاع القائمة أيضا) من المساند إلى أواسط الأبواع (كما هى الحالة عند تأثير الحمل الموزع بانتظام) ، بل ستكون متساوية فى جميع الأجزاء الهيكلية . وعند تأثير حمل مؤلف من حملين مركزين ، كما مبين فى الشكل ٤ – ٥٤ ، أ تكون للاجهادات فى أوتار الجمالونات ، لكافة الأجزاء الهيكلية ، باستثناء الأجزاء الهيكلية الطرفية منها ، متساوية (وذلك



الشكل ٤ – ٥٤

واضح من الرسم البيانى للعزم M ، المبين فى الشكل ٤ – ٥٤ ، ب) ، وستكون الإجهادات فى الأضلاع القائمة والأضلاع القطرية ، مساوية للصفر (وذلك لأنه فى الجزء المناظر لذلك ، من العتبة البسيطة ، يكون لدينا $Q = 0$ ، لاحظ الشكل ٤ – ٥٤ جـ) .

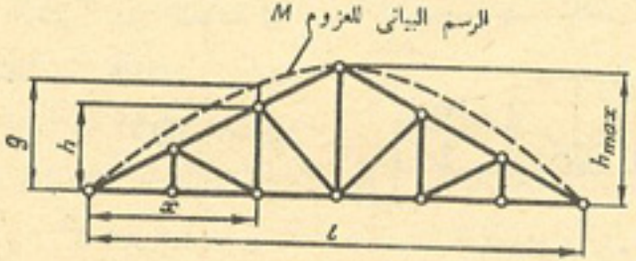
ومن الأصعب إجراء بحث وتحليل سلوك الجمالونات التى لها أشكال أخرى ، مثل القطع المكافئ المثلث ، والمضلع ، المبينين فى الشكل (٤ – ٥٥ ، أ ، ب) . إذا كان الجمالون مطابقا أو مناظراً تماماً لشكل الرسم البيانى للعزوم فى العتبة البسيطة ، عندئذ تكون إجهادات الشد فى الأوتار السفلى للجمالونات المبحوثة ، ثابتة على إمتداد (طول) كل وتر بأجمعه ، وتكون إجهادات الإنضغاط فى الأوتار العليا ، متناسبة طرديًا مع المقدار $\frac{1}{\cos \alpha}$ ، حيث α – تمثل زاوية ميل الوتر العلوى (فى الجزء الهيكلى المبحوث) مع الأفق . وهذا مايحدث مثلا ، عند تأثير الحمل الموزع بانتظام ، على الجمالون الذى يكون شكل وتره العلوى ، على هيئة قطع مكافئ مخروطى (قارن الرسم البيانى للعزم M المبين فى الشكل ٤ – ٥٠ ، هـ ، مع الشكل ٤ – ٥٥ ، ب) وكذلك عند تأثير الحمل المركز P (فى وسط الباع) على الجمالون المثلث (قارن الرسم البيانى للعزم M المبين فى الشكل ٤ – ٥٣ ، ب ، مع الشكل ٤ – ٥٥ ، أ) . فى مثل هذه الحالات ، تكون الإجهادات فى الأضلاع القطرية لهذه الجمالونات ، مساوية للصفر ، أما الإجهاد فى كل ضلع من الأضلاع القائمة ، فيساوى الحمل المؤثر على وصلة طرفه السفلى ، عندما يكون الحمل المسلط على الجمالون ، مؤثراً فى



الشكل ٤ – ٥٥

وصلات الوتر السفلى ، أو تساوى صفرا ، عندما يكون الحمل مسلطا أو مؤثراً فى وصلات الوتر العلوى . ويمكن التأكد من صحة هذه النتائج ، بواسطة نتائج حساب العقد الذى على شكل قطع مكافئ ، وهى مبينة فى الشكل (٤ — ٣٤) .

وإذا لم يكن شكل الجمالون مناظرا أو مطابقا لشكل الرسم البيانى لعزوم الإنحناء M ، عندئذ يمكن بسهولة نسبية ، تعيين علامة الإجهادات فقط ، فى الوترين السفلى والعلوى (يكون الوتر السفلى مشدوداً ، والوتر العلوى مضغوطا ، عندما تكون الألياف المشدودة واقعة فى القسم السفلى من العتبة البسيطة المناظرة) ومعرفة طبيعة تغير قيم هذه الإجهادات على طول الجمالون . والآن نبحث ، على سبيل المثال ، تأثير الحمل الموزع بانتظام على الجمالون المثلث الشكل . والرسم البيانى للعزم M ، للعتبة البسيطة المناظرة لهذا الجمالون ، مبين فى الشكل (٤ — ٥٠ ، ٨) .



الشكل ٤ — ٥٦

نضع الرسم البيانى للعزم M ، على الرسم التخطيطى للجمالون ، كما مبين فى الشكل (٤ — ٥٦) . ونختار مقاييس الرسم لعزوم الإنحناء وارتفاعات الجمالون ، بحيث تنطبق الأحداثيات الرأسية القصوى لكل من الرسم البيانى والرسم التخطيطى على بعضها البعض . أن الأحداثى الرأسى لعزم الإنحناء M ، على مسافة x من المسند الأيسر ، يساوى ما يلى :

$$y = h_{max} - \left(\frac{0.5l - x}{0.5\,l}\right)^2 h_{max} = h_{max} \times 4x\,\frac{l - x}{l^2}$$

وارتفاع الجمالون يساوى ما يلى :

$$h = \frac{h_{max}}{0.5\,l} \times x = h_{max}\,\frac{2x}{l}$$

أما النسبة $\frac{y}{x}$ فتساوى ما يلى :

$$\frac{y}{h} = 2 \times \frac{l - x}{l} = 2\left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

وهى تتضاءل من المسند الأيسر إلى وسط الجمالون ، وبالتالى يجب أن تتضاءل كذلك الإجهادات الناشئة فى قضبان الوترين السفلى والعلوى ، من المساند إلى الوسط أيضاً . وتتأكد صحة هذه النتيجة ، من الرسم البيانى للاجهادات ، الناشئة فى الجمالون المثلث ، نتيجة لتأثير الحمل الموزع بإنتظام ، المبين فى الشكل (٤ — ٣٣) .

البند ٤ — ٦ : الطرق التحليلية لبحث الاستقرار الهندسى للجمالونات

١ — الجمالونات البسيطة

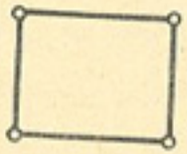
لقد أشرنا فى البند (١—٢) عند بحث الشكل الهندسى للأنظمة (الجمالونات) الأطارية ، إلى أن الأنظمة التى تحتوى فى كافة أقسامها على أقل عدد ضرورى من القضبان ، لتأمين الإستقرار الهندسى ، يمكن أن تكون لحظية التغير . وبهذا نرى بأن وجود العدد الضرورى من القضبان ، لا يعنى بعد تأمين الاستقرار الهندسى للجمالون .

وفى بعض الحالات ، يمكن التعرف بسهولة كافية على حالة التغير اللحظى للجمالونات (الأنظمة) . ويمكن أن نثبت بأنه فى قضبان الجمالونات اللحظية التغير ، عند تأثير بعض الأحمال ، يحتمل نشوء إجهادات كبيرة إلى مالانهاية ، أو إجهادات غير محددة القيمة .

ويمكن فى نفس الوقت ، أن نثبت عكس ذلك . إذا أثر على الجمالون أى حمل معين ، وكانت للاجهاد الناشى فى كل قضيب من قضبانه ، قيمة حدية معينة تماما ، وعند عدم وجود الحمل (أى عند تأثير ما يسمى بحمل الصفر — zero load) تصبح قيم الإجهادات فى كافة قضبانه مساوية للصفر ، وكان هذا الحل (الصفرى) هو الحل الممكن الوحيد ، عندئذ يكون الجمالون فى هذه الحالة ، مستقراً هندسياً . إن طريقة بحث أو تحليل الجمالون (النظام) اللحظى التغير ،

المبنية على الإستنتاج الأخير ، تسمى بطريقة حمل الصفر .

وعند إستخدام طريقة حمل الصفر لبحث التغير اللحظى ، يجب التأكد سلفاً من أن الجمالون يحتوى فى كافة أقسامه ، على العدد الكافى من القضبان ، اللازمة لتأمين إستقراره الهندسى . وبعكس ذلك ، قد يؤدى إستخدام هذه الطريقة ، إلى نتائج خاطئة . وبالفعل ، إذا استخدمنا طريقة حمل الصفر ، بالنسبة للمستطيل المفصلى المبين فى الشكل (٤ — ٥٧) وبحثنا شروط توازن كافة وصلاته على التوالى ، لرأينا بأن الإجهادات فى جميع قضبانه ، تساوى صفراً ، ومع ذلك يبقى الجمالون غير مستقر هندسياً .

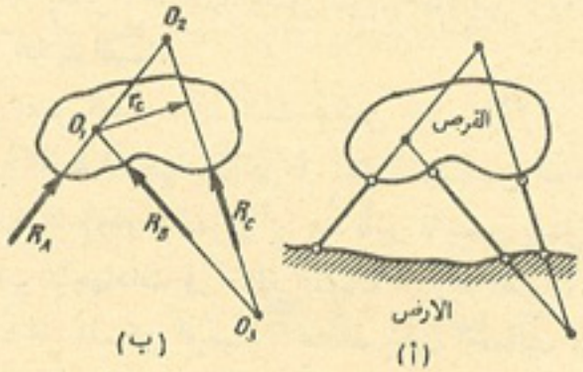


الشكل ٤ — ٥٧

والآن نثبت صحة الأوضاع العامة المذكورة أعلاه ، ببحث بعض الأمثلة المعينة الخاصة .

نبحث أولا القرص المربوط فى الأرض بواسطة ثلاثة قضبان لا تتقاطع محاورها فى نقطة واحدة (شكل ٤ — ٥٨ ، أ) . أن إرتباط القرص مع الأرض بهذا الشكل ، يكون كما هو معروف ، إرتباطا مستقراً هندسياً .

والآن نثبت بأنه عند عرض القرص لتأثير حمل الصفر ، تكون قيم الإجهادات فى جميع القضبان مساوية للصفر . نحذف أو نبعد القضبان ، ونستعيض عنها بتأثير ردود الفعل R_A ، R_B ، R_C على القرص (شكل ٤ — ٥٨ ، ب) . نضع معادلة عزوم كافة القوى ، حول النقطة O_1 ، وهى نقطة تقاطع ردى الفعل R_A و R_B :



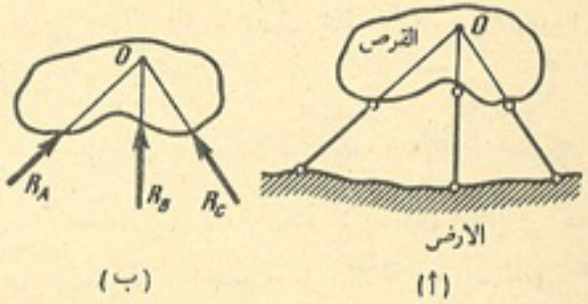
الشكل ٤ — ٥٨

$$R_C\, r_C = 0$$

وبما أن $r_C \neq 0$ (لا يساوى صفراً) ، إذن $R_C = 0$

وبنفس الطريقة السابقة ، نستطيع بواسطة معادلات العزوم حول النقطتين O_2 و O_3 (شكل ٤ — ٥٨ ، ب) إن نثبت بأن لردى الفعل R_A و R_B قيمتان صفريتان أيضا . وهكذا نجد بالفعل ، بأنه عند تعرض الجمالون المستقر هندسياً ، لتأثير حمل الصفر ، تكون الإجهادات الناشئة فيه ، مساوية للصفر .

والآن نبحث نظاماً آخر ، هو عبارة عن قرص محمول على ثلاثة قضبان ساندة ، تلتقى محاورها فى نقطة واحدة مشتركة ، هى النقطة O (شكل ٤ — ٥٩ ، أ) . أن ارتباط القرص مع الأرض بهذا الشكل ، هو أرتباط لحظى التغير ، كما هو معروف .



الشكل ٤ — ٥٩

نحذف القضبان الساندة ، ونستعيض عنها بردود الفعل R_A ، R_B و R_C (شكل ٤ — ٥٩ ، ب) . وبوضع معادلة العزوم التالية ، حول النقطة O :

$$\Sigma M_O = R_A\, r_A + R_B\, r_B + R_C\, r_C = 0$$

نحصل على قيم غير محددة لردود الفعل ، وذلك لأن $r_A = r_B = r_C = 0$. إن معادلتى التوازن الباقيتين (مثل معادلتى مساقط القوى على المحورين x و y) تعطيان أيضا قيم غير محددة لردود الفعل ، وذلك لدخول ثلاثة ردود فعل مجهولة فى هاتين المعادلتين .

وهكذا نجد بأن الإجهادات الناشئة فى النظام (الجمالون) اللحظى التغير ،

عند تعرضه لتأثير حمل الصفر ، قد تكون ذات قيم غير محددة .

ويمكن التوصل إلى نفس النتيجة ، بتحليل احدى القيم الإختيارية لأحد ردود الفعل ، إلى مركبتين فى إتجاهى قضيبين آخرين من القضبان الساندة . وبنتيجة هذا التحليل سنحصل على قيمتى ردى الفعل الأخرين ، المعادلتين لرد الفعل الأول ، والمعتمدين على قيمته . وبالتالى ، قد يكون لردود الفعل عدد لا يحصى من القيم ، وهذه دلالة إستاتيكية على التغير اللحظى للنظام (الجمالون) الذى يجرى بحثه .

ويمكن كذلك إثبات التغير اللحظى لهذا النظام ، بالطريقة التالية : نحذف القضبان ونعوض عنها بردود الفعل ، ونضع معادلة عزوم كافة القوى حول النقطة O (شكل ٤ — ٥٩ ، ب) . وعند تعرض القرص لتأثير الحمل الخارجى P ، الذى ذراع تأثيره حول النقطة O ، يساوى r ، يكون شكل هذه المعادلة كما يلى :

$$\Sigma M_0 = R_A 0 + R_B 0 + R_C 0 + Pr \neq 0$$

ومن الواضح أن حاصل ضرب Pr هنا لا يساوى صفراً ، أى أن $\Sigma M_0 \neq 0$ ، إذن يكون القرص المبحوث ، المحمول على ثلاثة قضبان تلتقى محاورها فى نقطة واحدة (لاحظ الشكل ٤ — ٥٩ ، أ) ، غير موجود فى حالة توازن ، ويجب أن يدور حول النقطة O ، بزاوية متناهية فى الصغر : إذن يكون النظام الذى نبحثه ، لحظى التغير .

بعد دوران النظام (القرص) بزاوية متناهية فى الصغر ، سوف لا تتقاطع محاور القضبان الساندة فى نقطة مشتركة واحدة ، ويمكن أن تكون ردود فعلها معادلة للحمل الخارجى . وفى هذه الحالة ، يجب أن تحقق الإجهادات الموجودة فى القضبان ، الشرط التالى :

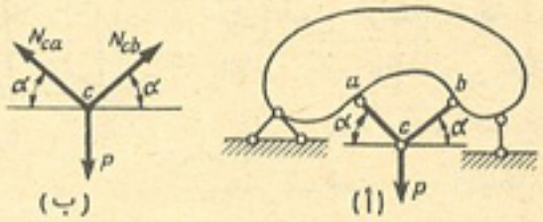
$$\Sigma M_0 = R_A r_A + R_B r_B + R_C r_C + Pr = 0$$

ومن هذا الشرط ، وكذلك من المعادلة التى تكون فيها مساقط كافة القوى على المحورين x و y ، مساوية للصفر ، ينتج بان الإجهادات فى كل قضيب

من القضبان ، تساوى قيمة لانهائية ، وذلك لأن أذرع القوى r_A ، r_B ، r_C متناهية فى الصغر .

وبهذا الشكل ، عند تأثير الحمل الخارجى على النظام اللحظى التغير ، يمكن أن تنشأ فيه إجهادات متناهية فى الكبر . ولهذا السبب لا يمكن استخدام مثل هذه الأنظمة ، بأى حال من الأحوال .

ونبحث كمثال اخر ، النظام المستقر هندسيا ، المبين فى الشكل (٤ — ٦٠ ، أ) . وهذا النظام يتألف من قرص مربوط فى الأرض بثلاثة قضبان ساندة ، وقد أضيف إليه الوصلة c بواسطة القضيبين ac و bc ، غير الواقعين على إستقامة واحدة .



الشكل ٤ — ٦٠

نسلط فى الوصلة c الحمل P ، ونحدد الإجهادات الناشئة فى القضيبين ac و bc .

وللقيام بذلك ، نقطع الوصلة c (شكل ٤ — ٦٠ ، ب) ونبحث شروط توازنها :

$$\Sigma X = -N_{ca} \cos \alpha + N_{cb} \cos \alpha = 0$$
$$\Sigma Y = N_{ca} \sin \alpha + N_{cb} \sin \alpha - P = 0$$

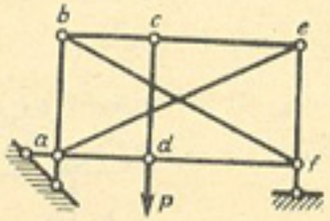
وبعد حل هاتين المعادلتين ، نحصل على ما يلى :

$$N_{ca} = N_{cb} = \frac{P}{2 \sin \alpha}$$

وينتج من الصيغة التى حصلنا عليها ، بأنه اذا جعلنا زاويتى ميل القضيبين ac و bc ، وهما الزاويتان α ، مساويتين للصفر ، لرأينا بأن الإجهادين N_{ca} و N_{cb} سيزدادان إلى اللانهاية . وهذه علامة من علامات التغير اللحظى

للنظام . وبالفعل ، ستتصل عندئذ الوصلة c بالوصلتين a و b ، بواسطة القضيبين ac و bc ، الواقعين على إستقامة واحدة ، وهذا النظام كما هو معروف ، نظام لحظى التغير .

لنبحث الآن علامة أخرى من علامات التغير اللحظى ، بدراسة النظام المبين فى الشكل (٤ — ٦١) . وبعدان نضع على الترتيب ، بشروط التوازن للوصلتين c و d من هذا النظام ، الذى يحتوى على عدد من القضبان يكفى لتحقيق الشرط أو المعادلة $S = 2K - 3$ ، نحصل على نتائج متناقضة . فينتج من معادلات توازن الوصلة c بأن الإجهاد فى القضيب cd يساوى صفراً ، وفى نفس الوقت ، نجد بأن الإجهاد فى القضيب cd بالذات ، المحدد من معادلات توازن الوصلة d ، سيساوى $(+P)$: أن هذا التناقض فى النتيجتين الحاصلتين لمثل هذا النظام ، يعتبر دليلا على تغيره اللحظى .



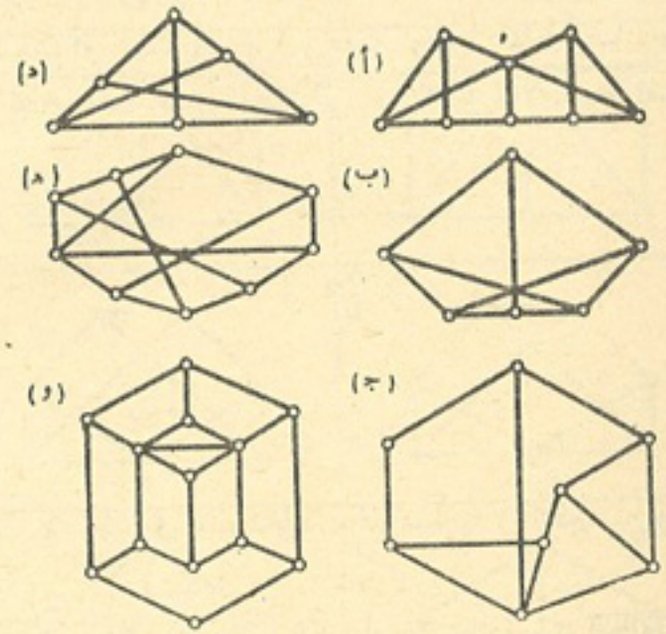
الشكل ٤ — ٦١

وهكذا نجد بأن العلامات (الدلائل) الإستاتيكية للتغير اللحظى للنظام الذى يحتوى على العدد الكافى من القضبان ، لتأمين الإستقرار الهندسى ، تتلخص فيما يلى :

١ — نشوء إجهادات متناهية فى الكبر فى بعض قضبان ذلك النظام ؛

٢ — عدم محدودية الإجهادات الناشئة فى قضبان النظام ، وعلى الأخص ظهور نتائج متناقضة لقيمة الاجهاد فى القضيب الواحد بالذات ، المحددة من معادلات توازن مختلف أقسام أو وصلات النظام المذكور .

ويبين الشكل (٤ — ٦٢) بعض الأنظمة ، التى نقترح على القارئ أن يبين مسألة تغيرها اللحظى وذلك بإستخدام طريقة حمل الصفر . ويجب أن يتذكر القارئ فى هذه الحالة ، بأنه لا يجوز إستخدام هذه الطريقة ، إذا لم يحتو النظام فى كافة أقسامه ، على العدد الكافى من القضبان لتأمين استقراره الهندسى ، وخاصة إذا كان الشرط الخاص به هو $S < 2K - 3$.



الشكل ٤ — ٦٢

٢ — الجمالونات المعقدة

سنبحث أولا الحالة التى نحتاج فيها إلى تبديل قضيب واحد فقط ، لتحويل النظام (الجمالون) المعقد المعين ، إلى نظام (جمالون) بسيط .

إن النظام أو الجمالون المحول (البديل) يعتبر نظاماً بسيطاً ، فهو أذن مستقر هندسياً . ولذلك تكون للاجهاد N_{cp} (الإجهاد الناشىء فى القضيب البديل ، الناجم عن تعرضه للحمل الخارجى P) ، قيمة حدية معينة : ولهذا السبب ، عندما لا يكون الأجهاد $\bar{N}_{cx}$ (الناشىء فى القضيب البديل ، نتيجة لتأثير القوة $X = 1$) مساوياً للصفر ، نجد بأن الإجهاد الناشىء فى القضيب المستبدل . كما يتبين من الصيغة (3 — 4) وهى :

$$X = -\frac{N_{cp}}{\bar{N}_{cx}}$$

يمكن أن يكون معيناً ونهائياً (خديا) فقط . إذن تكون الإجهادات فى كافة قضبان الجمالون أو النظام السابق ، معينة وحدية تماماً أيضاً . وهذا كما هو معروف ، يعتبر بمثابة دليل إستاتيكى من دلائل الاستقرار الهندسى للنظام (الجمالون) .

أما إذا كانت $\bar{N}_{ex} = 0$ ، عندئذ نجد بأن :

$$X = -\frac{N_{ep}}{\bar{N}_{ex}} = \pm \infty$$

أو

$$X = \frac{0}{0}$$

أى أن قيمة X تكون فى هذه الحالة ، أما متناهية فى الكبر ، أو غير محددة (غير معينة) .

أن نشوء إجهادات متناهية فى الكبر أو غير محددة ، فى النظام (الجمالون) ، يعتبر كما هو معروف ، دليلا من دلائل التغير اللحظى للنظام .

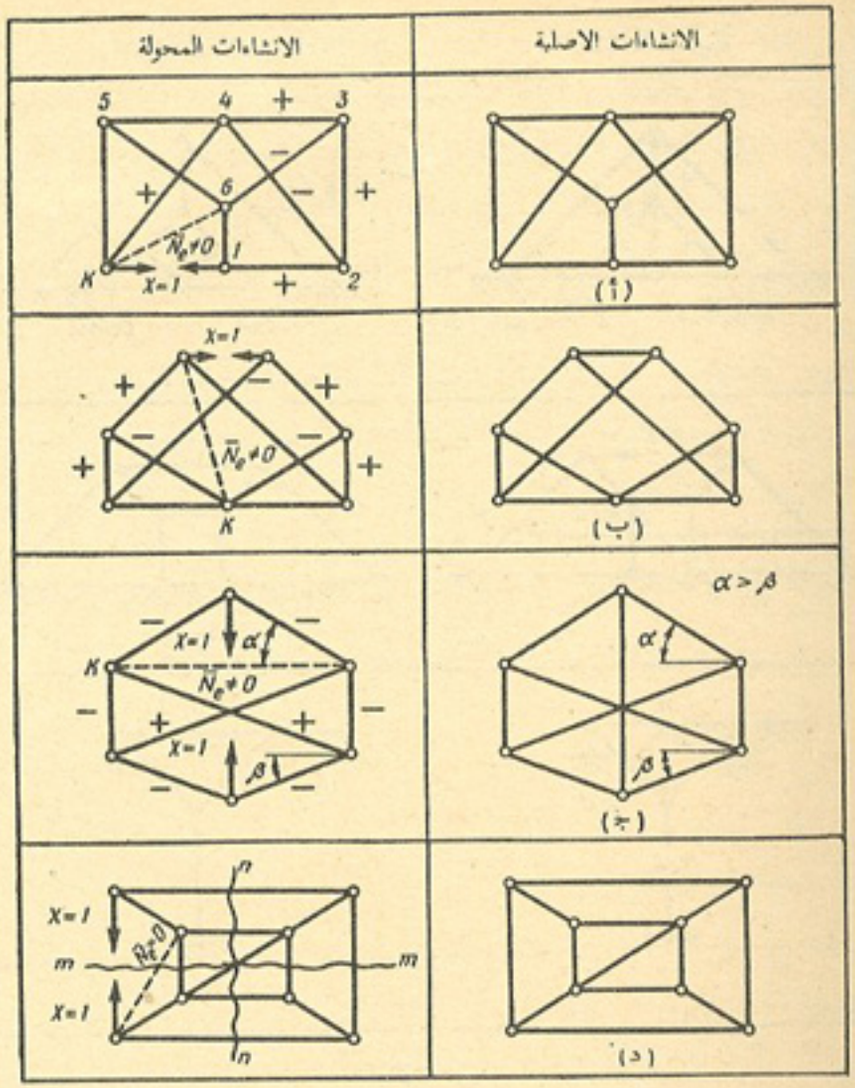
وهكذا يمكن بإستخدام الصيغة التالية :

$$X = -\frac{N_{ep}}{\bar{N}_{ex}}$$

بحث أو تحليل استقرار النظام : عندما تكون $\bar{N}_{ex} \neq 0$ (أى لا تساوى ، صفراً) ، يكون النظام مستقراً هندسياً ، وعندما تكون $\bar{N}_{ex} = 0$ ، يكون النظام لحظى التغير .

وهكذا إذا كان الإجهاد فى القضيب البديل فى النظام المحول (الجمالون المحول) ، الناشىء عن تأثير وحدات القوى X ، المؤثرة بمحاذاة القضيب المستبدل ، لا يساوى صفراً ، عندئذ يكون النظام المبحوث مستقراً هندسياً ، أما إذا كان الإجهاد المذكور مساوياً للصفر ، عندئذ يصبح النظام لحظى التغير .

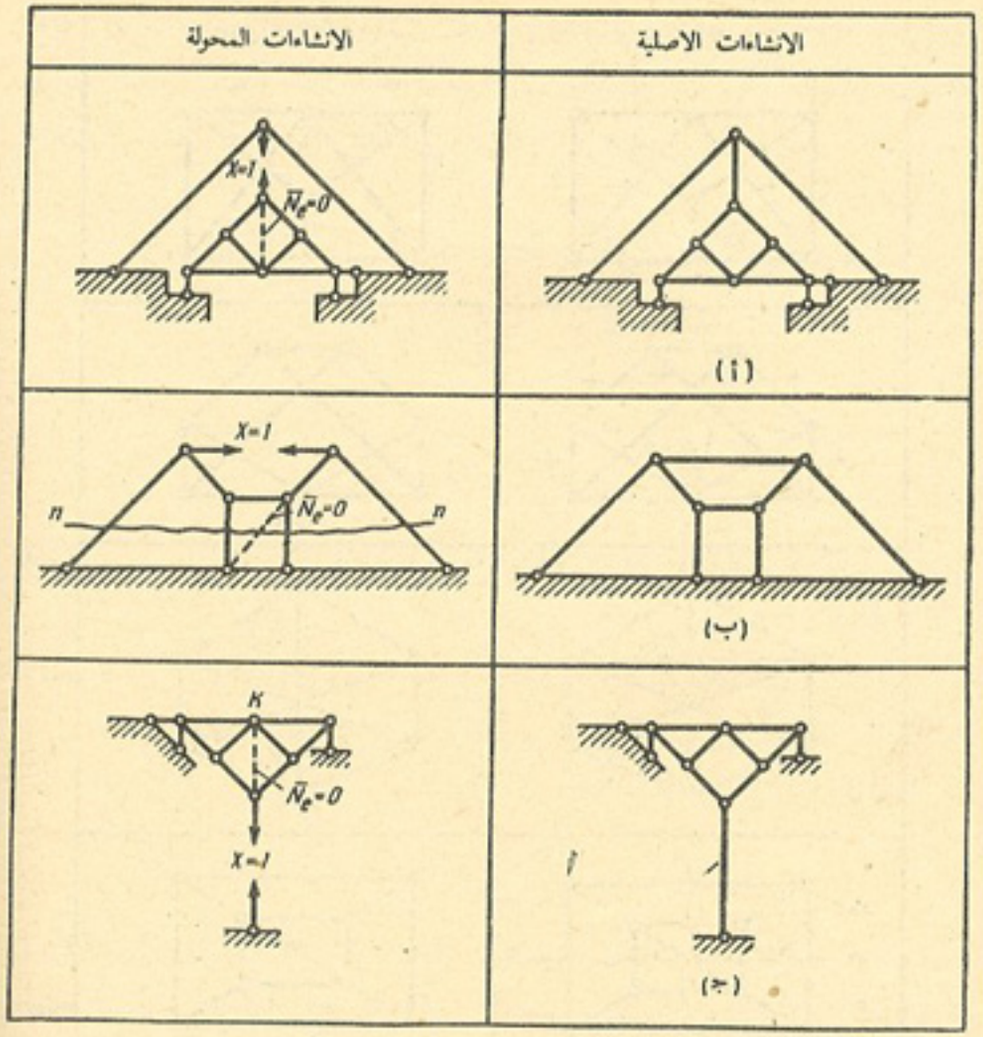
ويبين الشكلان (٤ — ٦٣) و (٤ — ٦٤) الجمالونين أو النظامين الأصلى والمحول ، وقد وضعت لهما الصيغ المعبرة عن مساواة أو عدم مساواة الإجهاد $\bar{N}_{ex}$ للصفر ، فى القضيب البديل . ونقترح على القارئ مراجعة ذلك ،



الشكل ٤ — ٦٣

وبالتالى إثبات مسألة الإستقرار الهندسى لكل نظام من الأنظمة المبينة أعلاه . وقد رسم القضيب البديل فى كافة الأشكال ، بخط منقط ، وقد رمز للاجهاد الناشئ فيه نتيجة لتأثير القوة $X = 1$ ، بالرمز $\bar{N}_e$.

إن العلامات الموجبة والسالبة ، المبينة فى بعض المواضع ، تدل على شد وانضغاط القضبان على التوالى ، الناشئين نتيجة لتأثير وحدات القوى X ، على



الشكل ٤ – ٦٤

النظام (الجمالون) المحول . وبأخذ هذه العلامات فى الاعتبار (نقترح على القارئ مراجعتها) ، وبحث شروط توازن الوصلة ، المشار اليها بالحرف K . أو باستخدام هذا المقطع أو ذاك ، يمكن فى كل حالة من الحالات المنفردة ، أن نثبت مساواة أو عدم مساواة الإجهاد فى القضيب البديل ، للصفر .

وسوف نبحث على سبيل المثال ، النظام المبين فى الشكل (٤ – ٦٣ ، أ) يتضح من شرط توازن الوصلة 1 ، فى النظام المحول ، بأن القضيب 2 — 1

مشدود . وبأن الإجهاد فى القضيب 6 — 1 يساوى صفراً . وينتج من شرط توازن الوصلة 2 ، بان القضيب 3 — 2 مشدود ، والقضيب 4 — 2 مضغوط . ومن شرط توازن الوصلة 4 (مساواة مجموع مساقط القوى على المحور الرأسى للصفر) . نثبت بإن القضيب K — 4 مشدود (لأن القضيب 4 — 2 مضغوط). وعندما نبحث بعد ذلك ، مساقط القوى المؤثرة فى الوصلة K . على المحور الأفقى ، سوف نجد بأن الأجهاد الناشىء فى القضيب البديل 6 — K . هو إجهاد انضغاط ، أى لا يساوى صفراً . ويمكن التوصل إلى نفس النتيجة . بأن نبحث بعد الوصلة الثانية ، شرط توازن الوصلة الثالثة ، ثم الوصلة السادسة .

ونقترح على القارئ أن يتأكد بنفسه ، من أنه عند $\alpha = \beta$ ، سوف يصبح النظام المبين فى الشكل (٤ – ٦٣ ، ج) ، نظاماً لحظى التغير :

ولكى نثبت بأن الإجهادات الناشئة فى النظام المبين فى الشكل (٤ – ٦٣ ، د) تساوى صفراً . نقترح استخدام المقطعين التاليين بالترتيب : $n - n$ و $m - m$.

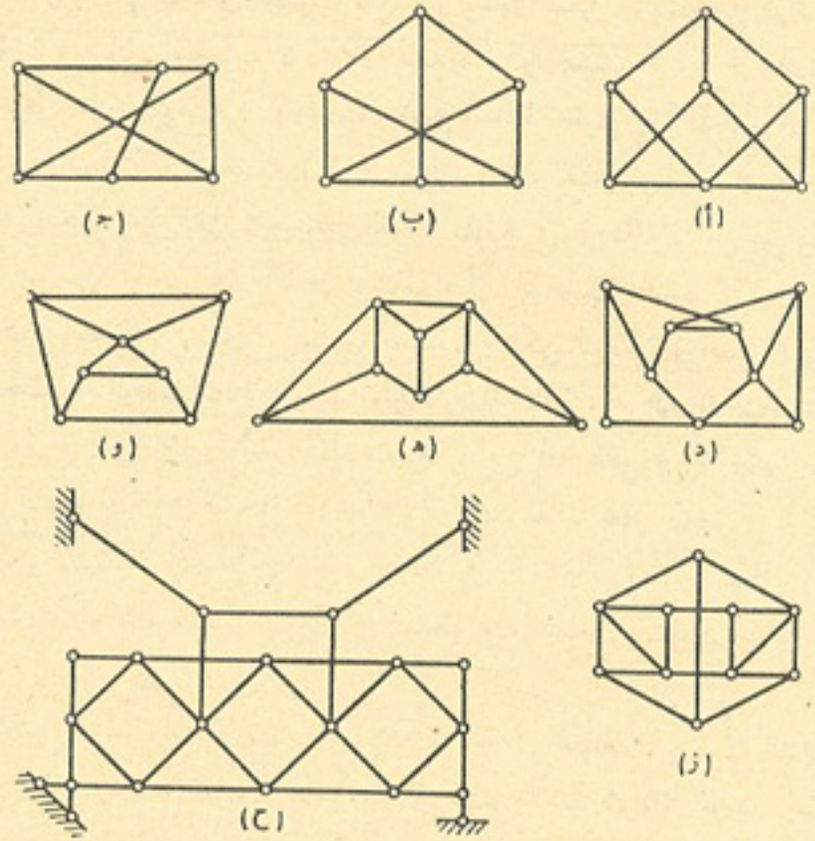
ولكى نثبت بأن الإجهادات $\bar{N}_e$ الناشئة فى النظام المبين فى الشكل . (٤ – ٦٤ ، ب) . تساوى صفراً . يجب عند بحث شروط توازن وصلاته العليا . استخدام المقطع $n - n$.

ونقترح على القارئ أن يقوم ذاتيا ببحث الاستقرار الهندسى للأنظمة (الجمالونات) المبينة فى الشكل (٤ – ٦٥) .

والآن نأتى إلى بحث الحالة التى نحتاج فيها لتحويل النظام (الجمالون) المعقد ، إلى نظام بسيط ، إلى تبديل عدة قضبان . وفى هذه الحالة ، نرى بأن المعادلات التى إزيل الإختلاف بين الجمالون الأصلى والجمالون المحول ، تكون على الشكل التالى ، كما رأينا فى الصيغة (4 — 4) :

$$N_1 = N_{1_p} + \bar{N}_{11} X_1 + \bar{N}_{12} X_2 + \bar{N}_{13} X_3 + \dots = 0$$
$$N_2 = N_{2_p} + \bar{N}_{21} X_1 + \bar{N}_{22} X_2 + \bar{N}_{23} X_3 + \dots = 0$$
$$N_3 = N_{3_p} + \bar{N}_{31} X_1 + \bar{N}_{32} X_2 + \bar{N}_{33} X_3 + \dots = 0$$

وهكذا إلى آخره .



الشكل ٤ – ٦٥

وستكون قيم الإجهادات X_1 ، X_2 ، . . . . إلخ . الناشئة فى القضبان المستبدلة ، معينة وحدية تماما ، وبالتالى سيكون الجمالون الأصلى مستقراً هندسياً . إذا كانت المحددة D (determinant) ، الخاصة بمجموعة المعادلات هذه . لا تساوى صفراً :

$$D = \begin{vmatrix} \overline{N}_{11} , & \overline{N}_{12} , & \overline{N}_{13} \\ \overline{N}_{21} , & \overline{N}_{22} , & \overline{N}_{23} \\ \overline{N}_{31} , & \overline{N}_{32} , & \overline{N}_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

أما إذا كانت المحددة D تساوى صفراً ، أى $D = 0$ ، عندئذ يكون الجمالون الأصلى ، لحظى التغير .

البند ٤ – ٧ : خطوط تأثير الاجهادات فى قضبان الجمالونات البسيطة

بما إن الأحمال تنتقل إلى الجمالون عن طريق الوصلات والمفصلات . إذن تكون لدينا هنا ، حالة تسليط الأحمال بصورة غير مباشرة . ولذلك فإن كل ما ذكرناه فى البند (٢ – ٥) حول رسم خطوط التأثير ، فى حالة تأثير الحمل على العتبة بصورة غير مباشرة ، ينطبق على الجمالونات تماماً .

وكما هو الحال بالنسبة لتحديد الإجهادات فى الجمالونات ، عند تعرضها للاحمال الساكنة (راجع البند ٤ – ٢) ، توجد كذلك طريقتان مختلفتان لرسم خطوط تأثير الاجهادات فى الجمالونات ، وهى : (١) طريقة نقطة العزم ، (٢) طريقة المساقط :

طريقة نقطة العزم . نرسم خط تأثير الإجهاد فى القضيب 9 — 7 من الجمالون ، المبين فى الشكل (٤ – ٦٦ ، أ) . ثم نستخدم المقطع $I - I$ ، الذى يمر فى ثلاثة قضبان .

وعندما يكون الحمل $P = 1$ ، واقعاً إلى يمين الوصلة 8 (يتحرك الحمل على الوتر العلوى للجمالون) . يكون من الاسهل بحث توازن القسم الايسر المقطوع من الجمالون (شكل ٤ – ٦٦ ، ب) وذلك لأنه معرض فى هذه الحالة ، لتأثير قوى أقل من القوى المؤثرة فى القسم الايمن .

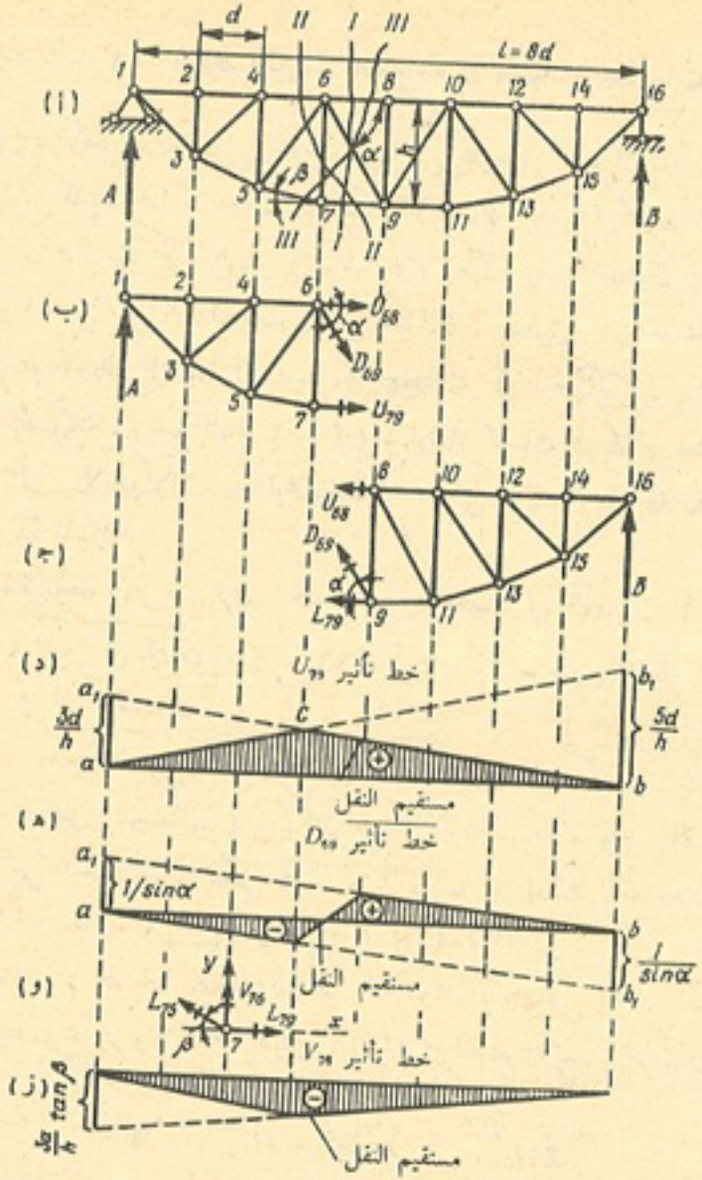
وباستخدام طريقة نقطة الصفر لتحديد الإجهاد U_{79} . نضع المعادلة المعبرة عن مجموع عزوم كافة القوى ، المؤثرة فى القسم الأيسر للجمالون ، حول النقطة 6 :

$$\Sigma M_6 = A \times 3d - U_{79}\, h = 0$$

ومنها ينتج أن .

$$U_{79} = \frac{3\,Ad}{h}$$

وهكذا عند وجود الحمل $P = 1$ على القسم الأيمن من الجمالون ، نجد بان الإجهاد U_{79} يساوى رد فعل المسند الأيسر A ، مضروباً فى المعامل الثابت $\frac{3d}{h}$. ونشير فى نفس الوقت ، إلى أن المقدار $3Ad$ ، يساوى عدديا ، قيمة



الشكل ٤ – ٦٦

عزم الإنحناء M_6^0 فى العتبة البسيطة ، للمقطع الذى أحداثيه السينى يساوى الأحداثى السينى لنقطة العزم 6 .

أن خط تأثير الإجهاد U_{79} (عندما يكون الحمل $P = 1$ واقعاً إلى يمين الوصلة 8) هو عبارة عن خط تأثير رد فعل المسند A . مع ضرب

أحداثياته الرأسية فى المقدار $\frac{3d}{h}$. ولذلك عند رسم هذا الخط ، نضع المقدار $\frac{3d}{h}$ على الخط العمودى المار فى المسند الأيسر ، ثم نوصل قمته بمستقيم مع نقطة الصفر الواقعة على الخط العمودى المار فى المسند الأيمن . ونحصل نتيجة لذلك على المستقيم a_1b (شكل ٤ – ٦٦ ، د) .

ثم ننقل على هذا المستقيم المرسوم بهذا الشكل . والمسمى بالمستقيم الأيمن . الوصلات اليمنى للجمالون ، وهى 8 ، 10 ، 12 ، 14 ، 16 . ثم نظلل خط التأثير . فى القسم الواقع بين الوصلتين 8 ، 16 .

وعندما يكون الحمل $P = 1$ ، واقعاً إلى يسار الوصلة 6 . يمكن إيجاد الإجهاد الناشئ فى القضيب 9 – 7 ، من معادلة توازن القسم الأيمن من الجمالون (شكل ٤ – ٦٦ ، جـ) :

$$\Sigma M_6 = -B \times 5d + U_{79}\, h = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$U_{79} = \frac{5\,Bd}{h}$$

أى أن الإجهاد فى القضيب 9 – 7 يساوى رد فعل المسند الأيمن B ، مضروبا فى عدد من المرات يساوى $\frac{5d}{h}$. أن حاصل الضرب $5\,Bd$ يساوى عددياً عزم الإنحناء M_6^0 فى العتبة البسيطة ، للمقطع الذى أحداثيه السينى يساوى الاحداثى السينى لنقطة العزم 6 .

أما خط تأثير الإجهاد U_{79} للحمل الواقع إلى يسار الوصلة 6 ، فيرسم بالطريقة التالية : نوصل النقطة الواقعة فوق المسند الايمن ، التى إحداثيها الرأسى هو $\frac{5d}{h}$ ، مع نقطة الصفر الواقعة على العمود المار فى المسند الأيسر (نحصل بذلك على المستقيم a_1b ، المبين فى الشكل ٤ – ٦٦ ، د) . أن المستقيم المرسوم بهذه الطريقة ، يسمى بالمستقيم الأيسر ، وعلى هذا المستقيم ننقل الوصلات اليسرى 1 ، 2 ، 4 ، 6 . ثم نظلل خط التأثير الواقع بين الوصلتين 1 ، 6 .

وبما أن الإجهاد U_{79} يحدد من الصيغة التالية :

$$U_{79} = \frac{M_6^0}{h}$$

إذن يمكن الحصول على خط تأثيره . من خط تأثير عزم انحناء العتبة البسيطة (للمقطع المناظر للعمود المار فى نقطة العزم . فى الجمالون) وذلك بضرب جميع إحداثياته الرأسية فى المعامل $\frac{1}{h}$. ولهذا السبب نرى بأن المستقيمين ab و a_1b_1 (الأيسر والأيمن) اللذين يوصلان النقاط العليا (قمم) للاحداثيات الرأسية عند المساند مع نقاط الصفر عند المساند المقابلة . يتقاطعان مع بعضهما البعض تحت نقطة العزم (فى النقطة e) . أن مستقيم النقل ، المناظر لحركة الحمل $P = 1$ بين الوصلتين 6 و 8 للجزء الهيكلى المقطوع ، ينطبق فى هذه الحالة . على إمتداد المستقيم الايمن لخط التأثير .

إن المثال الذى بحثناه أعلاه . يساعدنا على وضع نظام رسم خطوط . تأثير الإجهادات . فى قضبان الجمالون العتبى المحمول على مسندين ، بطريقة نقطة العزم . وذلك كما يلى :

١ — عند رسم المستقيم الأيمن . يجب أن نضع على العمود المار ، فى المسند الأيسر (فى الاعلى أو الاسفل تبعا لنوع العلامة) قيمة الأحداثى الرأسى $\frac{a}{h}$. حيث a تمثل المسافة من نقطة العزم إلى العمود المار فى المسند الأيسر . و h تمثل ذراع الاجهاد المراد تحديده . حول نقطة العزم .

٢ — نوصل قمة الاحداثى الرأسى عند المسند . مع نقطة الصفر الواقعة على العمود المار فى المسند الايمن .

٣ — ننقل على هذا المستقيم الأيمن . المرسوم بهذا الشكل ، الوصلات اليمنى للجمالون .

٤ — نوجد على المستقيم الأيمن . نقطة تقاطعه مع المستقيم الأيسر . ولهذا الغرض ننقل نقطة العزم إلى المستقيم الايسر .

٥ — نوصل نقطة تقاطع المستقيمين الأيمن والأيسر . مع نقطة الصفر

الواقعة على العمود المار فى المسند الأيسر ،

٦ — ننقل على المستقيم الأيسر المرسوم بهذا الشكل ، الوصلات اليسرى للجمالون ،

٧ — نوصل قمم الإحداثيات الرأسية للوصلات ، فى الجزء الهيكلى المقطوع ، بمستقيم النقل .

ويمكن البدء برسم خط التأثير ، من المستقيم الأيسر ايضاً . وفى هذه الحالة ، نضع على العمود المار فى المسند الأيمن (فى الأعلى أو الأسفل ، تبعاً لنوع العلامة) قيمة الاحداثى الرأسى $\frac{b}{h}$. حيث b تمثل المسافة من نقطة العزم إلى العمود المار فى المسند الأيمن . و h تمثل ذراع الأجهاد المراد تحديده . حول نقطة العزم . ثم نرسم المستقيم الأيسر . بين قمة الاحداثى الرأسى المرسوم بهذا الشكل ، ونقطة الصفر الواقعة على العمود المار فى المسند الأيسر . وبعد ذلك نرسم المستقيم الأيمن ومستقيم النقل .

طريقة المساقط : نرسم خط تأثير الإجهاد فى الضلع القطرى 9 — 6 للجمالون المبين فى الشكل (٤ — ٦٦ ، أ) .

عندما يكون الحمل $P = 1$ واقعاً بين الوصلتين 8 ، 16 (يتحرك الحمل على الوتر العلوى) . نبحث شرط توازن القسم الأيسر المقطوع من الجمالون (شكل ٤ — ٦٦ ، ب) . ونضع معادلة مساقط كافة القوى على المحور الرأسى :

$$\Sigma Y = A - D_{69} \sin \alpha = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$D_{69} = \frac{A}{\sin \alpha}$$

وعندما يكون الحمل المذكور ، واقعاً بين الوصلتين 1 و 6 . نبحث . شرط توازن القسم الأيمن من الجمالون (شكل ٤ — ٦٦ ، جـ) . وبإسقاط كافة القوى على المحور الرأسى . نحصل على :

$$\Sigma Y = B + D_{69} \sin \alpha = 0$$

ومنها نحصل على :

$$D_{69} = -\frac{B}{\sin \alpha}$$

وتدل الصيغ المستخرجة للاجهاد D_{69} ، على أنه ما دام الحمل واقعاً على القسم الايمن من الجمالون ، يمكن الحصول على خط تأثير الاجهاد D_{69} بضرب الأحداثيات الرأسية لخط تأثير رد فعل المسند A ، فى المعامل الثابت $\frac{1}{\sin \alpha}$. أما عندما يكون الحمل $P = 1$ ، واقعا ضمن القسم الأيسر من الجمالون، يكون الإجهاد D_{69} مساوياً لرد فعل المسند B . مضروبا فى المقدار $\left(-\frac{1}{\sin \alpha}\right)$.

ولرسم المستقيم الأيمن ، نضع على العمود المار فى المسند الأيسر ، قيمة الأحداثى الرأسى $\frac{1}{\sin \alpha}$ ، ونوصل قمته مع نقطة الصفر ، الواقعة على العمود المار فى المسند الايمن (المستقيم a_1b المبين فى الشكل ٤ – ٦٦ ، هـ) وعلى المستقيم الأيمن المرسوم بهذا الشكل ، نضع الوصلات اليمنى 8 ، 10 ، 12 ، 14 ، 16 .

ولرسم المستقيم الأيسر ، نضع على العمود المار فى المسند الأيمن ، قيمة الأحداثى الرأسى $\frac{1}{\sin \alpha}$ فى الأسفل ، ثم نوصل قمته مع نقطة الصفر الواقعة على العمود المار فى المسند الأيسر . ثم نضع على هذا المستقيم الأيسر المرسوم (المستقيم ab_1 ، المبين فى الشكل ٤ – ٦٦ ، هـ) الوصلات اليسرى : 1 ، 2 ، 4 ، 6 .

إن مستقيم النقل ، يوصل قمم الأحداثيات الرأسية للوصلات ، فى الجزء الهيكلى المقطوع .

ونلاحظ بأنه فى هذه الحالة أيضاً ، يتقاطع المستقيمان الأيمن والأيسر تحت نقطة العزم . وبالفعل تقع نقطة العزم للاجهاد D_{69} فى اللانهاية ، وهناك يتقاطع المستقيمان الأيمن والأيسر ، الموازيان لبعضهما البعض.

ويحتوى خط تأثير الإجهاد D_{69} على أقسام ذات أحداثيات رأسية موجبة وسالبة . إذن قد يكون القضيب 9 — 6 ، أثناء حركة الحمل على

الجمالون ، مضغوطا ومشدوداً كذلك :

نرسم الآن خط تأثير الإجهاد فى القضيب القائم 7—6(شكل ٤—٦٦ ، أ). وفى هذه الحالة لا يمكن استخدام طريقة نقطة العزم ، وذلك لأنه يتحتم قطع الجمالون ، بمقطع يضم أربعة قضبان (المقطع $II - II$ أو $III - III$) .

والأفضل هنا إستخدام طريقة قطع الوصلات (شكل ٤ – ٦٦ ، و) . وبعد قطع الوصلة 7 ، نضع معادلة توازنها ، على هيئة مجموع مساقط كافة القوى ، على المحور الرأسى :

$$\Sigma Y = V_{76} + U_{75} \sin \beta = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$V_{76} = -U_{75} \sin \beta$$

وبما أن الحمل $P = 1$ غير مسلط فى الوصلة 7 مباشرة (لأنه يتحرك على الوتر العلوى للجمالون) ، أذن تبقى العلاقة الناتجة بين الإجهادين V_{76} و U_{75} ثابتة ، عند أى وضع كان من أوضاع الحمل ضمن باع الجمالون . ولذلك يمكن الحصول على خط تأثير الاجهاد V_{76} من خط تأثير الإجهاد U_{75} ، بضرب كافة أحداثياته الرأسية فى المقدار $(-\sin \beta)$.

ولكننا لحد الآن لا نعرف قيمة الاجهاد U_{75} ، ولتحديده نسقط القوى المؤثرة فى الوصلة 7 ، على المحور الأفقى :

$$\Sigma X = -U_{75} \cos \beta + U_{79} = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$U_{75} = \frac{U_{79}}{\cos \beta}$$

ولذلك نجد بأن :

$$V_{76} = -U_{75} \sin \beta = -U_{79} \tan \beta$$

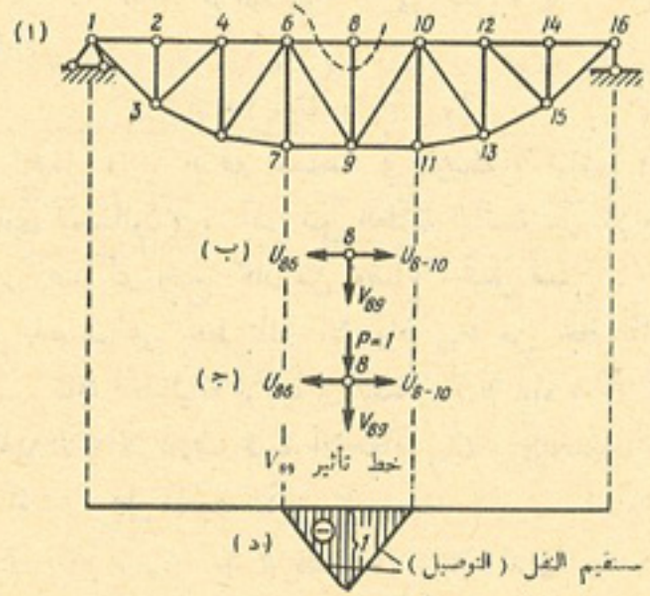
وكان فى الإمكان الحصول على هذه النتيجة مباشرة ، من معادلة مساقط القوى المؤثرة فى الوصلة ، على المستقيم العمودى على القضيب 5 — 7 .

وهكذا يمكن الحصول على خط تأثير الإجهاد V_{76} ، من خط تأثير الإجهاد U_{79} المرسوم سابقاً ، وذلك بضرب جميع أحداثياته الرأسية فى المقدار

($-\tan\beta$) . أن خط تأثير V_{76} المرسوم بهذه الطريقة . مبين فى الشكل (٤ – ٦٦ ، ز) .

والآن نرسم خط التأثير للضلع القائم 9 — 8 (شكل ٤ – ٦٧ . أ) . فى هذه الحالة . كما فى الحالة السابقة . لا يمكن استحداث مقطع ، يمر بثلاثة قضبان فقط . ولذلك نستخدم طريقة قطع الوصلات :

بعد قطع الوصلة العليا 8 (شكل ٤ – ٦٧ ، أ) وبحث شرط توازنها ، نحصل على ما يلى :



الشكل ٤ – ٦٧

١ — عندما يكون الحمل مؤثراً فى أية وصلة كانت . ما عدا الوصلة 8 (شكل ٤ – ٦٧ ، ب) نجد بان :

$$\Sigma Y = -V_{89} = 0$$

٢ — عندما يؤثر الحمل فى الوصلة 8 (شكل ٤ – ٦٧ . جـ) نجد بأن :

$$\Sigma Y = -V_{89} - P = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$V_{89} = -P = -1$$

إذن عندما يكون الحمل (وحدة الحمل) $P = 1$. مؤثراً فى الوصلات 1 ، 2 ، 4 ، 6 ، أو فى الوصلات 10 ، 12 ، 14 ، 16 نجد بأن الإجهاد V_{89} يساوى صفراً . أى $V_{89} = 0$. أما عندما يكون الحمل $P = 1$ مؤثراً فى الوصلة 8 . نجد بأن $V_{89} = -1$. وبإيجاد الأحداثيات الرأسية فى نقاط الوصلات ووصل قممها بمستقيمات . نحصل على خط تأثير الإجهاد V_{89} (شكل ٤ – ٦٧ . د) . ولخط التأثير هذا . شكل مثلث . قيمة إحداثية الرأسى الأكبر تساوى واحد . وتشير علامته السالبة . إلى أن الضلع القائم 9 — 8 . معرض للانضغاط فقط .

مثال ١ : يطلب رسم خطوط تأثير الاجهادات فى القضيبين 8—7 و 9—7 من الجمالون المبين فى الشكل (٤ – ٦٨ ، أ) .

الحل : نرسم خط تأثير الاجهاد U_{79} . نستحدث المقطع $k - k$. ونبحث شرط توازن القسم الايسر المقطوع من الجمالون (شكل ٤ – ٦٨ ، ب) عندما يكون الحمل $P = 1$ ، واقعاً إلى يمين المقطع :

$$\Sigma M_8 = A \times 3d - U_{79} \times h = 0$$

ومنها ينتج أن :

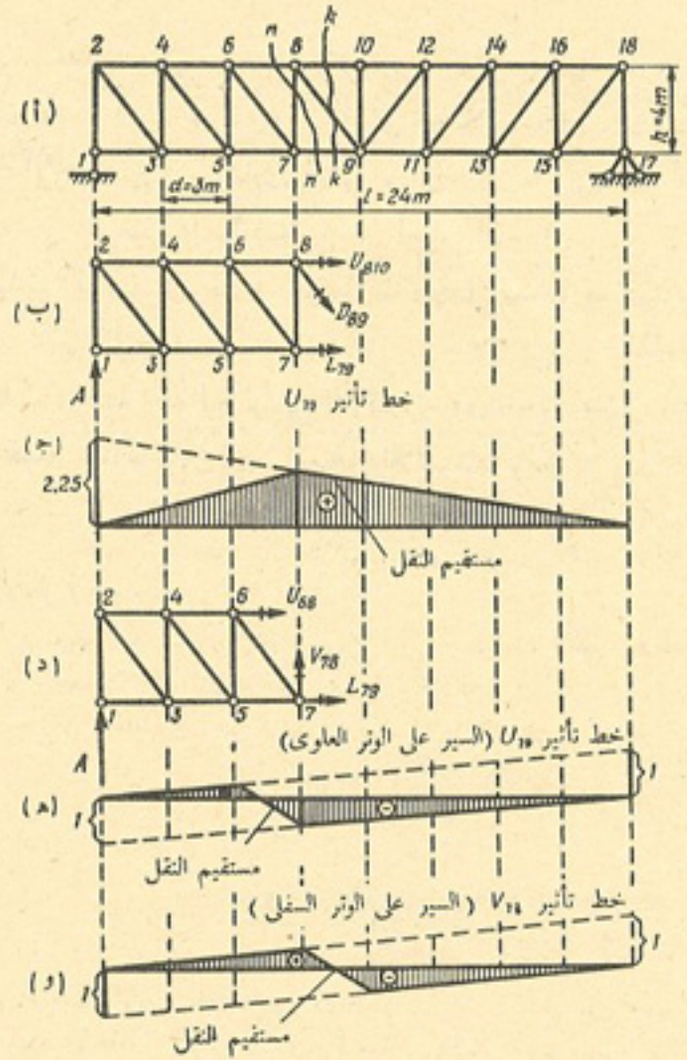
$$U_{79} = \frac{A \times 3d}{h} = A\,\frac{3 \times 3}{4} = 2.25\,A$$

ولرسم المستقيم الأيمن لخط تأثير الإجهاد U_{79} . نضع على العمود المار فى المسند الأيسر ، قيمة الأحداثى الرأسى المساوية للمقدار 2.25 . ونوصل قمته مع نقطة الصفر الواقعة على العمود المار فى المسند الأيمن (شكل ٤ – ٦٨ ، جـ) . ثم ننقل أو نضع على المستقيم المرسوم بهذه الطريقة ، الوصلات اليمنى للجمالون . ثم نرسم المستقيم الأيسر ، مستخدمين الظرف الذى يحتم مروره فى نقطة الصفر ، الواقعة على المسند الأيسر . وتقاطعه مع المستقيم الأيمن تحت نقطة العزم للوصلة 8 .

أن خط تأثير الإجهاد U_{79} يكون على هيئة مثلث ، قمته واقعة تحت نقطة العزم .

نرسم خط تأثير الاجهاد V_{78} . نستحدث المقطع $n - n$ فى الجمالون ، ونضع للقسم الأيسر منه (شكل ٤ – ٦٨ ، د) معادلة مساقط القوى ، على المحور الرأسى ، بفرض أن الحمل $P = 1$ يقع إلى يمين الجزء الهيكلى المقطوع :

$$\Sigma Y = A + V_{78} = 0$$



الشكل ٤ – ٦٨

ومنها ينتج أن :

$$V_{78} = -A$$

وعندما يكون الحمل $P = 1$ واقعاً إلى يسار الجزء الهيكل المقطوع ، يكون شكل معادلة توازن القسم الأيمن من الجمالون ، كما يلى :

$$\Sigma Y = B - V_{78} = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$V_{78} = B$$

ويجب أن نشير هنا إلى أنه عند حركة الحمل على الوصلات السفلى للجمالون ، تكون الوصلة اليمنى الأولى للاجهاد V_{78} ، هى الوصلة 9 ، وعند حركة الحمل على الوصلات العليا ، تكون الوصلة المذكورة هى الوصلة 8 ، الواقعة على بعد جزء هيكلى واحد إلى يسار الوصلة 9 . وعند الحركة على اسفل الجمالون (على الأرضية السفلى للجمالون) تكون الوصلة اليسرى الأولى ، هى الوصلة 7 . أما عند الحركة على أعلى الجمالون (الأرضية العليا للجمالون) . فتكون الوصلة المذكورة هى الوصلة 6 . الواقعة على بعد جزء هيكلى واحد إلى يسار الوصلة 7 . ولا تعتمد معادلتا توازن قسمى الجمالون الأيسر والأيمن ، على موقع الوصلات (عليا أم سفلى) التى يتحرك عليها الحمل إذن فى كلتا الحالتين المذكورتين . تكون المستقيمات اليسرى (والمستقيمات اليمنى) لخطوط التأثير ، متساوية تماماً . أما خطوط التأثير المرسومة للأرضية السفلى والأرضية العليا من الجمالون . فتختلف فقط من حيث موقع مستقيم النقل ، الذى يكون فى إحدى الحالتين مزاحا بمسافة جزء هيكلى واحد ، بالنسبة لمستقيم النقل العائد لخط التأثير المرسوم للحالة الثانية .

ويبين الشكل (٤ – ٦٨ هـ . و) خطين من خطوط التأثير . أحدهما يناظر حركة الحمل على الوصلات العليا للجمالون ، والآخر يناظر حركة الحمل على الوصلات السفلى .

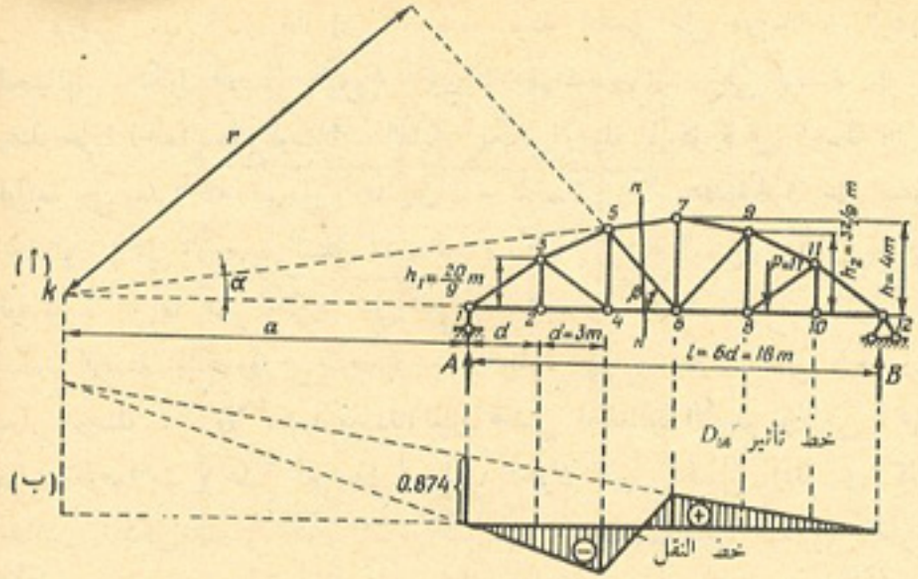
مثال ٢ : يطلب رسم خط تأثير الإجهاد D_{56} ، فى الجمالون المبين فى الشكل (٤ – ٦٩ ، أ) .

الحل : نستحدث المقطع $n - n$. ونضع الحمل $P = 1$ إلى يمين المقطع ونكتب معادلة عزوم القوى ، المؤثرة فى القسم الأيسر من الجمالون ، حول نقطة تقاطع إتجاهى الإجهادين فى القضيبين 7 – 5 و 6 – 4 ، وهى النقطة k :

$$\Sigma M_k = -Aa + D_{56}r = 0$$

ومنها ينتج أن

$$D_{56} = \frac{Aa}{r}$$



الشكل ٤ – ٦٩

حيث r – ذراع الإجهاد D_{56} حول النقطة k ،

a – ذراع رد فعل المسند A ، حول نفس النقطة k .

والآن نحدد الذراع a . أن إرتفاع الضلع القائم 4 — 5 ، يساوى $h_2 = \frac{32}{9}$ m

وظل زاوية ميل القضيب 7 — 5 مع الأفق ، يمكن أن يحدد من الصيغة التالية :

$$\tan \alpha = \frac{4 - \frac{32}{9}}{3} = 0.1481$$

ومن المثلث 4 — 5 — k نجد ما يلى :

$$a + 2d = \frac{h_2}{\tan \alpha} = \frac{32}{9 \times 0.1481} = 24 \text{ m}$$

إذن :

$$a = 24 - 2d = 24 - 2 \times 3 = 18 \text{ m}$$

وقيمة الذراع r تساوى :

$$r = (a + 3d) \sin\beta$$

إن النسبة بين إرتفاع الضلع القائم 4 — 5 ، وطول الجزء الهيكل 6 — 4 ، تساوى ما يلى :

$$\tan \beta = \frac{32}{9 \times 3} = \frac{32}{27} = 1.185$$

وبموجب ظل الزاوية المستخرج ، نحدد باستخدام جداول النسب المثلثية ، قيمة الزاوية β وجيبها° :

$$\beta = 49^\circ\ 50'$$

$$\sin \beta = 0.764$$

ولذلك نجد بان :

$$r = (18 + 9)\ 0.764 = 20.6 \text{ m}$$

وبعد التعويض عن قيمتى a و r فى صيغة D_{56} ، نحصل على ما يلى :

$$D_{56} = \frac{18A}{20.6} = 0.874A$$

ولرسم المستقيم الأيمن لخط تأثير D_{56} ، نضع تحت المسند الايسر ، قيمة الأحداثى الرأسى التى تساوى (0.874—) ثم نوصل قمته مع نقطة الصفر الواقعة عند المسند الأيمن (شكل ٤ – ٦٩ ، ب) .

ونرسم المستقيم الأيسر بإستخدام الوضعية المعروفة ، وهى تقاطع المستقيم المذكور مع المستقيم الأيمن ، على العمود المار فى نقطة العزم . أن خط تأثير D_{56} المرسوم بهذه الطريقة ، مبين فى الشكل (٤ – ٦٩ ، ب) .

مثال ٣ : يطلب رسم خطوط تأثير الإجهادات O_{75} ، D_{56} و V_{76} فى قضبان الجمالون السقفى المثلث ، المبين فى الشكل (٤ – ٧٠ ، أ) مع العلم بأن الأرضية تقع فى القسم السفلى فى الجمالون (أى أن الأحمال تكون مؤثرة فى الوتر السفلى) .

الحل : خط تأثير الإجهاد O_{75} . نستحدث المقطع n — n فى الجمالون المذكور ثم نبحث شرط توازن القسم الأيسر منه ، عندما يكون الحمل $P = 1$ واقعاً فى القسم الأيمن من الجمالون :

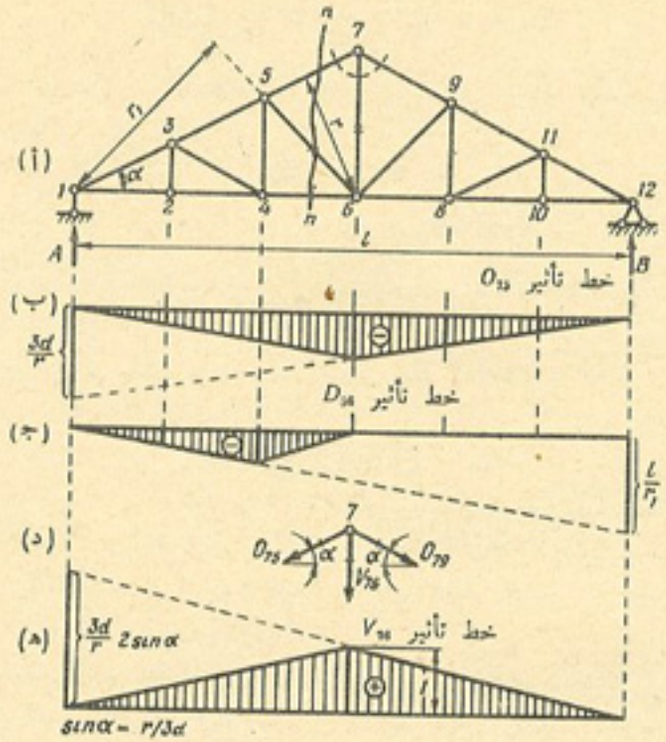
$$\Sigma M_6 = A \times 3d + O_{75}\, r = 0$$

منها ينتج أن :

$$O_{75} = -\frac{3Ad}{r}$$

° يمكن عدم إستخدام الجداول المذكورة ، وتحديد قيمة $\sin\beta$ من الصيغة التالية :

$$\sin\beta = \frac{\tan\beta}{\sqrt{1 + \tan^2\beta}}$$



الشكل ٤ – ٧٠

ويكون شكل خط تأثير الإجهاد O_{75} على هيئة مثلث ، تقع قمته تحت نقطة العزم (شكل ٤ – ٧٠ ، ب) .

خط تأثير الإجهاد D_{56} . نستخدم المقطع $n - n$ نضع معادلة مجموع عزوم كافة القوى المؤثرة على القسم الأيسر من الجمالون ، حول النقطة 1 (نضع الحمل $P = 1$ إلى يمين المقطع $n - n$):

$$\Sigma M_1 = D_{56}\, r_1 = 0$$

منها ينتج أن :

$$D_{56} = 0$$

أى أنه عند وقوع الحمل $P = 1$ إلى يمين المقطع ، يكون الإجهاد D_{56} مساويا للصفر . وفى هذه الحالة ينطبق المستقيم (القسم) الأيمن لخط التأثير ، مع المحور السينى .

لرسم المستقيم الأيسر لخط التأثير ، نبحث شرط توازن القسم الايسر من الجمالون (عند وجود الحمل $P = 1$ إلى يسار المقطع $n - n$) :

$$\Sigma M_1 = -Bl - D_{56}\, r_1 = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$D_{56} = -\frac{Bl}{r_1}$$

أى أن الإجهاد D_{56} يساوى رد فعل المسند الأيمن B ، مضروبا فى المقدار $\left(-\frac{l}{r_1}\right)$.

خط تأثير الإجهاد D_{56} المرسوم بهذه الطريقة ، مبين فى الشكل (٤ – ٧٠ ، ج) .

خط تأثير الإجهاد V_{76} . نقطع الوصلة 7 (شكل ٤ – ٧٠ ، د) ثم نسقط كافة القوى المؤثرة فيها ، على المحور الافقى :

$$\Sigma X = -O_{75}\cos\alpha + O_{79}\cos\alpha = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$O_{75} = O_{79}$$

ونسقط كافة القوى المذكورة ايضاً ، على المحور العمودى :

$$\Sigma Y = -V_{76} - 2O_{75}\sin\alpha = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$V_{76} = -2O_{75}\sin\alpha$$

وهكذا ، يمكن الحصول على خط تأثير الإجهاد V_{76} ، بضرب كافة الأحداثيات الرأسية لخط تأثير الاجهاد O_{75} فى المعامل $(-2\sin\alpha)$. ويكون شكل خط تأثير الإجهاد V_{76} على هيئة مثلث (شكل ٤ – ٧٠ ، هـ) ، قيمة أحداثيه الرأسى الأكبر تساوى واحد .

مسألة رقم ١ : يطلب اثبات صحة خطوط التأثير ، المبينة فى الشكل (٤ – ٧١) .

مسألة رقم ٢ : يطلب القيام بما يلى بالنسبة للجمالونات المبينة فى الأشكال (٤ – ٧٢) إلى (٤ – ٧٦) :

(أ) مراجعة صحة رسم خطوط التأثير ،

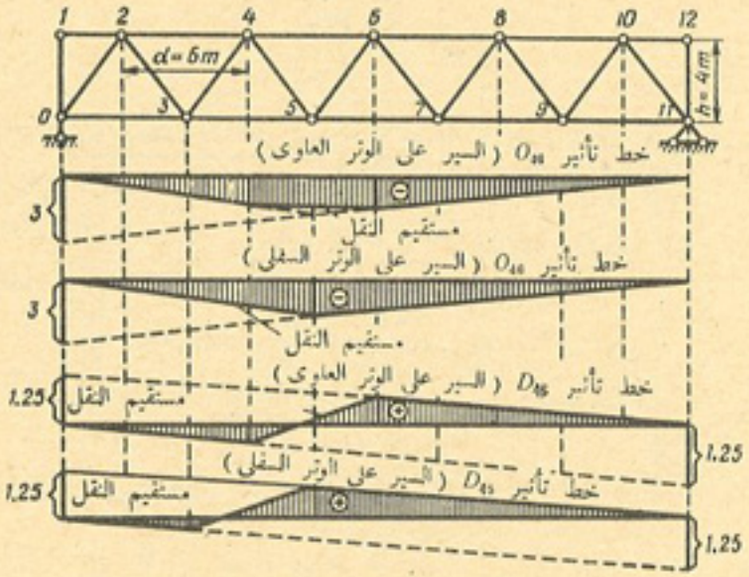
(ب) رسم خطوط التأثير ، للقضبان المؤشرة بعلامة شارحة .

تنويه : أ) عند رسم خط تأثير الإجهاد V_2 ، للجمالون المبين فى الشكل (٤ – ٧٢) ، ينصح بقطع وصلة المسند الأيمن ، وبحث شرط توازنها . وعند وجود الحمل $P = 1$ فى أية وصلة كانت ، باستثناء وصلة المسند الأيمن ، يتم تحديد الإجهاد V_2 من المعادلة التالية :

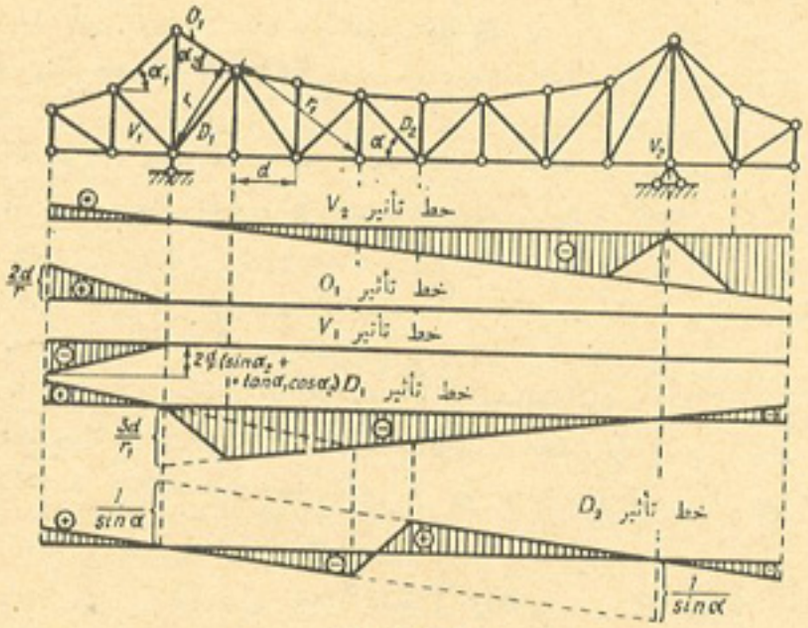
$$V_2 = -B$$

وعند وجود الحمل فى وصلة المسند الأيمن ، تكون قيمة الإجهاد مساوية للصفر

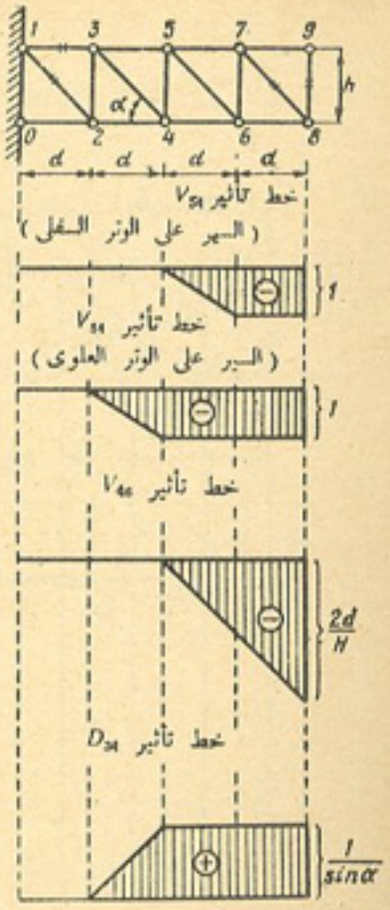
$$V_2 = 0$$



الشكل ٤ — ٧١

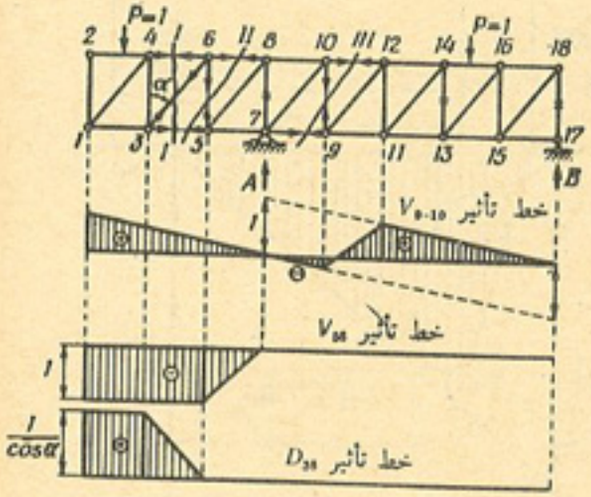


الشكل ٤ — ٧٢

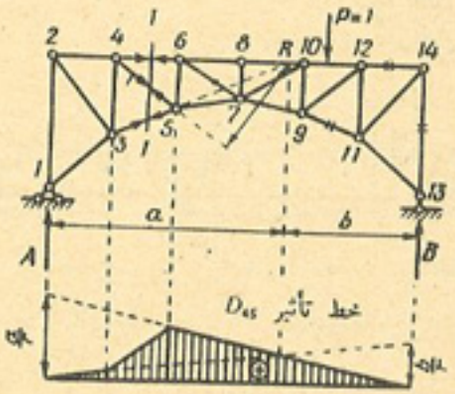


الشكل ٤ — ٧٣

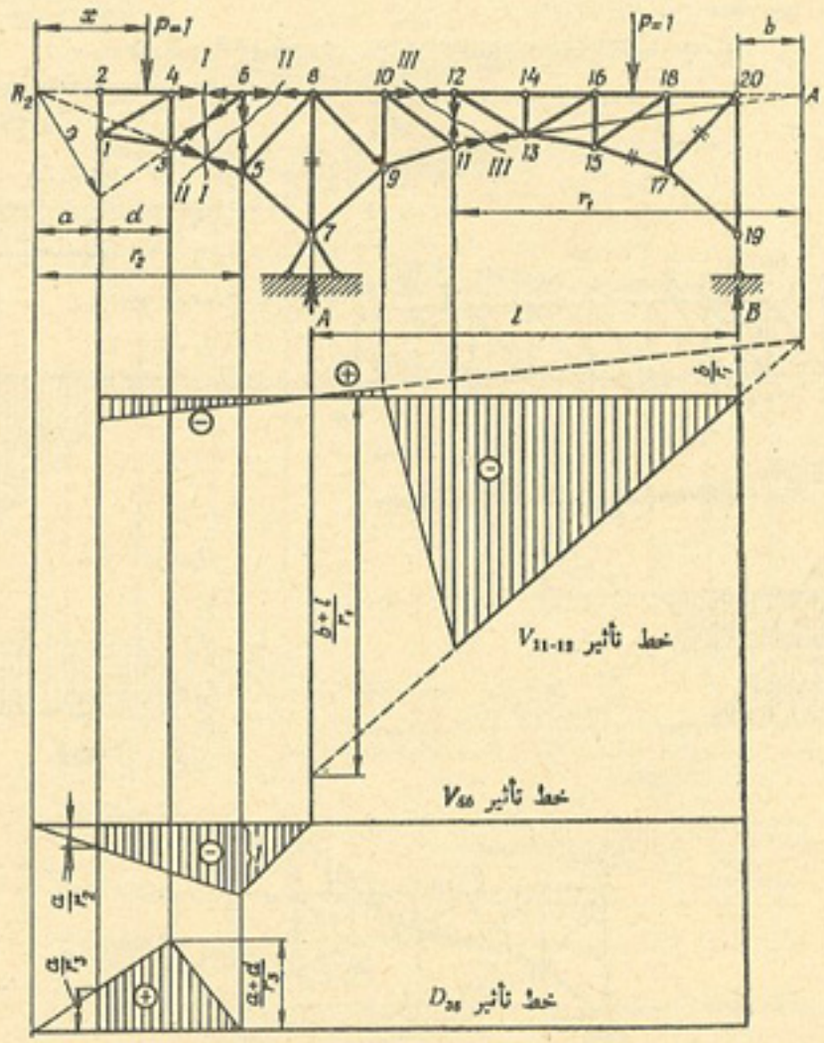
(ب) عند رسم خطوط التأثير الجمالون المبين فى الشكل (٤ — ٧٣)، ينصح بعد القيام بتحريك الحمل $P = 1$ على طول الكابول، ببحث شرط توازن القسم الأيمن المقطوع منه. وفى هذه الحالة، يصبح من الواضح تماماً، بأنه عند وجود الحمل إلى يسار المقطع، تكون قيمة الإجهاد فى القضيب المبحوث، مساوية للصفر.



الشكل ٤ — ٧٤



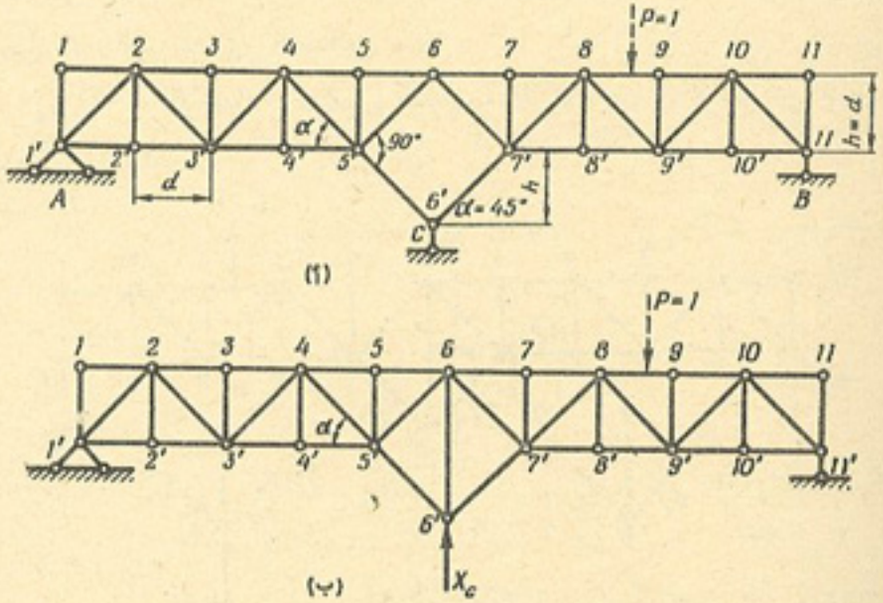
الشكل ٤ — ٧٥



الشكل ٤ — ٧٦

البند ٤ — ٨ : خطوط تأثير الإجهادات فى قضبان الجمالونات المعقدة

عند حساب (تصميم) الجمالونات المعقدة (الجمالونات ذات الشكل الهندسى المعقد) ، بالنسبة لتأثير الأحمال المتنقلة ، وعلى الأخص عند حساب الجمالونات المتعددة الابواع ، المحددة إستاتيكيا ، يمكن استخدام طريقة تبديل القضبان ، لرسم خطوط التأثير .



الشكل ٤ — ٧٧

وعلى سبيل المثال ، سنبحث الجمالون المبين فى الشكل (٤ — ٧٧ ، أ) . نرسم خط تأثير رد الفعل C للمسند المتوسط ، عند حركة الحمل $P = 1$ على الوتر العلوى للجمالون . ولهذا الغرض نحول الجمالون المعقد المذكور إلى جمالون بسيط ، بتبديل القضيب الساند C بالقضيب الرأسى $6 - 6'$ (شكل ٤ — ٧٧ ، ب) . وعوضا عن القضيب الساند C ، نسلط فى الوصلة $6'$ ، القوة X_c ، التى هى رد فعل المسند C .

ولتحديد قيمة رد الفعل X_c ، نضع المعادلة التالية ، المعبرة عن شرط مساواة الإجهاد الناشىء فى القضيب البديل $6 - 6'$ للصفر :

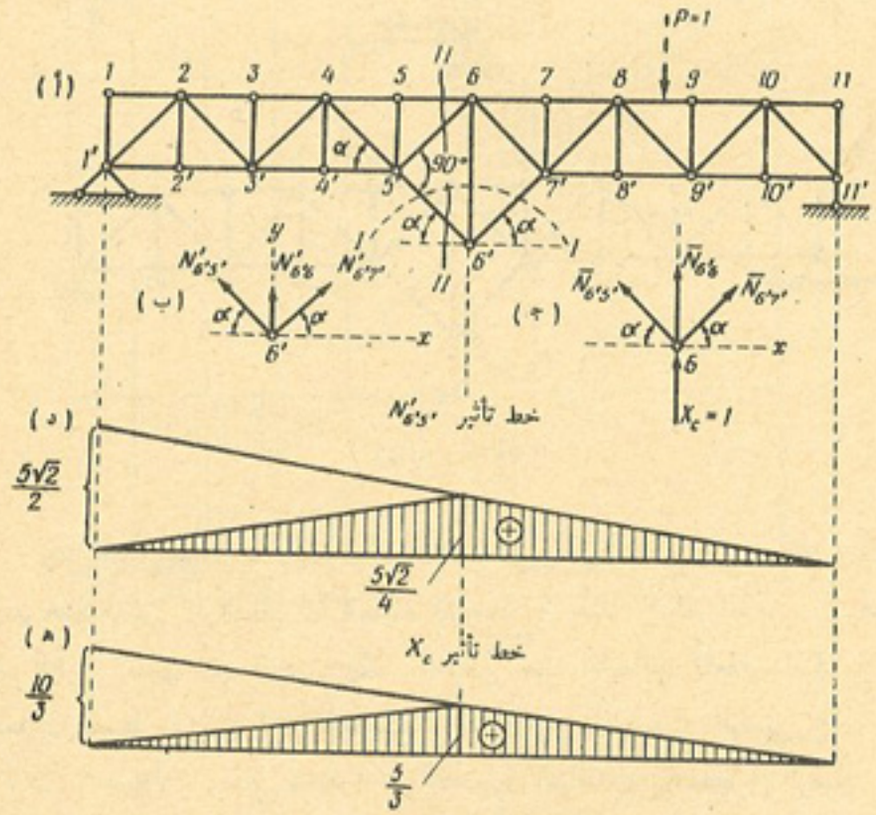
$$N_{6'6} = N'_{6'6} + X_c \bar{N}_{6'6} = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$X_c = -\frac{N'_{6'6}}{\bar{N}_{6'6}}$$

حيث $N'_{6'6}$ — الإجهاد فى القضيب $6 - 6'$ من الجمالون ، المبين فى الشكل (٤ — ٧٧ ، ب) ، وهو الإجهاد الناجم عن تأثير الحمل $P = 1$ ، التحرك على الوتر العلوى للجمالون ،

$\bar{N}'_{6'6}$ — الإجهاد فى نفس القضيب المذكور ، الناجم عن تأثير رد الفعل $X_c = 1$.



الشكل ٤ — ٧٨

ويمكن الحصول على خط تأثير رد فعل المسند X_c ، إذا قسمنا الإحداثيات الرأسية لخط تأثير الإجهاد $N'_{6'6}$ ، على قيمة الإجهاد $\bar{N}_{6'6}$ ، المأخوذة بعكس الإشارة .

ولرسم خط تأثير الاجهاد $N'_{6'6}$ نقطع الوصلة $6'$ بالمقطع $I - I$ (شكل ٤ — ٧٨ ، أ) ، ونبحث شرط توازنها (شكل ٤ — ٧٨ ، ب) :

$$\Sigma X = -N'_{6'5'}\cos\alpha + N'_{6'7'}\cos\alpha = 0$$
$$\Sigma Y = N'_{6'5'}\sin\alpha + N'_{6'7'}\sin\alpha + N'_{6'6} = 0$$

ومن هنا ينتج أن :

$$N'_{6'6} = -2N'_{6'5'}\sin\alpha$$

وبتعويض قيمة $N_{6'6}$ فى الصيغة التى تحدد قيمة رد الفعل X_c ، نحصل على ما يلى :

$$X_c = \frac{2N'_{6'5'}\sin\alpha}{\bar{N}_{6'6}}$$

ولرسم خط تأثير الاجهاد $N'_{6'5'}$ ، نقطع الجمالون بالمقطع $II - II$ (شكل ٤ — ٧٨ ، أ) ، وبعد أن نفرض بان الحمل $P = 1$ يقع إلى يمين هذا المقطع ، نضع معادلة توازن القسم الأيسر المقطوع من الجمالون :

$$\Sigma M_6 = A \times 5d - N'_{6'5'}\frac{d}{\sin\alpha} = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$N'_{6'5'} = 5A\sin\alpha$$

إذن لرسم المستقيم الايمن (القسم الأيمن) لخط تأثير الإجهاد $N'_{6'5'}$ ، يجب أن نضع من محور السينات إلى الأعلى على العمود المار فى المسند الأيسر ،

القيمة المساوية للقسم $5 \sin\alpha = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ ، ونوصل قمته مع نقطة الصفر الواقعة على العمود المار فى المسند الأيمن . ونرسم المستقيم الأيسر (القسم الأيسر) لخط تأثير الإجهاد $N'_{6',5'}$ ، بأستخدام الوضعية المعروفة ، التى يتقاطع بموجبها هذا المستقيم الايسر ، مع المستقيم الأيمن ، على العمود المار فى نقطة العزم (النقطة 6) :

إن خط تأثير الإجهاد $N'_{6',5'}$ المرسوم بهذه الطريقة ، للجمالون البسيط (شكل ٤ — ٧٨ ، أ) ، مبين فى الشكل (٤ — ٧٨ ، د) :

والآن نحدد الإجهاد $\bar{N}_{6'6}$ فى القضيب 6 — 6′ ، الناجم عن تأثير القوة $X_c = 1$. ونبحث لهذا الغرض ، شروط توازن الوصلة 6′ (شكل ٤ — ٧٨ ، ج) :

$$\Sigma Y = \bar{N}_{6'6} + 1 + 2\bar{N}_{6'5'} \sin\alpha = 0$$

حيث : $\bar{N}_{6'5'} = -\frac{5\sqrt{2}}{4}$ (لاحظ الشكل ٤ — ٧٨ ، د) .

إذن يكون لدينا :

$$\bar{N}_{6'6} = -1 + 2 \times \frac{5\sqrt{2}}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2}$$

ولذلك نجد بأن :

$$X_c = \frac{2\, N'_{6'5'} \sin\alpha}{\bar{N}_{6'6}} = \frac{2\, N'_{6'5'}\sqrt{2}\times 2}{3 \times 2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} N'_{6'5'}$$

إذن للحصول على خط تأثير X_c ، يجب ضرب جميع الإحداثيات الرأسية للإجهاد $N'_{6'5'}$ فى معامل قيمته تساوى $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. إن خط التأثير المرسوم بهذه الطريقة ، مبين فى الشكل (٤ — ٧٨ ، هـ) . وبواسطة خط تأثير الإجهاد X_c ، يمكن بسهولة رسم خطوط تأثير الإجهادات الأخرى :

البند ٤ — ٩ : الجمالونات التى تحتوى أجزاؤها الهيكلية على عتبات جمالونية

إن تحديد الإجهادات فى قضبان الجمالونات ، بطريقة نقطة العزم ، (راجع البند ٤ — ٢) ، يتم بواسطة الصيغة التالية :

$$N = \pm \frac{M}{r}$$

حيث M — عزم القوى اليسرى أو اليمنى حول نقطة العزم ،

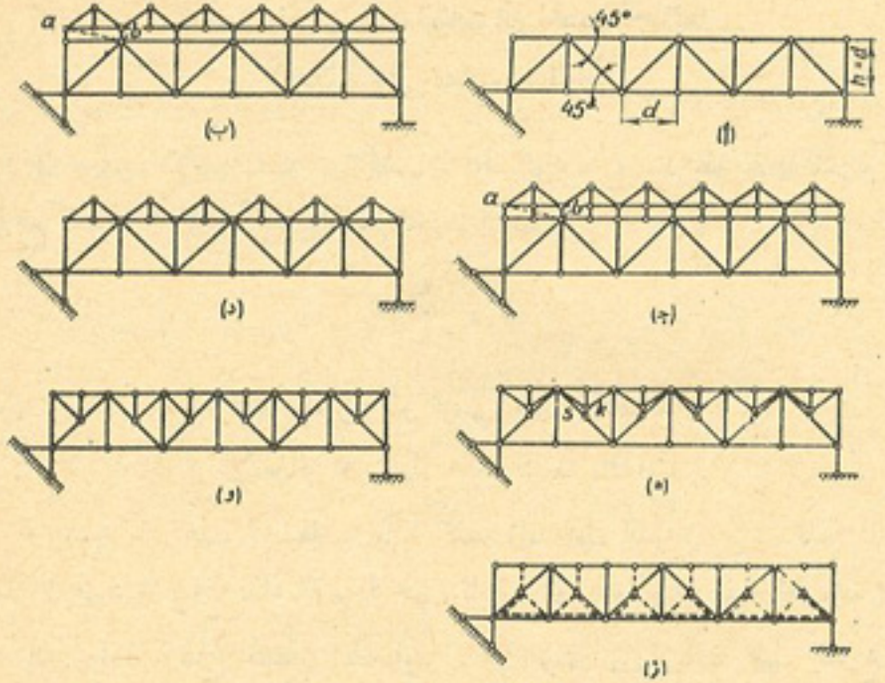
r — ذراع الإجهاد N حول هذه النقطة بالذات .

ويتضح من هذه الصيغة ، بأنه كلما زاد طول الذراع r ، كلما قلت قيمة الاجهاد N (مع بقاء القيم الاخرى ثابتة ، أى عند تشابه بقية الظروف) .

إن زيادة ارتفاع مقطع الجمالون ، تؤدى إلى زيادة طول الذراع r وتقليل الإجهادات فى قضبان الجمالون .

وحسبما تمليه ظروف التصميم ، أى لاعتبارات تصميمية ، يكون من الأسهل ترتيب الاضلاع القطرية للجمالون ، بحيث تصنع مع الاضلاع القائمة والاوتار ، زوايا ذات قيمة قريبة من ٤٥ . ولذلك نرى بأن زيادة أرتفاع الجمالون ، تؤدى إلى زيادة اطوال الأجزاء الهيكلية . وهكذا ، لمراعاة هذا الشرط ، على سبيل المثال ، يجب أن تكون الأجزاء الهيكلية للجمالون المتوازى الأوتار ، مساوية لإرتفاع الجمالون تقريباً (شكل ٤ — ٧٩ ، أ) .

أن تصميم الأجزاء الهيكلية الكبيرة ، يؤدى إلى زيادة وزن الأرضية المخصصة للسير ، التابعة لجسر الجمالون ، أى إلى زيادة وزن العتبات المستعرضة ، المحمولة على وصلات الجمالون ، وبصورة رئيسية العتبات الثانوية ، المحمولة على العتبات المستعرضة : أن الاقتصاد فى المادة ، المستخدمة فى أوتار وشبيكة الجمالون ، الذى نحصل عليه فى حالة زيادة ارتفاع الجمالون ، قد يكون أقل من المادة الإضافية المستهلكة فى أنشاء الأرضية المخصصة للسير .



الشكل ٤ – ٧٩

ويمكن حل مسألة زيادة ارتفاع مقطع الجمالون ، حلا منطقيا معقولا ، وذلك بأن تضاف إلى كل جزء هيكلى من الأجزاء الهيكلية ، فى هذه الحالة ، جمالونات صغيرة ذات مسندين – عتبات جمالونية صغيرة (شكل ٤ – ٧٩ ، ب) ، محمولة أو مستندة على وصلات الجمالون الرئيسى وأن قضبان هذه العتبات الجمالونية الصغيرة ، تكون معرضة لتأثير الأحمال الموضعية فقط ، أى لتأثير الأحمال المؤثرة ضمن أبواعها فقط . أن الحمل الرأسى الموضعى ، المؤثر على العتبة الجمالونية ، ينتقل إلى وصلات الجمالون الرئيسى ، التى تعتبر بمثابة مساند للعتبة الجمالونية . ويكون القضيب ad (المنقط فى الشكل ٤ – ٧٩ ، ب) ضرورياً ، فقط لتأمين الاستقرار الهندسى للنظام ، والإجهاد فى القضيب المذكور يساوى صفرا ، أى أن القضيب خامل .

وتساعد العتبات الجمالونية على وضع عتبات مستعرضة ، ليس فى الوصلات الرئيسية للجمالون فقط ، بل وفى الوصلات الإضافية أيضاً ، وتقلل بذلك ،

مقاطع العتبات الثانوية ، ونتيجة لذلك يخف كثيراً وزن أرضية السير التابعة للجسر . ويساعد استخدام العتبات الجمالونية ، على تجنب زيادة وزن أرضية السير ، عند زيادة طول الجزء الهيكلى والوصول إلى تقليل الإجهادات فى أوتار وشبيكة الجمالون ، عن طريق زيادة ارتفاع مقطعه .

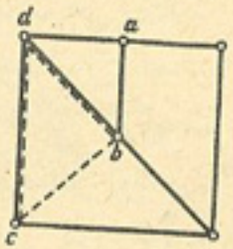
وإذا ربطنا الوصلات الإضافية السفلى للعتبة الجمالونية ، بواسطة ، العلاقات (hangers) ، مع المفصلات الموضوعة فى وسط كل قضيب من قضبان الوتر العلوى للجمالون الرئيسى ، لحصلنا على الجمالون المبين فى الشكل (٤ – ٧٩ ، ج) ، الذى يسلك تماماً نفس سلوك الجمالون الخالى من العلاقات (شكل ٤ – ٧٩ ، ب) . وإذا قمنا بعد ذلك بتقليل طول العلاقات والقضبان الساندة الرأسية (التى تستند بواسطتها العتبات الجمالونية على وصلات الجمالون الرئيسى) ، وجعلناها فى حدود مساوية للصفر ، لحصلنا على الجمالون المبين فى الشكل (٤ – ٧٩ ، د) . وفى هذا الجمالون ، تندمج أو تندغم الأوتار السفلى للعتبات الجمالونية ، مع قضبان الوتر العلوى للجمالون الرئيسى . وطبيعة سلوك هذا الجمالون ، مشابهة لطبيعة سلوك الجمالون ذى العتبات الجمالونية ، المبين فى الشكل (٤ – ٧٩ ، هـ) . أن الإجهادات ks فى علاقات الجمالون الأخير ، تساوى صفرا . ومن الناحية العملية ، يكون طول كل علاقة من هذا النوع ، مساويا للصفر ، أى تدمج الوصلة k مع الوصلة s . ونتيجة لذلك ، نحصل على الجمالون المبين فى الشكل (٤ – ٧٩ ، و) الذى يسمى بالجمالون ذى العتبات الجمالونية* .

إن العتبات الجمالونية المبينة فى الشكل (٤ – ٧٩ ، و) ، تنقل الأحمال الرأسية الموضعية ، المؤثرة على الوصلات الإضافية العليا ، إلى الوصلات العليا

* لقد صممت هذه الجمالونات لأول مرة فى عام ١٨٩٥ من قبل العالم الروسى البروفيسور بروسكورياكوف ، أستاذ معهد مهندسى السكك الحديدية فى ذلك الوقت . لأول مرة تم بموجب التصميم الذى وضعه هذا العالم ، انشاء جسر – كوبرى – على نهر (ينيسيه) . وعند تصميم هذا الجسر ، استخدم بروسكورياكوف لأول مرة ، خطوط التأثير لتحديد الاجهادات فى الجمالونات . وقد اعتبر جسر (ينيسيه) من حيث وزنه الصغير نسبيا جسوته وتصميمه المنطق ، واحدا من أحسن التصاميم الواقعية لتغطية الأبواع الواسعة . وقد جلب هذا التصميم للأستاذ بروسكورياكوف شهرة ذائعة الصيت .

للجمالون الرئيسى ، بصورة عمودية . وسوف نصطلح على تسمية مثل هذه ، العتبات الجمالونية بالعتبات الجمالونية ذات الطبقة الواحدة . وتستخدم كذلك عتبات جمالونية (عوارض جمالونية) ، تنقل الاحمال الموضعية المؤثرة على الوصلات العليا ، إلى الوصلات السفلى للجمالون الرئيسى (شكل ٤ — ٧٩ ، ز) ، أو تنقل الأحمال المؤثرة على الوصلات الإضافية للوتر السفلى ، إلى الوصلات العليا للجمالون الرئيسى . وسوف نصطلح على تسمية هذه العتبات الجمالونية بالعتبات الجمالونية ذات الطبقتين .

وسوف نسمى كل جمالون إضافى بسيط ، يستند على وصلات الجمالون الرئيسى (على وصلتين) وينقل الأحمال الرأسية الموضعية المؤثرة عليه إلى وصلات الجمالون الرئيسى بصورة عمودية ، بالعتبة (العارضة) الجمالونية . ولا يجوز اعتبار النظام a b c d (شكل ٤—٨٠) بمثابة عتبة جمالونية ، وذلك لأنه بالرغم من استناده على وصلات الجمالون الرئيسى ، فإنه ينقل إليها ، بالإضافة إلى الأحمال (الضغوط) الرأسية ، الإجهادات والقوى الافقية ايضاً .



الشكل ٤ — ٨٠

إن قطع (أجزاء) الجمالونات ، التى تدخل فى تركيبها العتبات الجمالونية ذات الطابق الواحد ، يمكن أن تقسم إلى الأصناف الثلاثة التالية :

١ — القطع التى تعود إلى الجمالون الرئيسى فقط . وتحدد الإجهادات فى هذه القطع (القضبان) بحساب الجمالون الرئيسى ، وهذه الإجهادات لا تتغير عند إضافة عتبات جمالونية إلى الجمالون الرئيسى .

٢ — القطع (القضبان) التى تعود إلى الجمالونات الإضافية . (العتبات الجمالونية) فقط . ويمكن تحديد الاجهادات الناشئة فيها ، من شروط ، التوازن ، الموضوعة للأجزاء أو الأقسام المنفردة من العتبة الجمالونية ، التى يمكن اعتبارها فى هذه الحالة ، بمثابة جمالون مستقل ذى مسندين (جمالون بسيط) .

٣ — القطع (القضبان) التى تعود فى نفس الوقت إلى كل من الجمالون الرئيسى والعتبة الجمالونية (أى القطع المشتركة بينهما) . أن الإجهاد فى كل

منهما ، يساوى مجموع إجهادين ، ينشأ أحدهما فى قطعة (قضيب) الجمالون الرئيسى ، والآخر فى قضيب العتبة الجمالونية ، المندمج مع القضيب السابق .

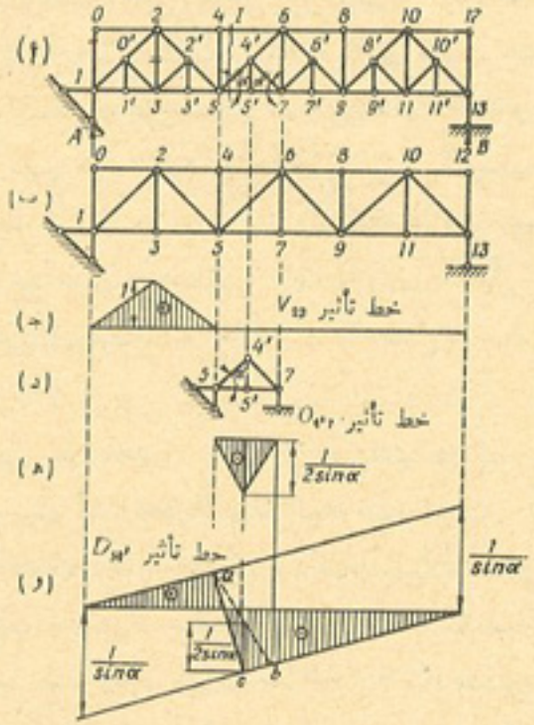
إن قطع الجمالونات ، التى تدخل فى تركيبها العتبات الجمالونية ذات الطبقتين ، تقسم إلى أربعة أصناف : الثلاثة الأولى منها ، مشابهة لما هى عليه بالنسبة للجمالونات المحتوية على عتبات جمالونية ذات طبقة واحدة ، أما قطع الصنف الرابع ، فهى قطع الجمالون الرئيسى (من الصنف الأول) ، التى تكون أشكال خطوط تأثيرها متنوعة ، عندما تكون الأرضية فى الأعلى والأرضية فى الاسفل . أن وجود عتبات جمالونية ذات طبقتين ، تنقل الأحمال الموضعية من الوصلات السفلى إلى الوصلات العليا (أو بالعكس) ، يغير ظروف سلوك هذه القطع (القضبان) .

ويمكن الحصول على خطوط تأثير الإجهادات فى قطع الصنف الرابع ، بالطريقة التالية : يرسم أولا خط تأثير الإجهاد الذى نبحثه ، بالنسبة للجمالون الرئيسى (بدون أخذ العتبات الجمالونية فى الاعتبار) عند حركة الأحمال على الوصلات العليا للجمالون ، ثم عند حركتها على الوصلات السفلى . ويجب وضع قانون تغير الإجهاد عند وجود عتبات جمالونية ذات طبقتين ، فى الجمالون الرئيسى . ولهذا الغرض ، يجب تحريك الحمل على وصلات الجمالون ذى العتبات الجمالونية ، ونعتبر بأن الحمل الموضوع فى الوصلات الإضافية ، بمساعدة العتبات الجمالونية ، ينتقل من وصلات أحد أوتار الجمالون (مثل الوتر السفلى) إلى وصلات الوتر الآخر (مثل الوتر العلوى) .

مثال ١ : يطلب رسم خطوط التأثير للقضبان (القطع) المرقمة 3 — 2 و 4′ — 5 7 — 4′ من الجمالون الذى يحتوى على عتبات جمالونية ذات طبقة واحدة (شكل ٤ — ٨١ ، أ) ، مع العلم بأن ارضية الجمالون تقع فى الأسفل (أى أن الأحمال تؤثر فى الوتر السفلى) .

الحل : نبدأ برسم خط تأثير الاجهاد V_{23} . أن القضيب 3 — 2 ، هو قطعة من الصنف الأول ، ولذلك عند رسم خط التأثير ، يمكن اهمال العتبات الجمالونية ، وبذلك نحول المسألة إلى مسألة رسم خط تأثير الإجهاد V_{23} فى الجمالون الرئيسى (شكل ٤ — ٨١ ، ب) . وبعد أن نقطع منه الوصلة 3 ، نبحث شرط توازنها نجد بأن شكل خط تأثير الإجهاد V_{23} يكون على هيئة المثلث المبين فى الشكل (٤ — ٨١ ، ج) . وعند رسم خط تأثير الإجهاد $D_{4'7}$

(يعتبر القضيب 4'7 احد قطع الصنف الثانى) ، تفصل العتبة الجمالونية 7 — 4' — 5 عن الجمالون الرئيسى بأكمله ، وتبحث شرط توازنها ، باعتبارها جمالونا مستقلا بسيطاً (بمسندين) كما مبين فى الشكل (٤ — ٨١ ، د) .



الشكل ٤ — ٨١

عندما يكون الحمل $P = 1$ واقعاً فى الوصلة 5' ، يحدد الإجهاد فى القضيب 7 — 4' ، من المعادلة الموضوعة للوصلة 7 :

$$\Sigma Y = \frac{1}{2} + D_{4'7} \sin \alpha = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$D_{4'7} = - \frac{1}{2\sin\alpha}$$

وعندما يكون الحمل واقعاً فى وصلات المساند ، نجد بأن الإجهاد $D_{4'7}$ يساوى صفراً أن القيم التى حصلنا عليها ، كافية لرسم خط تأثير الإجهاد $D_{4'7}$ (شكل ٤ — ٨١ ، هـ) .

ولتحديد الإجهاد فى القضيب 4' — 5 نستحدث المقطع $I - I$ (يعتبر القضيب 4' — 5

من قطع الصنف الثالث) ، وبعد أن نفترض بأن الحمل $P = 1$ يقع فى القسم الموجود بين الوصلتين 5' و 13 ، تأتى إلى بحث شرط توازن القسم الأيسر من الجمالون :

$$\Sigma Y = A + D_{54'} \sin\alpha = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$D_{54'} = - \frac{A}{\sin \alpha}$$

وتشير المعادلة التى حصلنا عليها ، إلى أنه ما دام الحمل واقعاً فى القسم المذكور ، يمكن الحصول على خط تأثير الإجهاد $D_{54'}$ من خط تأثير رد الفعل A ، بضرب احداثياته الرأسية فى المقدار $\left(- \frac{1}{\sin \alpha}\right)$. وهذا الظرف ، يساعد على رسم المستقيم الايمن لخط تأثير الاجهاد $D_{54'}$ بسهولة (شكل ٤ — ٨١ ، و) .

ونرسم المستقيم الأيسر بالاستفادة من وضعية مروره فى نقطة الصفر الواقعة عند المسند الأيسر ، وتقاطعه مع المستقيم الايمن ، تحت نقطة العزم التى تقع فى هذه الحالة ، فى اللانهاية . ونحصل على مستقيم النقل ، بوصل قمم الاحداثيات الرأسية لخط التأثير ، الواقعة تحت الوصلتين 5 و 5' (شكل ٤ — ٨١ ، و) . ومن المهم أن نشير إلى أنه لولا وجود العتبات الجمالونية ، لكان مستقيم النقل سيوصل الأحداثيات الرأسية الواقعة تحت الوصلتين 5 و 7 ، ونتيجة لذلك ، كان سيختفى المثلث $a\ b\ c$ ، الذى يمثل خط تأثير الإجهاد فى القضيب 4' — 5 ، التابع للعتبة الجمالونية (المماثل تماما لخط التأثير الموضح فى الشكل ٤ — ٨١ ، هـ ، المرسوم للقضيب 7 — 4') .

مثال ٢ : يطلب رسم خط التأثير للضلع القائم 4 — 3 (من قطع الصنف الرابع) من الجمالون الذى يحتوى على عتبات جمالونية ذات طبقتين (شكل ٤ — ٨٢ ، أ) ، مع العلم بأن الأحمال تتحرك على الوتر السفلى للجمالون .

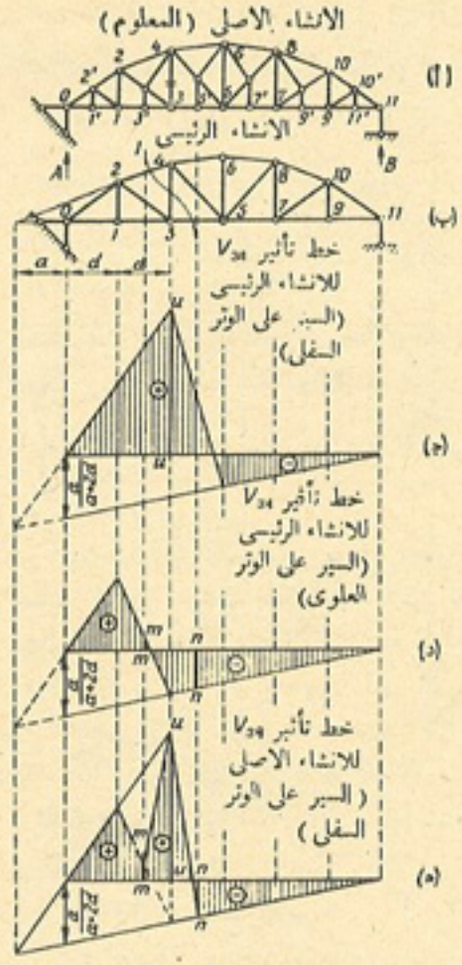
الحل : بعد أن نهمل العتبات الجمالونية ، نحصل على الجمالون الرئيسى أو الأصل ، المبين فى الشكل (٤ — ٨٢ ، ب) . نرسم لهذا الجمالون ، خطوط تأثير الإجهاد فى الضلع القائم 4 — 3 ، عند حركة الأحمال على الوترين العلوى والسفلى .

نستحدث المقطع $I - I$ فى الجمالون (شكل ٤ — ٨٢ ، ب) . وبعد أن نفرض بأن الحمل $P = 1$ يقع فى القسم الأيمن من الجمالون ، نضع معادلة توازن القسم الأيسر :

$$\Sigma M_k = - Aa - V_{34} (a + 2d) = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$V_{34} = - \frac{Aa}{a + 2d}$$



الشكل ٤ — ٨٢

وبعد أن نضع إلى أسفل العمود المار فى المسند الأيسر ، قيمة الأحداثى الرأسى $\frac{a}{a+2d}$ ونوصل قمته مع نقطة الصفر الواقعة على المسند الأيمن ، نحصل على المستقيم الأيمن لخط التأثير ، الذى تنتقل إليه الوصلات 5 ، 7 ، 9 ، 11 (عند حركة الحمل على الوتر السفلى) أو الوصلات 4 ، 6 ، 8 ، 10 و 11 (عند حركة الحمل على الوتر العلوى) . ونرسم المستقيم الأيسر ، بالإستفادة من الوضعية المعروفة التى تقضى بوجوب تقاطع هذا المستقيم ، مع المستقيم الأيمن تحت نقطة العزم (النقطة k) . وبعد ذلك نرسم مستقيم النقل .

إن خطوط تأثير الإجهاد V_{34} المرسومة بهذه الطريقة ، للجمالون الرئيسى ، عند حركة الأحمال على الوترين السفلى والعلوى مبينة فى الشكل (٤ — ٨٢ ج ، د) . ويتضح من خطوط التأثير هذه ، بأنه طالما كان الحمل واقعاً إلى يسار الوصلة 1 أو إلى يمين الوصلة 5 ، لا تعتمد قيمة

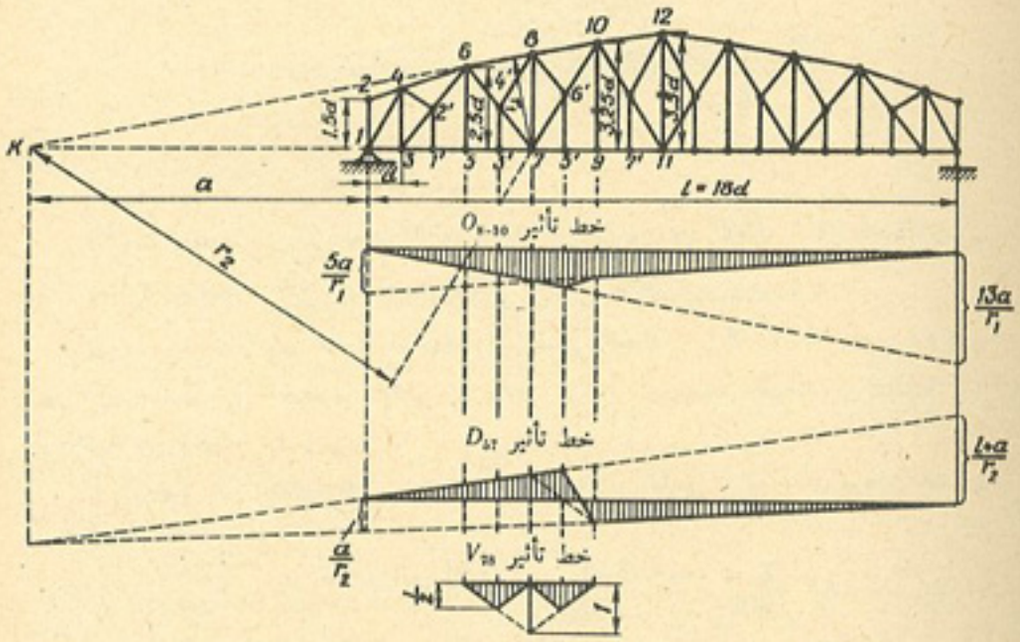
الإجهاد على موضع وصلات الجمالون الرئيسى (السفلى والعليا) ، التى تنتقل إليها الاحمال .

إن الحمل الموجود فى الوصلتين 3′ و 5′ ، ينتقل بواسطة العتبات الجمالونية (ذات الطبقتين) إلى الوصلات العليا للجمالون ، وبالتالى يبدو فى هذه اللحظة ، وكأن الحمل يتحرك على الوتر العلوى . ولهذا السبب ، تقاس الأحداثيات الرأسية لخط تأثير الإجهاد V_{34} ، للجمالون الأصلى المعلوم (شكل ٤ — ٨٢ ، أ) فى هذه الحالة ، بالقطعتين (المستقيمين) $m — m$ و $n — n$ (شكل ٤ — ٨٢ ، د) .

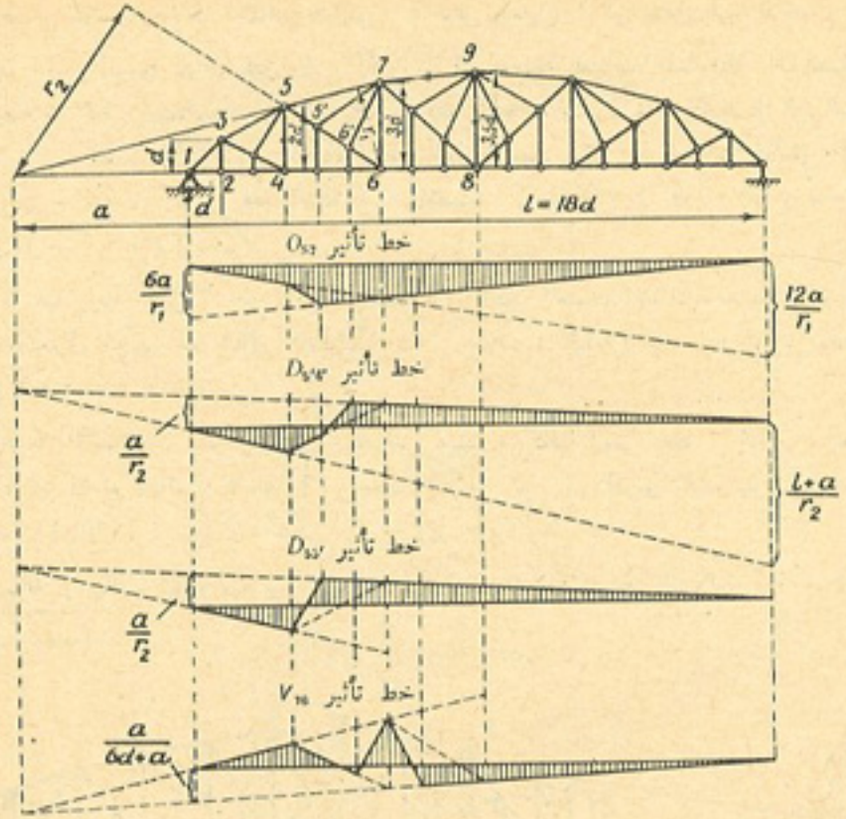
أما عند وجود الحمل $P = 1$ فى الوصلة 3 ، تكون العتبات الجمالونية خاملة ، وبالتالى يكون الأحداثى الرأسى لخط التأثير المطلوب ، ممثلا بالمستقيم (القطعة) $u — u$ كما ، موضح فى الشكل (٤ — ٨٢ ، ج) .

وهذه الأحداثيات الرأسية التى حصلنا عليها ، كافية لرسم خط التأثير المطلوب للاجهاد فى الضلع القائم 4 — 3 . وخط التأثير هذا ، المرسوم للجمالون المعطى (ذى العتبات الجمالونية) ، مبين فى الشكل (٤ — ٨٢ ، هـ) .

مسألة : يطلب القيام بما يلى ، بالنسبة للجمالونين المبينين فى الشكلين (٤ — ٨٣) و (٤ — ٨٤) :



الشكل ٤ — ٨٣



الشكل ٤ – ٨٤

(أ) مراجعة صحة رسم خطوط التأثير (عند حركة الحمل على الأوتار السفلى للجمالونين).

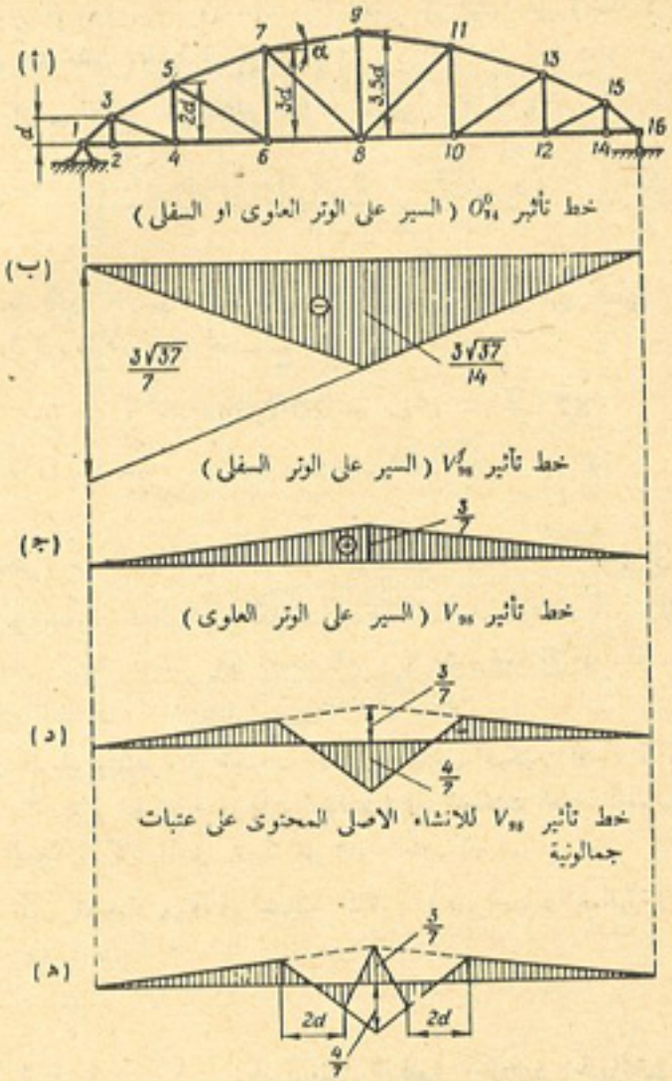
(ب) رسم خطوط التأثير، للقضبان المؤشرة بعلامات شارحة.

تنويه: عند رسم خط تأثير الإجهاد فى الضلع القائم 9 — 8 (شكل ٤ – ٨٤)، يجب اولا الحصول على الجمالون الرئيسى، وذلك بإهمال أو إبعاد العتبات الجمالونية. (شكل ٤ – ٨٥، أ).

أن الإجهاد فى القضيب 9 — 8، العائد للجمالون الرئيسى، يحدد من شرط (معادلة) توازن الوصلة 9:

$$\Sigma Y = -V^{f}_{89} - 2O^{f}_{79}\sin\alpha = 0$$
$$V^{0}_{89} = -2O^{0}_{79}\sin\alpha$$

إذن الاجهاد فى القضيب 9 — 8، يساوى الإجهاد فى القضيب 9 — 7 مضروباً فى معامل ثابت يساوى (— 2sinα). ويدل الرمز الدليل العلوى "f" على أن الإجهاد الذى نبحثه، هو الإجهاد الناشىء فى قضيب الجمالون الرئيسى.



الشكل ٤ – ٨٥

إن خط تأثير الإجهاد O^{f}_{79} فى قضيب الوتر العلوى 9 — 7، موضح فى الشكل (٤ – ٨٥، ب). وله شكل مثلث متساوى الساقين، بأحداثى سالب، عند القمة:

$$\frac{l}{4\times 3.5d\cos\alpha} = -\frac{18}{4\times 3.5}\times\frac{\sqrt{3^2+0.5^2}}{3} = -\frac{3\sqrt{37}}{14}$$

أن خط تأثير الإجهاد V^f_{89} فى حالة حركة الحمل على الوتر السفلى (شكل ٤ — ٨٥ ، جـ) يكون كذلك على هيئة مثلث متساوى الساقين .

والأحداثى الرأسى الأكبر لخط التأثير هذا ، يساوى :

$$\frac{3\sqrt{37}}{14} \times \frac{2 \times 1}{\sqrt{37}} = \frac{3}{7}$$

ولرسم خط تأثير الإجهاد V^f_{89} ، عند حركة الحمل على الوتر العلوى ، يجب ثانية بحث شرط توازن الوصلة 9 ، بعد أن يوضع عليها الحمل $P = 1$:

$$\Sigma Y = - V^f_{89} - 2O^f_{79}\sin\alpha - 1 = 0$$

$$V^f_{89} = - 2O^f_{79}\sin\alpha - 1 = \frac{3}{7} - 1 = - \frac{4}{7}$$

ويبين الشكل (٤ — ٨٥ ، د) خط تأثير الإجهاد V^f_{89} عند حركة الحمل على الوتر العلوى .

ويتضح من خطوط التأثير (شكل ٤ — ٨٥ ، جـ ، د) ، بأنه طالما كان الحمل موجوداً إلى يسار الوصلة 6 أو يمين الوصلة 10 ، لا تعتمد قيمة الإجهاد على موضع وصلات الجمالون الرئيسى (السفلى أو العليا) التى ينتقل اليها الحمل .

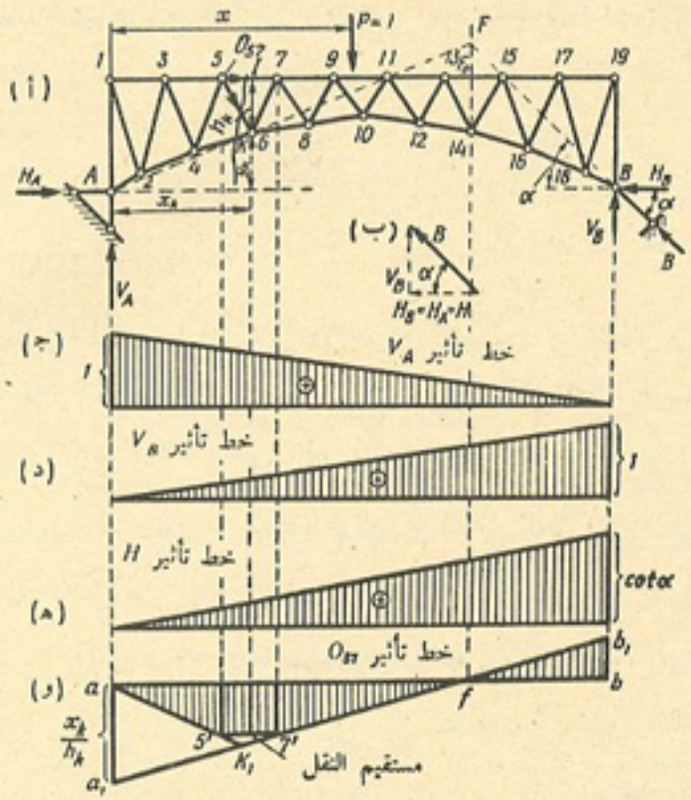
إن الحمل الموجود (المؤثر) فى الوصلات الإضافية للجزئين الهيكليين 8 — 6 و 10 — 8، ينتقل بواسطة العتبات الجمالونية (ذات الطبقتين) إلى الوصلات العليا للجمالون ، وبالتالى يبدو فى هذه اللحظة ، وكأن الحمل يتحرك على الوتر العلوى للجمالون .

إن خط تأثير الإجهاد V_{89} فى الجمالون المذكور (ذى العتبات الجمالونية) ، موضح فى الشكل (٤ — ٨٥ ، هـ) .

البند ٤ — ١٠ : الجمالونات الدفعية (العقود الجمالونية)

١ — الجمالونات العتبية ذات القضبان الساندة المائلة

إذا وضعنا القضيب الرأسى للمسند المفصلى المتحرك ، للجمالون العتبى العادى ، بصورة مائلة ، فسوف يتحول الجمالون (النظام) إلى جمالون دفعى ، وذلك لأنه عند تأثير الحمل الرأسى ، سوف لا تنشأ فى مسانده ردود فعل رأسية فقط ، بل وتنشأ ردود فعل أفقية أيضاً .



الشكل ٤ — ٨٦

لنبحث الجمالون (النظام) الدفعى المبين فى الشكل (٤ — ٨٦ ، أ) . نرسم خطوط تأثير ردود فعل مسانده . ونرمز إلى رد فعل المسند الأيمن المائل وإلى مركبتيه الأفقية والعمودية ، بالرموز B ، H_B ، V_B على التوالى (شكل ٤ — ٨٦ ، ب) . ونرمز إلى ردى فعل المسند الأيسر بالرمزين V_A و H_A .

نرمز إلى المسافة المتغيرة من الحمل الرأسى $P = 1$ ، إلى المسند الأيسر بالرمز x . ومن المعادلة المعبرة عن مساواة مجموع مساقط كافة القوى الخارجية على المحور الأفقى ، للصفر ، ينتج ما يلى :

$$H_A = H_B = H$$

ومن معادلات عزوم القوى الخارجية ، حول المفصلتين A و B ، نجد ما يلى :

$$V_A = \frac{l - x}{l}$$

و

$$V_B = \frac{x}{l}$$

إن الرسمين البيانيين للمعادلتين الأخيرتين ، المبينين فى الشكل (٤ — ٨٦ ، ج ، د) ينطبقان تماماً مع خطى تأثير ردى الفعل A ، B للعتبة البسيطة المحمولة على مسندين . وهما يمثلان خطى تأثير ردى الفعل V_A ، V_B .

ولرسم خط تأثير H ، نستخدم العلاقة التالية بين H و V_B (شكل ٤ — ٨٦ ، ب) :

$$H = V_B \cot\alpha$$

إذن يمكن الحصول على خط تأثير H ، من خط تأثير V_B ، بضرب جميع احداثياته الرأسية فى المعامل الثابت $\cot\alpha$. ويبين الشكل (٤—٨٦ ، هـ) خط تأثير H .

والآن نرسم خط تأثير الإجهاد لأحد قضبان الجمالون ، كالقضيب 7 — 5 مثلا . ولهذا الغرض نستحدث المقطع $I - I$ ، وبعد أن نفرض بأن الحمل $P = 1$ يقع على القسم الأيمن من الجمالون (الوصلات 7 — 9 — 11 — 13 — 15 — 17 — 19) ، نقوم ببحث شرط توازن القسم الأيسر للجمالون :

إن عزم القوى اليسرى حول نقطة العزم k (المنطبقة على الوصلة 6) يساوى ما يلى :

$$\Sigma M_k = V_A x_k - Hy_k + O_{57} h_k = 0$$

ومنها ينتج أن :

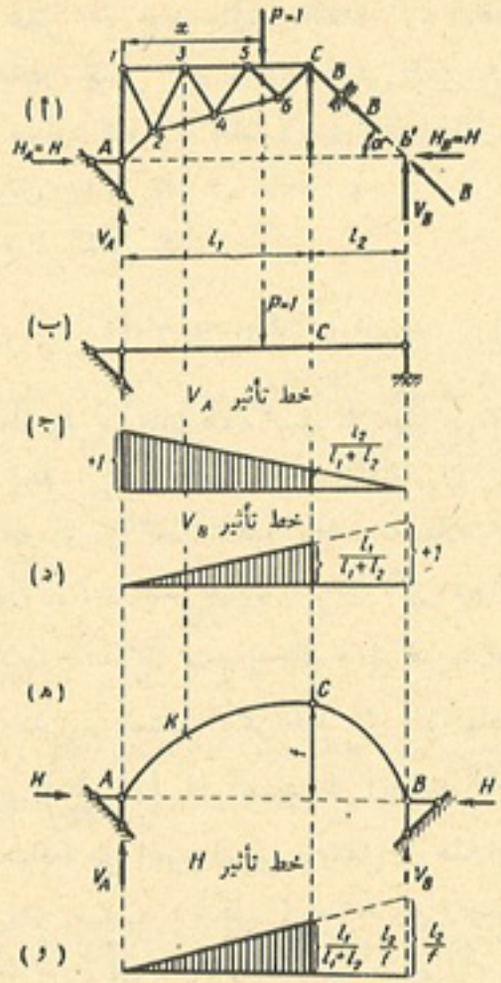
$$O_{57} = -\frac{1}{h_k}(V_A x_k - Hy_k) = -\frac{1}{h_k}(M^0_k - Hy_k)$$

وعندما يكون الحمل $P = 1$ ، مؤثراً فى النقطة F_0 ، الواقعة على نفس العمود التى تقع عليه نقطة تقاطع إتجاهى AK و BF ، وهى نقطة F ، يكون الإجهاد فى القضيب 7 — 5 مساوياً للصفر ، وذلك لأنه فى هذه الحالة ، يمر رد فعل المسند الأيسر (محصلة القوتين V_A و H_A) فى النقطة k ، وتأخذ معادلة عزوم القوى اليسرى حول نقطة k ، الشكل التالى :

$$\Sigma M_k = O_{57} h_k = 0$$

إذن تصبح النقطة F_0 ، بمثابة نقطة الصفر للاجهاد O_{57} . وأن الصيغة التى حصلنا عليها وهى $M^0_k - Hy_k$ ، الداخلة فى معادلة O_{57} بمثابة عامل ضرب ، تساوى العزم فى المقطع k من العقد المتصل بثلاث مفصلات . ولهذا السبب ، يتم رسم خط تأثير الإجهاد O_{57} ، بنفس طريقة رسم خط تأثير عزم الإنحناء فى المقطع k ، من العقد المتصل بثلاث مفصلات ، مع إدخال عامل ضرب إضافى هو $\left(-\frac{1}{h_k}\right)$. وبناء على ذلك ، عند رسم المستقيم الأيمن لخط تأثير الإجهاد O_{57} ، يجب وضع قيمة الأحداثى الرأسى $\left(-\frac{x_k}{h_k}\right)$ على العمود المار فى المسند الأيسر ، ثم توصل قمته مع نقطة الصفر f الواقعة على المحور السينى . وتنقل إلى هذا المستقيم الأيمن المرسوم بهذه الطريقة ، وهو $a_1 f b_1$ (شكل ٤ — ٨٦ ، و) جميع الوصلات اليمنى للجمالون (الوصلات من 7 إلى 19) . وعند رسم المستقيم الأيسر ، يمكن الإستفادة من الوضعية المعروفة التى تجعله يمر فى نقطة الصفر ، المناظرة للمسند الأيسر ، ويتقاطع مع المستقيم الأيمن تحت نقطة العزم . وتنقل إلى المستقيم المرسوم بهذه الطريقة ، وهو المستقيم aK_1 ، جميع الوصلات اليسرى للجمالون (الوصلات من 1 إلى 5) . إن مستقيم النقل $7' - 5'$ ، يوصل الأحداثيات الرأسية للوصلات . فى خط تأثير الجزء الهيكلى المقطوع (لاحظ الشكل ٤ — ٨٦ ، و) .

ونأتى الآن إلى بحث الجمالون الدفعى المبين فى الشكل ٤ — ٨٧ ، أ) ، الذى يقع مسنداه فى مستويين مختلفين . نرسم خطوط تأثير ردود فعل مسانده . نمد خط تأثير رد فعل المسند المائل B ، إلى الأسفل ، ثم نحلله إلى مركبتين هما V_B و H_B ،



الشكل ٤ — ٨٧

فى النقطة b' الواقعة فى نفس المستوى الذى تقع فيه مفصلة المسند الأيسر . وكما هى العادة المتبعة ، نرمز إلى مركبتى رد فعل المسند الأيسر ، بالرمزين V_A و H_A . ولرسم خطى تأثير V_A و V_B* ، نضع الحمل $P = 1$ على مسافة x من المسند

* إن خط تأثير V_B ضرورى لتحديد رد فعل B (عند أى وضع من أوضاع الحمل الرأسى) ، ولهذا الغرض يجب فقط استخدام العلاقة التالية ، وهى : $B = \frac{V_B}{\sin\alpha}$. ويمكن إيجاد رد الفعل B أيضاً ، بإستخدام خط تأثير H_B ، ويجب فى هذه الحالة استخدام العلاقة التالية $B = \frac{H_B}{\cos\alpha}$

الأيسر ، ونضع معادلة عزوم القوى ، أولا حول النقطة b' ، ثم حول المفصلة A :

$$\Sigma M_{b'} = V_A (l_1 + l_2) - 1 (l_1 + l_2 - x) = 0$$
$$\Sigma M_A = - V_B (l_1 + l_2) + 1 \times x = 0$$

ومنهما ينتج بأن :

$$V_A = \frac{l_1 + l_2 - x}{l_1 + l_2}$$
$$V_B = \frac{x}{l_1 + l_2}$$

إن الرسمين البيانيين لهاتين المعادلتين ، المبينين فى الشكل (٤ — ٨٧ ، ج ، د) ، يدلان على أن V_A و V_B يتغيران عند حركة الحمل $P = 1$ ، كما يتغير ردا الفعل A و B عند مسندى العتبة البسيطة ، التى باعها يساوى $l = l_1 + l_2$ (شكل ٤ — ٨٧ ، ب) .

ومن معادلة مساقط كافة القوى على المحور الأفقى ، ينتج ما يلى :

$$H_A = H_B = H$$

ومن المعادلة المعبرة عن مجموع عزوم القوى ، المؤثرة فى النقطة b' (لاحظ الشكل ٤ — ٨٧ ، أ) حول المفصلة C ، نستخرج العلاقة بين H و V_B :

$$\Sigma M_C = - V_B l_2 + Hf = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$H = \frac{V_B l_2}{f}$$

حيث يحدد المقدار $V_B l_2$ قيمة عزم الإنحناء فى المقطع C من العتبة البسيطة ذات المسندين ، التى باعها يساوى $l = l_1 + l_2$ (شكل ٤ — ٨٧ ، ب) عندما يكون الحمل $P = 1$ واقعاً إلى يسار المقطع C ، أى فى القسم l_1 .

إذن يمكن الحصول على صيغة للمقدار H ، تكون على الشكل التالى :

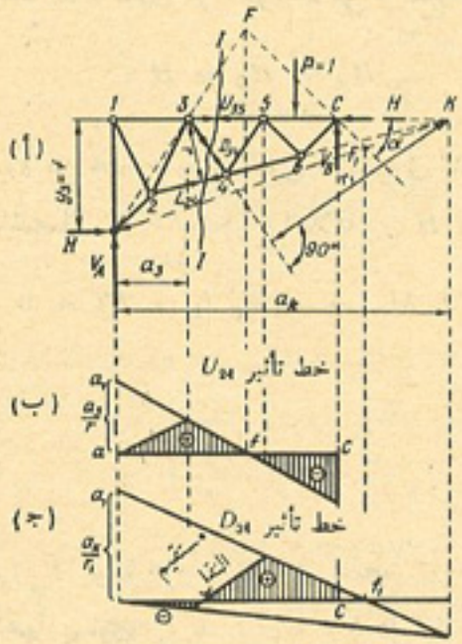
$$H = \frac{M^0_C}{f}$$

وهذا ما ينطبق تماماً مع صيغة القوة الدفعية . للعقد المتصل بثلاث مفصلات ، الذى باعه يساوى $l = l_1 + l_2$ ، وسهم إنحنائه يساوى f (شكل ٤ — ٨٧ ، هـ) .

إن خط تأثير H (شكل ٤ — ٨٧ ، و) الذى حصلنا عليه بضرب جميع الأحداثيات الرأسية لخط تأثير V_B ، فى المعامل $\frac{l_2}{f}$ ، يناظر المستقيم الأيسر لخط تأثير القوة الدفعية H ، للعقد المبين فى الشكل (٤ — ٨٧ ، هـ) :

ونرسم الآن خط تأثير الإجهاد فى القضيب 4—2 من نفس الجمالون السابق : نستحدث المقطع $I - I$ (شكل ٤ — ٨٨ ، أ) ونبحث شرط توازن القسم الأيسر من الجمالون ، بفرض أن الحمل $P = 1$ ، يقع إلى يمين المقطع المذكور :

$$\Sigma M_3 = V_A\, a_3 - Hy_3 - U_{24} r = 0$$



الشكل ٤ — ٨٨

ومنها ينتج أن :

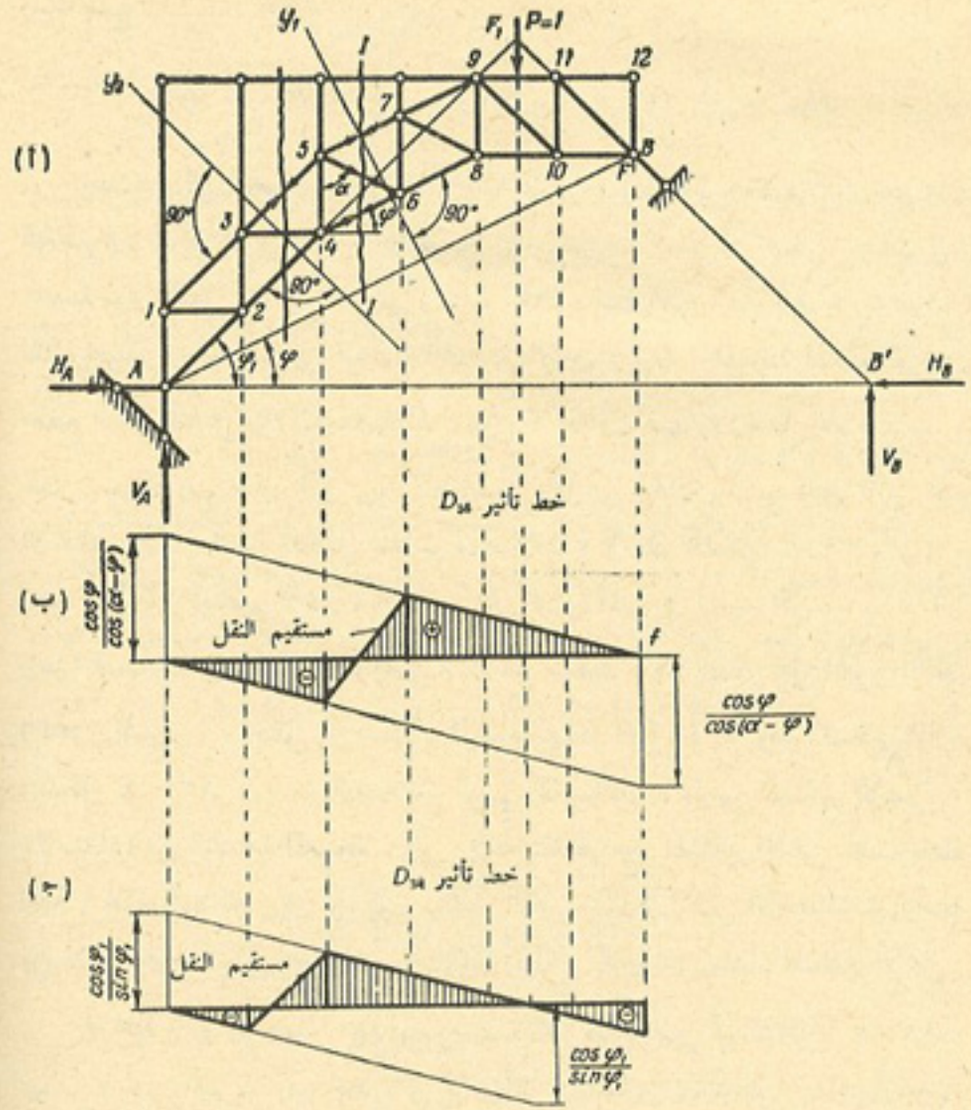
$$U_{24} = \frac{1}{r}\,(V_A\, a_3 - Hy_3) = \frac{1}{r}\,(M^0_3 - \bar{H}y_3)$$

وعندما يكون الحمل $P = 1$ مؤثراً فى النقطة الواقعة على نفس العمود الذى تقع عليه النقطة F (شكل ٤ — ٨٨ ، أ) يصبح الإجهاد U_{24} مساوياً للصفر . وذلك لأن محصلة ردى الفعل H_A و V_A ، تمر فى هذه الحالة بنقطة العزم 3 . وبعد تحديد موضع نقطة الصفر والحصول على المعادلة الخاصة بالإجهاد U_{24} ، المماثلة لمعادلة العزم فى مقطع العقد المتصل بثلاث مفصلات ، والتى لا تختلف عنها إلا بعامل الضرب $\frac{1}{r}$ ، يمكن بسهولة رسم خط تأثير U_{24} المطلوب . وكما هى الحالة بالنسبة لخط تأثير عزم الإنحناء M_k فى العقد المتصل بثلاث مفصلات (لاحظ الشكل ٣—٣٢ ، و) ، يجب عند رسم المستقيم الأيمن ، أن نضع على العمود المار فى المسند الأيسر ، احداثيا رأسيًا قيمته تساوى $\frac{a_3}{r}$ ، ونوصل قمته مع مسقط نقطة الصفر على المحور الأفقى (المحور السينى) ، وننقل إلى المستقيم المرسوم بهذه الطريقة ، وهو المستقيم $a_1 f$ (شكل ٤ — ٨٨ ، ب) الوصلات اليمنى للجمالون . ونرسم المستقيم الأيسر ، بالإستفادة من الوضعية المعروفة ، التى تجعله يتقاطع مع المستقيم الإيمن تحت نقطة العزم (تحت الوصلة 3) . ويكون مستقيم النقل ، الذى يصل الأحداثيات الرأسية لوصلات الجزء الهيكلى المقطوع ، فى هذه الحالة ، عبارة عن إمتداد المستقيم الإيمن .

إن خط تأثير الإجهاد U_{24} المرسوم بهذه الطريقة ، مبين فى الشكل (٤— ٨٨ ، ب) . وبنفس الطريقة رسم خط تأثير الإجهاد D_{34} ، المبين فى الشكل (٤—٨٨ ، جـ).

وعند تحديد الإجهادات الناشئة فى شبيكة الجمالون الدفعى ، ذى الأوتار المتوازية ، يجب إستخدام معادلة مساقط القوى على المستقيم العمودى على إتجاه الأوتار المتقاطعة (القضبان المتقاطعة) . إن إستخدام معادلة عزوم القوى حول نقطة العزم ، غير ممكن فى هذه الحالة ، وذلك لأن النقطة الأخيرة تقع فى اللانهاية .

نرسم على سبيل المثال ، خط تأثير الإجهاد D_{56} للجمالون المبين فى الشكل (٤ — ٨٩ ، أ) . نستحدث المقطع $I - I$ ، الذى يقطع القضيب الأفقى والقضبان



الشكل ٤ — ٨٩

7 — 5 ، 6 — 5 ، 6 — 4 ، وبعد أن نفرض بأن الحمل $P = 1$ يقع إلى يمين هذا المقطع ، نبحث شرط توازن القسم الأيسر المقطوع من الجمالون* .

* إن الإجهاد فى القضيب الأفقى المقطوع ، عند تعرض الجمالون لتأثير الحمل الرأسى ، يساوى صفرا .

إن معادلة مجموع مساقط القوى اليسرى ، على المستقيم y_1 ، العمودى على إتجاهى القضيبين 7 — 5 و 6 — 4 ، نكون على الشكل التالى* :

$$\Sigma Y_1 = V_A \cos\phi - H \sin\phi - D_{56} \cos(\alpha - \phi) = 0$$

حيث ϕ — زاوية ميل القضيبين 7 — 5 و 6 — 4 مع الأفق ،

α — زاوية ميل الضلع القطرى 6 — 5 مع المستقيم العمودى .

ونحصل من هذه المعادلة على ما يلى :

$$D_{56} = \frac{1}{\cos(\alpha - \phi)} (V_A \cos\phi - H \sin\phi)$$

أو

$$D_{56} = \frac{1}{\cos(\alpha - \phi)} (Q^0_k \cos\phi - H \sin\phi)$$

حيث Q^0_k — تمثل قوة القص فى العتبة البسيطة .

إن الصيغة $Q^0_k \cos\phi - H\sin\phi$ مطابقة تماماً لصيغة قوة القص Q_k فى المقطع k من العقد المتصل بثلاث مفصلات . ولهذا السبب ، يرسم المستقيم الأيمن لخط تأثير الإجهاد D_{56} ، بطريقة مماثلة لرسم خط تأثير قوة القص فى مقطع العقد المتصل بثلاث مفصلات (شكل ٣ — ٣٣ . د) . نضع قيمة الأحداثى الرأسى $\frac{\cos\phi}{\cos(\alpha - \phi)}$ على العمود المار فى المسند الأيسر ، ونوصل قمته بنقطة الصفر f ، التى تعتبر بمثابة مسقط النقطة F (لاحظ الشكل ٤ — ٨٩ . أ) ، التى يلتقى فيها الاتجاهان $b'B$ و AF** ، على المحور السينى . ويكون المستقيم الأيسر ، موازيا الأيمن ، وذلك لأن نقطة العزم تقع فى اللانهاية .

إن خط تأثير الإجهاد D_{56} ، المرسوم لهذه الطريقة ، مبين فى الشكل

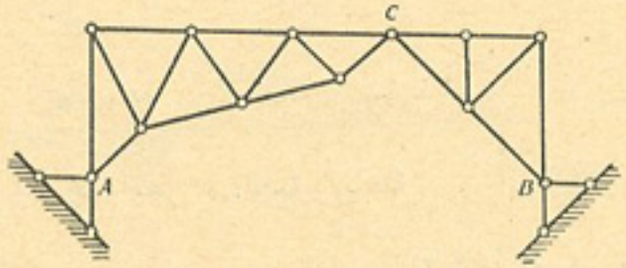
* نعتبر بأن : $H_A = H_B = H$.

** فى هذه الحالة بالذات ، انطبقت نقطة الصفر F مع النقطة B (إن المستقيم AF يوازى القضيبين 7 — 5 و 6 — 4)

(٤ – ٨٩ ، ب) . وقد رسم خط تأثير الإجهاد D_{31} . بنفس الطريقة السابقة (شكل ٤ – ٨٩ ، ج) .

٢ – العقود الجمالونية المتصلة بثلاث مفصلات

إذا استبدلنا القضيب الساند المائل . للجمالون الدفعى (العقد الجمالونى) المبين فى الشكل (٤ – ٨٧ . أ) بالجمالون CB المبين فى الشكل (٤ – ٩٠) ؛ لحصلنا على إنشاء يسمى بالعقد الجمالونى (التشابكى) المتصل بثلاث مفصلات . ويتألف هذا العقد من جمالونين . مربوطين مع بعضهما بمفصلة مشتركة واحدة ، ومستندين أو محمولين على مسندين مفصليين ثابتين .

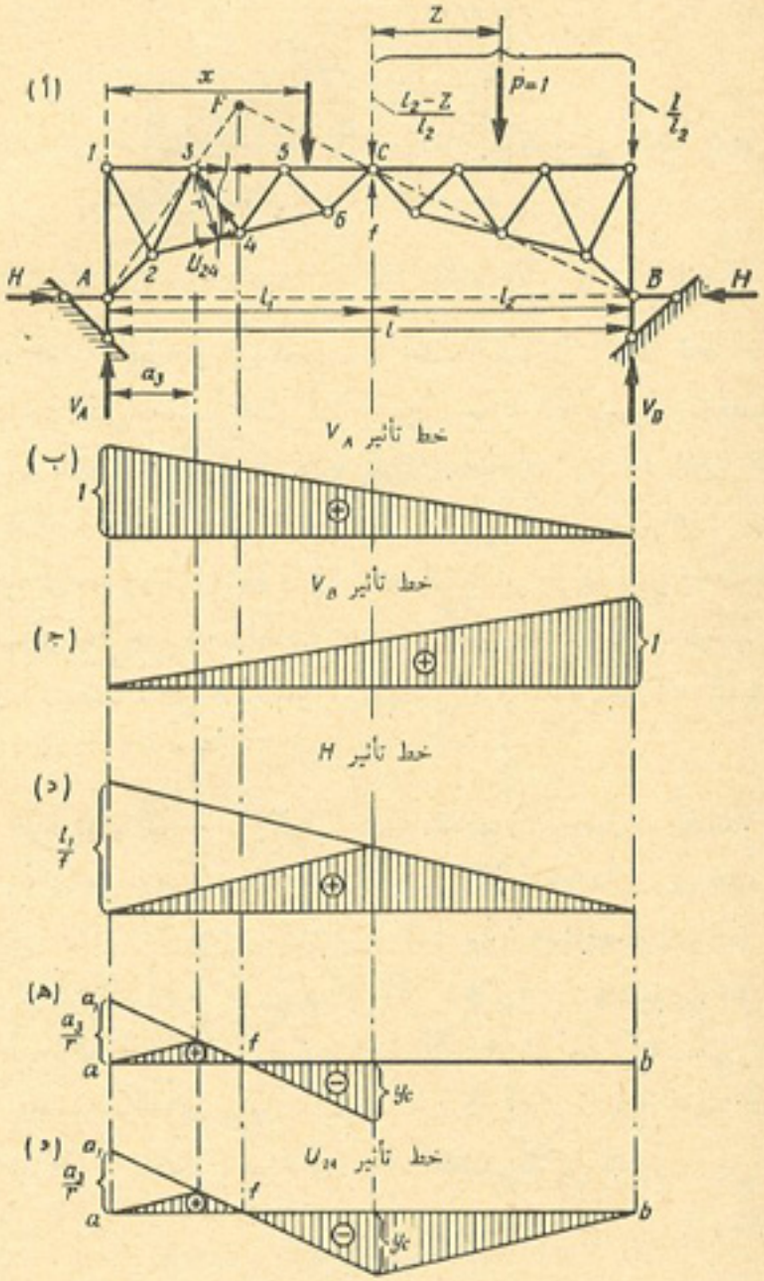


الشكل ٤ – ٩٠

والآن لنبحث العقد الجمالونى المتصل بثلاث مفصلات ، الذى تقع مسانده فى نفس المستوى (شكل ٤ – ٩١ ، أ) . أن المركبات الرأسية لردود فعل المساند وقوة الدفع ، تحدد فى مثل هذه الإنشاءات أو العقود ، بطريقة مماثلة تماماً ، لما هى عليه الحالة بالنسبة للعقود المصمتة المتصلة بثلاث مفصلات . فعند تأثير الحمل الرأسى $P = 1$ ، على مسافة x من المسند الأيسر (شكل ٤–٩١ ، أ) . نجد بأن ردى الفعل V_A و V_B يساويان ما يلى :

$$V_A = \frac{l - x}{l} \quad ,$$

$$V_B = \frac{x}{l}$$



الشكل ٤ – ٩١

وتعين القوة الدفعية H من المعادلة التالية :

$$H = \frac{M^0_c}{f}$$

حيث M^0_c – عزم الانحناء الناجم عن تأثير الحمل المذكور فى المقطع C من العتبة البسيطة التى باعها يساوى l .

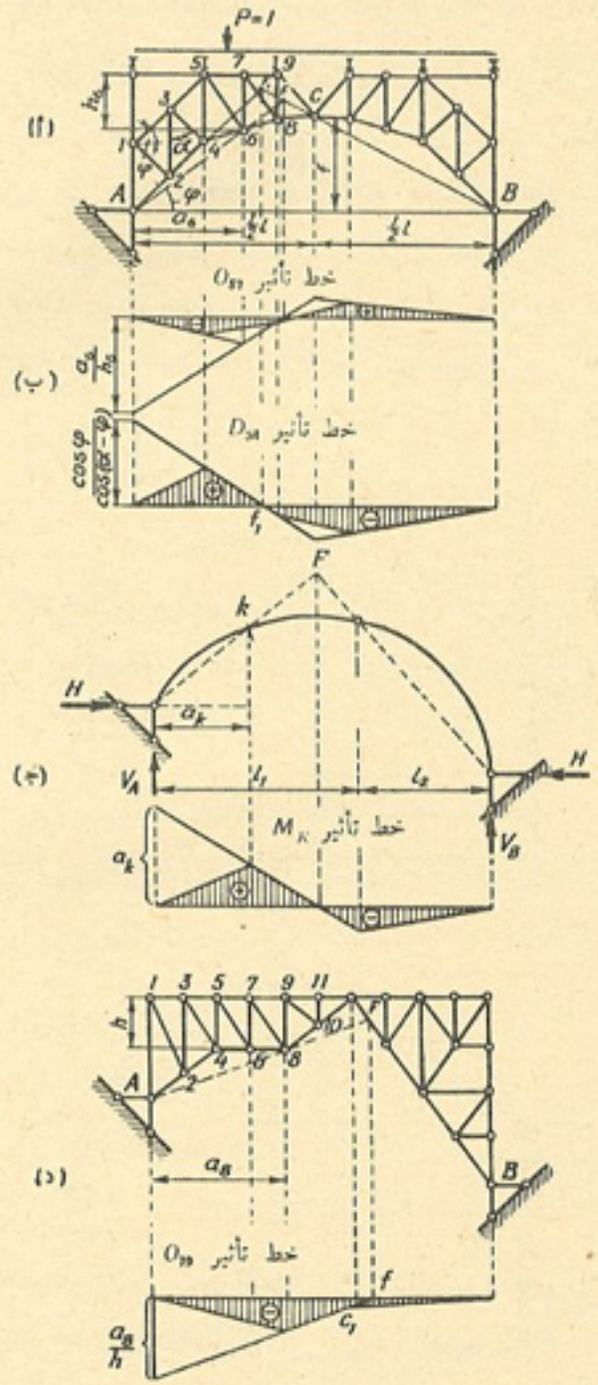
ويبين الشكل (٤–٩١، ب ، ج، د) خطوط تأثير كل من V_A و V_B و H .

وعند تحديد الإجهاد فى أى قضيب من قضبان النصف الأيسر للعقد ، يمكن أعتبار النصف الأيمن للعقد . طالما كان الحمل $P = 1$ واقعاً إلى يسار المفصلة C ، بمثابة قضيب ساند مائل . إذن فى هذه الحالة ، نجد بأن العقد الجمالونى المتصل بثلاث مفصلات ، الذى نبحثه ، يتحول (من حيث الحساب) إلى عقد دفعى ، تقع مسانده فى مستويات مختلفة . وقد بحثنا كيفية أو طريقة رسم خطوط تأثير الإجهادات فى مثل هذه الجمالونات الدفعية (العقدية) ، فى البند السابق . وعلى سبيل المثال ، يكون شكل خط تأثير الإجهاد U_{24} فى هذه الحالة ، كما هو عليه فى الشكل (٤ – ٩١ ، هـ) .

بقى علينا الآن أن نعرف كيف يتغير الإجهاد المبحوث ، عندما يتحرك الحمل $P = 1$ على النصف الأيمن للعقد (شكل ٤ – ٩١،أ) . فى هذه الحالة يمكن تحليل الحمل $P = 1$ إلى مركبتين : الأولى مؤثرة فى المفصلة المتوسطة C فوق الأحداثى الرأسى المعروف y_c (شكل ٤ – ٩١ ، هـ) ، والثانية مؤثرة فى الوصلة اليمنى الطرفية العليا ، التى تكون فيها قيمة الأحداثى الرأسى لخط تأثير الإجهاد المبحوث ، مساوية للصفر . ولهذا السبب ، يمكن إيجاد قيمة الإجهاد المبحوث U_{24} ، عند حركة الحمل $P = 1$ فى حدود النصف الأيمن للعقد ، من المعادلة التالية :

$$U_{24} = \frac{l_2 - z}{l_2}\, y_c + \frac{z}{l_2} \times 0$$

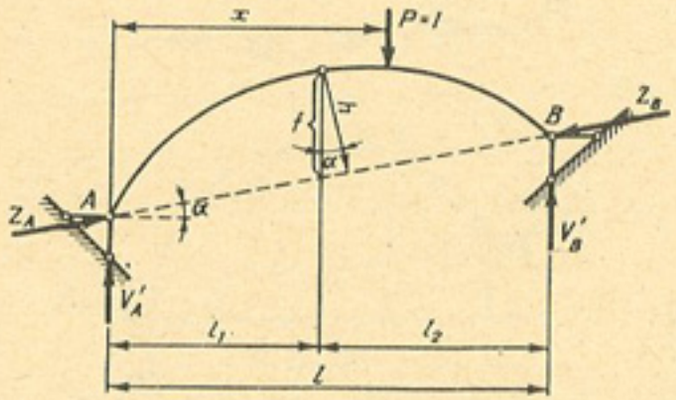
إن الرسم البيانى لهذه المعادلة ، هو عبارة عن مستقيم يصل قمة الأحداثى



الشكل ٤ – ٩٢

الرأسى y_c مع نقطة الصفر b الخاصة بالمحور السيبى (شكل ٤ – ٩١ ، و) .

وأخيراً نقدم عدداً من خطوط التأثير المرسومة (شكل ٤ – ٩٢) لمختلف أنواع العقود ، يحتوى أثنان منها ، على مساند واقعة فى مستويات مختلفة : وفى العقود التى تحتوى على مساند مختلفة المستويات ، يحلل عادة رد الفعل الكلى ، الناشئ فى كل مفصلة من مفصلات المساند . إلى مركبتين ، تكون احداهما عمودية الإتجاه ، والثانية متجهة فى إتجاه المستقيم الذى يصل بين مفصلات المساند (شكل ٤ – ٩٣) . وفى هذه الحالة ، لاجل رسم خطى تأثير V'_A و V'_B ، يمكن



الشكل ٤ – ٩٣

وضع أو كتابة المعادلتين المعروفتين لدينا جيداً ، وهما :

$$V'_A = \frac{l - x}{l}$$

و

$$V'_B = \frac{x}{l}$$

ويمكن تحديد مركبتى ردود الفعل عند المساند ، هما المركبتان Z_A و Z_B (وهما متساويتان عند تأثير الحمل الرأسى) ، من الصيغة التالية :

$$Z = Z_A = Z_B = \frac{M^0_C}{h}$$

حيث h – ذراع تأثير رد الفعل Z ، حول المفصلة المتوسطة C .

ويعتمد رد الفعل Z على قيمة القوة الدفعية H ، وذلك حسب العلاقة التالية :

$$H = Z \cos \alpha$$

حيث α – زاوية ميل المستقيم ، الواصل بين مفصلتى المسندين A و B ، مع الأفق .

ولذلك يمكن تحويل المعادلة $Z = \frac{M^0_C}{h}$ ، وجعلها بالشكل التالى :

$$H = Z \cos \alpha = \frac{M^0_C}{h} \cos \alpha$$

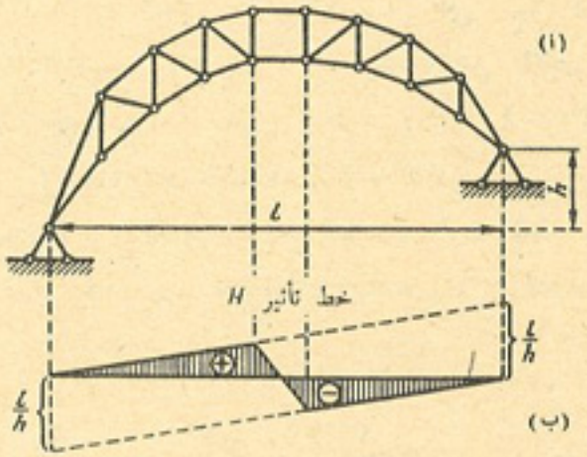
أو

$$H = \frac{\frac{M^0_C}{h}}{\cos \alpha}$$

والقيمة $\frac{h}{\cos \alpha}$ تمثل القطعة الرأسية (المستقيم الرأسى) المحصورة بين المستقيم الواصل بين مفصلتى المسندين ، وبين المفصلة C فى العقد . وإذا رمزنا لهذه القطعة (المستقيم) بالرمز f ، فسوف تأخذ صيغة H الشكل التالى :

$$H = \frac{M^0_C}{f}$$

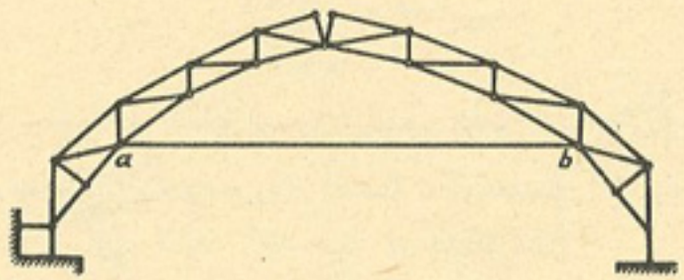
ونقترح على القارئ أن يثبت بأن شكل خط تأثير القوة الدفعية H فى الجمالون ، المبين فى الشكل (٤–٩٤ ، أ) ، يكون كما هو مبين فى الشكل (٤ – ٩٤ ، ب) .



الشكل ٤ – ٩٤

البند ٤ – ١١ : أنواع العقود الجمالونية

سوف نبحث العقد الجمالونى المحدد استاتيكياً ، الذى يحتوى على شدادة (شكل ٤ – ٩٥) ، المستند أو المحمول على مسندين ، إحدهما مفصلى ثابت ، والثانى مفصلى متحرك . ويمكن أن نعتبر بأن هذا الجمالون ، ناتج من عقد جمالونى عادى ، قد أبعد أو أزيل من مسنده الإيمن ، القضيب الأفقى ، ووضعت فى محله الشدادة ab ، التى تتحمل القوة الدفعية للجمالون (النظام) .

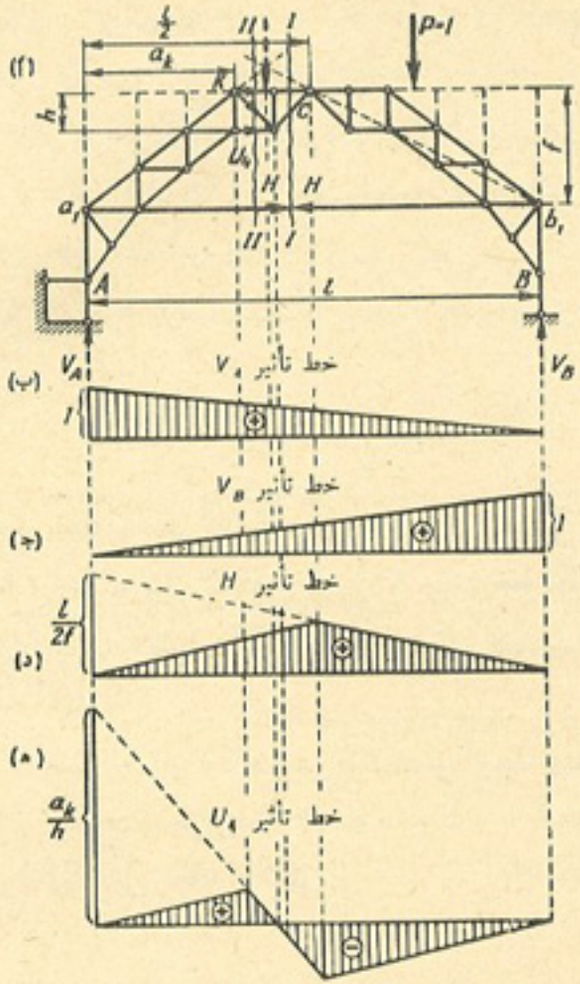


الشكل ٤ – ٩٥

وسوف نوضح طريقة حساب العقد الجمالونى المحتوى على شدادة ، ببحث العقد الجمالونى المبين فى الشكل (٤ – ٩٦ . أ) على سبيل المثال . أن خطى تأثير ردى الفعل الرأسيين V_A و V_B ، هما عبارة عن مثلثين ، إحداثياهما الرأسيان يساويان واحد ، تحت المسندين المناظرين (شكل ٤ – ٩٦ ، ب ، جـ). ولرسم خط تأثير الإجهاد H فى الشدادة (القوة الدفعية H) ، نستحدث المقطع $I - I$ ونضع معادلة عزوم القوى المؤثرة فى النصف الأيسر للعقد ، حول المفصلة المتوسطة C، بأعتبار الحمل $P = 1$ واقعاً على النصف الأيمن للعقد الجمالونى :

$$\Sigma_L M_C = V_A \frac{l}{2} - Hf = 0$$

$$H = \frac{V_A l}{2f} = \frac{M^0_C}{f}$$



الشكل ٤ – ٩٦

وعند وجود الحمل $P = 1$ فى حدود النصف الأيسر للعقد الجمالونى ، نحصل على المعادلة التالية :

$$\Sigma_R M_C = - V_B \frac{l}{2} + Hf = 0$$

$$H = \frac{V_B l}{2f} = \frac{M^0_C}{f}$$

وهكذا يمكن الحصول على خط تأثير H من خط تأثير عزم الإنحناء M^0_C (للمقطع C

من العتبة البسيطة) ، وذلك بضرب احداثياته الرأسية فى المعامل $\frac{1}{f}$: ويبين الشكل (٤ — ٩٦ ، د) خط تأثير القوة الدفعية H .

ولرسم خط تأثير الإجهاد U_4 فى أحد قضبان العقد الجمالونى ، نستحدث المقطع $II - II$ (شكل ٤ — ٩٦ ، أ) ونضع معادلة عزوم القوى المؤثرة فى القسم الايسر من العقد ، حول نقطة العزم k :

$$\Sigma M_k = V_A\, a_k - Hf - U_4\, h = 0$$

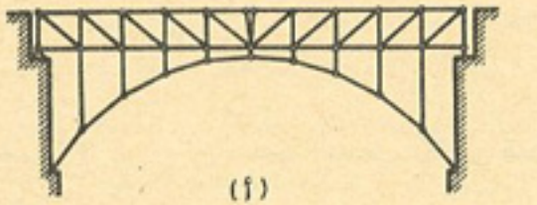
وينتج منها أن :

$$U_4 = \frac{1}{h}\ (V_A\, a_k - Hf)$$

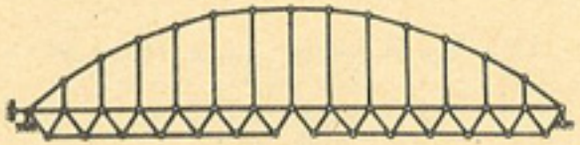
ويحدد موضع نقطة الصفر للاجهاد U_4 ، بتقاطع إتجاهى $a_1\, k$ و $b_1 C$ (شكل ٤ — ٩٦ ، أ) . ويبين الشكل (٤ — ٩٦ ، هـ) خط تأثير الإجهاد U_4 .

وننصح القارئ برسم خطوط تأثير الإجهادات فى القضبان الأخرى للعقد الجمالونى المبحوث أعلاه .

والآن نأتى إلى بحث الجمالون المؤلف من عقدمفصلى أو عقد متصل بمفصلات . يحتوى على جمالونين عتبيين ، مربوطين بمفصلة مشتركة واحدة : ويمكن أن يوضع الجمالونان العتبيان إلى أعلى العقد (شكل ٤ — ٩٧ ، أ) ، وإلى أسفله أيضا (شكل ٤ — ٩٧ ، ب) .



(أ)



(ب)

الشكل ٤ — ٩٧

وبتحليل البنيان (التركيب) الهندسى لمثل هذه الأنظمة (العقود) ، نتأكد بسهولة من كونها مستقرة هندسياً ومحددة إستاتيكيا . وسوف نحلل طرق تحديد الإجهادات فيها ، بدراسة النظام (العقد) المبين فى الشكل (٤ — ٩٨ ، أ) ، على سبيل المثال .

إن خطى تأثير ردى فعل المسندين V_A و V_B ، هما عبارة عن مثلثين ، إحداثياهما الرأسيان يساويان واحد ، تحت المسندين المناظرين (شكل ٤ — ٩٨ ، ب ، ج) .

وإذا قطعنا من العقد المذكور أية وصلة من الوصلات العليا ، ووضعنا معادلة أو شرط توازنها ، يمكن بسهولة إثبات الخاصية المهمة التالية للعقد المتعدد المفصلات $A\ S\ B$ ، وهى : إن المركبات الأفقية H للاجهادات فى كافة قضبان العقد المذكور ، تكون متساوية مع بعضها البعض ، عند تأثير أية مجموعة ممكنة كانت من الأحمال ، على الجمالونين AC و CB . ويمكن إثبات ذلك ، باسقاط كافة القوى المؤثرة فى أية وصلة من الوصلات ، مثل الوصلة $n - 1$ (شكل ٤ — ٩٨ ، د) على المحور السينى x :

$$\Sigma X = -N_{n-1}\cos\alpha_{n-1} + N_n\cos\alpha_n = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$N_{n-1}\cos\alpha_{n-1} = N_n\cos\alpha_n$$

حيث

$$N_{n-1}\cos\alpha_{n-1} = H_{n-1}$$

و

$$N_n\cos\alpha_n = H_n$$

إذن :

$$H_{n-1} = H_n = H$$

$$N_{n-1} = \frac{H}{\cos \alpha_{n-1}}$$

$$N_n = \frac{H}{\cos \alpha_n}$$

وبإسقاط كافة القوى على المحور y ، نحصل على ما يلى (شكل ٤ — ٩٨ ، د) :

$$\Sigma Y = H \tan \alpha_n - H \tan \alpha_{n-1} - V_{n-1} = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$V_{n-1} = H (\tan \alpha_n - \tan \alpha_{n-1})$$

وينتج من الصيغ التى حصلنا عليها ، بأن لخطوط تأثير الإجهادات فى جميع قضبان العقد المتعدد المفصلات وفى العلاقات ، نفس شكل خطوط تأثير القوة الدفعية H .

ولرسم خط تأثير القوة الدفعية H ، نستحدث المقطع $I - I$ (شكل ٤ — ٩٨ ، أ) ونضع معادلة عزوم القوى المؤثرة فى القسم الأيسر للعقد ، حول المفصلة C. وفى هذه الحالة نحلل القوة N_{n+1} المؤثرة فى المفصلة S ، إلى مركبتين هما H و $H\tan\alpha_{n+1}$:

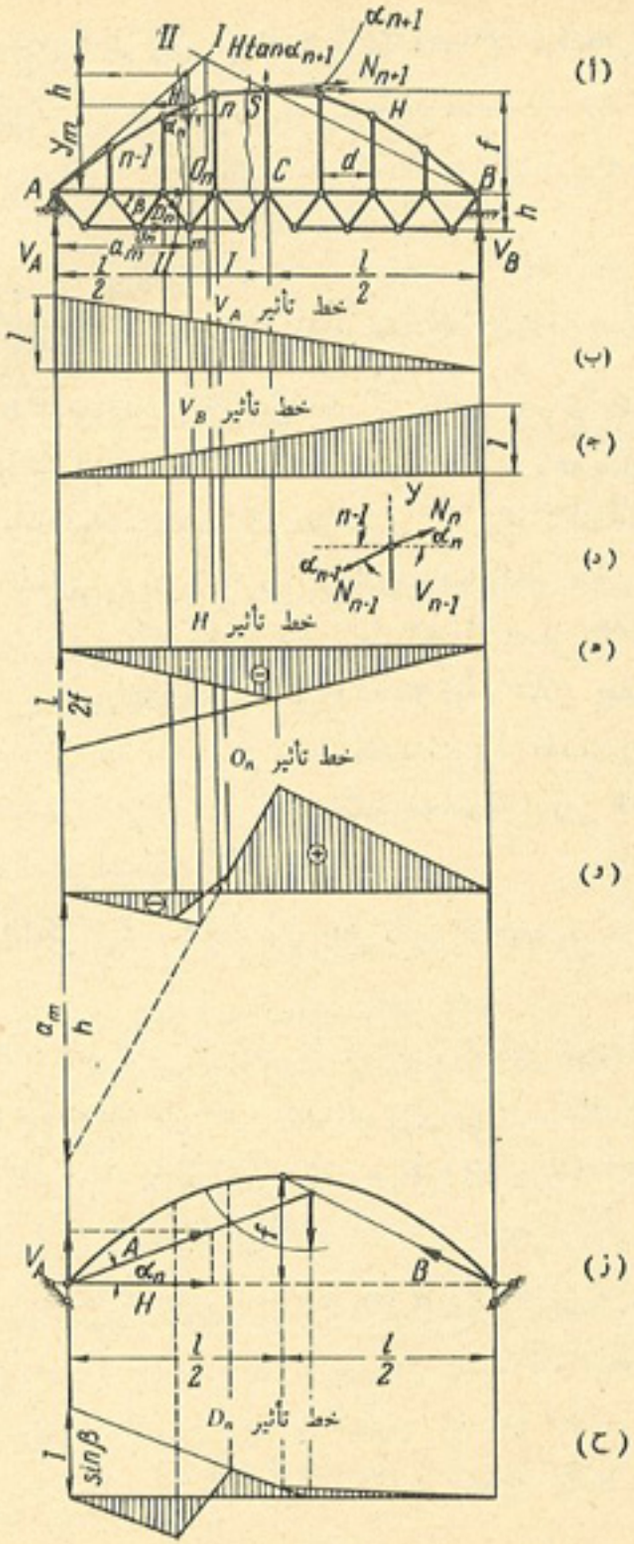
$$\Sigma M_C = V_A \frac{l}{2} + Hf = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$H = -\frac{V_A l}{2f} = -\frac{M^0_C}{f}$$

إن العلامة السالبة هنا ، تدل على أن قطع العقد المتعدد المفصلات ، معرضة للانضغاط . ويكون خط تأثير H على هيئة مثلث ، تقع قمته تحت المفصلة المتوسطة C (شكل ٤ — ٩٨ ، هـ) .

نرسم الآن خط تأثير الإجهاد O_n . ولهذا الغرض نستحدث المقطع $II - II$



الشكل ٤ — ٩٨

ونضع معادلة عزوم القوى حول النقطة m (عند وجود الحمل $P = 1$ على القسم الايمن للجمالون) :

$$\Sigma M_m = V_A\, a_m + O_n\, h - H\,(y_m + h) = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$O_n = -\frac{1}{h}\,[V_A\, a_m - H\,(y_m + h)] = -\frac{1}{h}\,[M^0_m - H(y_m + h)]$$

إن الصيغة الموضوعة بين القوسين الكبيرين ، تمثل عزم الإنحناء فى المقطع K من أحد العقود الخيالية المتصلة بثلاث مفصلات ، الذى باعه يساوى باع العقد المبحوث l ، وأحداثيات المفصلة المتوسطة تساوى $\frac{l}{2}$ و f . أما أحداثيات مركز المقطع K ، فتساوى a_m و $(y_m + h)$: ولذلك لتحديد نقطة الصفر لخط تأثير O_n يجب أولا تثبيت موضع مركز المقطع K من العقد الخيالى المتصل بثلاث مفصلات ، ولهذا الغرض . نرسم من النقطة m (شكل ٤ — ٩٨ ، أ) عمودا ، ونضع عليه ابتداء من المستقيم الأفقى AB (المار فى مركز المفصلة C) ، القطعة $(y_m + h)$. وبرسم المستقيمين AK و BS ، نجد نقطة تقاطعهما ، وهى النقطة التى تحدد موضع نقطة الصفر للاجهاد O_n .

ويبين الشكل (٤ — ٩٨ ، و) خط تأثير الإجهاد O_n ، المرسوم بطريقة نقطة الصفر .

نرسم الآن خط تأثير الإجهاد D_n فى الضلع القطرى للجزء الهيكلى . نضع معادلة مجموع المساقط على المحور العمودى (الرأسى) ، لكافة القوى المؤثرة على العقد الجمالونى ، إلى يسار المقطع $II - II$ (شكل ٤ — ٩٨ ، أ) ، عند وجود الحمل $P = 1$ إلى يمين المقطع :

$$\Sigma Y = V_A - H \tan \alpha_n - D_n \sin \beta = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$D_n = \frac{1}{\sin \beta}\,(V_A - H \tan \alpha_n)$$

وينتج من المعادلة الأخيرة ، بأن خط التأثير المطلوب ، يمكن رسمه بجمع خط تأثير V_A ، الذى تكون إحداثياته الرأسية مضروبة فى $\frac{1}{\sin \beta}$ ، وخط تأثير القوة الدفعية H ، الذى الذى تكون أحداثياته الرأسية مضروبة فى $\left(-\frac{\tan \alpha_n}{\sin \beta}\right)$.

ويمكن رسم خط تأثير D_n ، بطريقة نقطة الصفر أيضاً . ولهذا الغرض ، يجب تحديد وضع معين للحمل $P = 1$ فوق العقد الجمالونى ، تتحول عنده قيمة الصيغة $(V_A - H \tan \alpha_n)$ إلى الصفر . وعندئذ يجب إعتبار V_A و H ، بمثابة رد فعل رأسى وقوة دفعية ، فى عقد خيالى ، باعه يساوى باع العقد المبحوث l ، وموضع مفصلته المتوسطة يحدد بالأحداثيين $\frac{l}{2}$ و f (شكل ٤ — ٩٨ ، ز) .

ويحدد موضع نقطة الصفر لخط تأثير D_n ، من المعادلة التالية :

$$D_n = \frac{1}{\sin \beta}\,(V_A - H \tan \alpha_n) = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$\frac{V_A}{H} = \tan \alpha_n$$

والمعادلة الأخيرة ممكنة ، إذا كانت محصلة القوتين V_A و H ، أى رد فعل المسند الأيسر A للعقد المتصل بثلاث مفصلات (شكل ٤ — ٩٨ ، ز) مائلة بزاوية α_n مع الأفق . وتقع نقطة الصفر للاجهاد D_n عند تقاطع إتجاهى ردى فعل المسندين A و B ، للعقد الخيالى ، وفى هذه الحالة ، يمر رد فعل B فى مفصلة المسند الأيمن ، وفى المفصلة المتوسطة للعقد (شكل ٤—٩٨ ، ز). ويبين الشكل (٤ — ٩٨ ، ح) خط تأثير الإجهاد D_n ، المرسوم بطريقة نقطة الصفر :

والآن نبحث النظام أو الإنشاء ، الذى يكون فيه العقد المتعدد المفصلات ، واقعاً فى الأسفل ، والجمالونان العتبيان واقعين فى الأعلى (شكل ٤ — ٩٩ ، أ) . وهذا الإنشاء مستقر هندسياً ومحدد إستاتيكيا . ويمتاز بوجود أربع نقاط إستناد هى A' ، B' ، A'' و B'' .

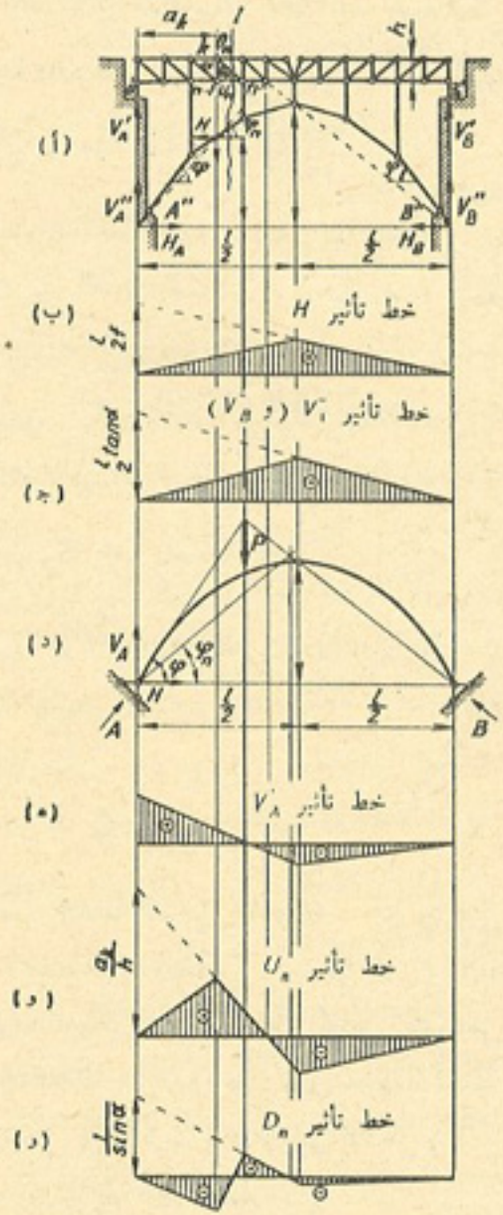
ولتحديد ردود فعل المساند ، نقوم بما يلى : نمد إتجاهات القضبان الطرفية للعقد المتعدد المفصلات ، إلى أن تتقاطع مع العمود المار فى مفصلتى المسندين A' و B' ، وفى نقاط التقاطع هذه ، نحلل القوى الناشئة فى القضبان الطرفية للعقد المذكور ، إلى المركبات التالية : V''''_A ، H_A و V''''_B ، H_B (شكل ٤ — ٩٩ ، أ) . وبناء على الخاصية المعروفة للعقد المتعدد المفصلات (راجع الصفحة ٣٠٥) ، نجد بأن : $H_A = H_B = H$.

نرمز إلى ردى فعل المسندين A' و B' بالرمزين V'_A و V'_B (شكل ٤ — ٩٩ ، أ) .

ونرمز إلى مجموع ردود الفعل الرأسية للمساند اليسرى واليمنى ، بالرمزين V_A و V_B على الترتيب :

$$V_A = V'_A + V''_A$$
$$V_B = V'_B + V''_B$$

ونضع الآن معادلة مجموع عزوم القوى المؤثرة على الإنشاء (النظام) ، حول نقطة تقاطع القوتين V_B و H_B :



الشكل ٤ — ٩٩

$$\Sigma M = V_A l - M_{ext} = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$V_A = V'_A + V''_A = \frac{M_{ext}}{l}$$

حيث M_{ext} — عزم القوى الخارجية ، المؤثرة على الإنشاء .

إذن مجموع المركبات الرأسية لردى الفعل V'_A و V''_A يساوى رد فعل العتبة البسيطة المحمولة على مسندين .

ولتحديد القوة الدفعية H ، نضع معادلة مجموع عزوم كافة القوى ، المؤثرة فى النصف الأيسر (أو الأيمن للانشاء)) حول المفصلة المتوسطة S للعقد المتعدد المفصلات :

$$\Sigma M_S = V_A \frac{l}{2} - H f - M^L_S = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$H = \frac{M^0_S}{f}$$

حيث M^0_S — عزم الإنحناء فى العتبة البسيطة ، فى المقطع الذى إحداثية السينى هو $x = \frac{l}{2}$.

إذن خط تأثير القوة الدفعية H ، هو عبارة عن المثلث المبين فى الشكل (٤ — ٩٩ ، ب) .

ويمكن التعبير عن ردى الفعل V''_A و V''_B ، بواسطة القوة الدفعية H :

$$V''_A = H \tan \phi$$

و

$$V''_B = H \tan \phi$$

إذن يكون خطا تأثير ردى الفعل V''_A و V''_B ، ممثلين بالمثلثين المبينين فى الشكل (٤ — ٩٩ ، ج) . ولتحديد رد الفعل V'_A ، نستخدم الصيغة التالية :

$$V'_A = V_A - V''_A = V_A - H \tan \phi$$

وتدل هذه الصيغة على أن خط تأثير رد الفعل V'_A ، يمكن أن يستخرج بجمع خطى التأثير التاليين وهما : خط تأثير رد فعل مسند العتبة البسيطة المحمولة على مسندين ، الذى يكون شكله على هيئة مثلث كما هو معروف ، وقيمة إحداثيه الرأسى عند المسند تساوى واحد ، وخط تأثير القوة الدفعية H ، الذى تكون جميع أحداثياته الرأسية مضروبة فى المعامل الثابت $(-\tan \phi)$.

ويمكن رسم خط تأثير V'_A كذلك ، بطريقة نقطة الصفر ، التى يحدد موضعها من المعادلة التالية :

$$V'_A = V_A - H \tan \phi = 0$$

ومن هنا يجب أن تكون النسبة $\frac{V_A}{H}$ مساوية للمقدار $\tan \phi$ ، ويمكن تحقيق ذلك ، لو كانت محصلة القوتين V_A و H ، أى رد فعل المسند الأيسر لعقد خيالى متصل بثلاث مفصلات (شكل ٤ — ٩٩ ، د) ، مائلة بزاوية ϕ مع الأفق. وتحدد نقطة الصفر لخط تأثير رد الفعل V'_A ، بتقاطع إتجاهى خطى تأثير ردى فعل المسندين A و B (شكل ٤ — ٩٩ ، د) .

وهكذا عند رسم خط تأثير V'_A يجب أن نضع على العمود المار فى المسند الأيسر ، الأحداثى الرأسى الذى يساوى واحد ، ونوصل قمته مع مسقط نقطة الصفر على المحور السينى ، ونوصل قمة الأحداثى الرأسى الواقع تحت المفصلة المتوسطة مع « الصفر » عند المسند الأيمن (شكل ٤ — ٩٩ ، هـ) .

ونأتى الآن إلى رسم خط تأثير الإجهاد الناشئ فى أى قضيب من قضبان وتر الجمالون ، مثل القضيب $n - (n - 1)$ المبين فى الشكل (٤ — ٩٩ ، أ) : نستحدث المقطع $I - I$ ونضع معادلة مجموع عزوم القوى ، المؤثرة فى القسم الأيسر للانشاء ، حول المفصلة k (حول نقطة العزم) :

$$\Sigma M_k = (V'_A + V''_A)\, a_k - Hy_k - U_n h = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$U_n = \frac{1}{h} [(V'_A + V''_A)\, a_k - Hy_k] = \frac{M^0_k}{h}$$

حيث M^0_k — هنا هو عزم الإنحناء فى المقطع k ، من العقد المتصل بثلاث مفصلات ، الذى باعه يساوى باع الإنشاء المبحوث I ، وإحداثيا مركز ثقل المقطع k ، هما a_k و y_k .

ويبين الشكل (٤ — ٩٩ ، و) خط تأثير الإجهاد U_n ، المرسوم بطريقة نقطة العزم :

ونبحث الآن رسم خط تأثير الإجهاد الناشى فى أى قضيب من قضبان شبيكة الجمالون ، مثل الاجهاد D_n فى الضلع القطرى kn (شكل ٤ — ٩٩ ، أ) : عندما يكون الحمل $P = 1$ واقعاً إلى يمين المقطع $I - I$ ، يحدد الإجهاد D_n من المعادلة التالية :

$$\Sigma Y = V_A - D_n \sin \alpha - H \tan \phi_n = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$D_n = \frac{1}{\sin \alpha} (V_A - H \tan \phi_n)$$

ولإيجاد موضع نقطة الصفر التابعة لخط تأثير الإجهاد D_n ، يجب وضع الحمل $P = 1$ ، بحيث يكون لدينا ما يلى :

$$V_A - H \tan \phi_n = 0$$

أو

$$\frac{V_A}{H} = \tan \phi_n$$

والمعادلة الأخيرة ، كما هو معروف ، ممكنة فقط ، إذا كانت المحصلة A للقوتين V_A و H ، أى رد فعل المسند الأيسر للعقد الخيالى ، المبين فى الشكل (٤ — ٩٩ ، د) مائلة بزاوية ϕ_n مع الأفق . إذن يحدد موضع نقطة الصفر ،

بتقاطع المستقيم المار فى مفصلة المسند الأيسر ، بزاوية قدرها ϕ_n مع الأفق ، مع المستقيم الواصل بين مفصلة المسند الايمن والمفصلة المتوسطة :

ولرسم خط تأثير الأجهاد D_n يجب أن نوضع على العمود المار فى المسند الأيسر ، قيمة الأحداثى $\frac{1}{\sin \alpha}$ ، ونوصل قمته مع مسقط نقطة الصفر ، على المحور الأفقى (السينى) . ويجب أن ننقل إلى هذا المستقيم الأيمن المرسوم بهذه الطريقة ، الوصلات اليمنى للجمالون الأيسر . ثم يجب أن توصل قمة الأحداثى الرأسى ، الواقعة تحت المفصلة المتوسطة للعقد المتعدد المفصلات ، مع « الصفر » الواقع عند المسند الأيمن ، وبعد ذلك نرسم من نقطة المحور السينى ، الواقعة على العمود المار فى المسند الأيسر ، والمستقيم الأيسر بحيث يوازى المستقيم الأيمن ، وننقل إلى المستقيم الأيسر ، الوصلات اليسرى للجمالون . ونختتم رسم خط تأثير الإجهاد D_n (شكل ٤ — ٩٩،ز) بوصل نهايات الأحداثيات الرأسية للوصلات ، التابعة للجزء الهيكلى المقطوع .

وبنفس الطريقة ، نرسم خطوط التأثير للاضلاع القائمة للانشاء :

الفصل الخامس

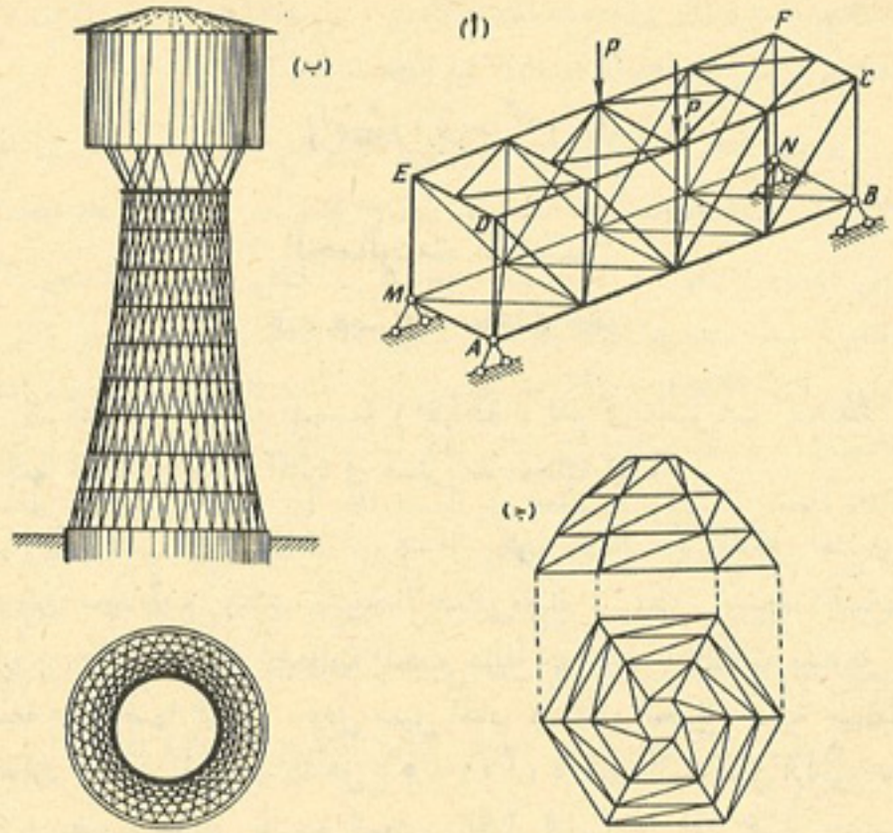
الجمالونات المجسمة

البند ٥ — ١ : معلومات عامة

إن قطع الجمالونات المجسمة (الفراغية) تقع فى مستويات مختلفة ، ويمكنها تحمل الأحمال المؤثرة فى مستويات مختلفة ايضاً .

وفى عدد من الحالات ، عندما يكون البنيان أو الشكل الهندسى للجمالون محدداً ، وتكون طبيعة الأحمال معينة ، يمكن تبسيط الحساب كثيراً ، وذلك باعتبار الجمالون المجسم مؤلفاً من عدة جمالونات مستوية ، مجتمعة مع بعضها البعض . وعلى سبيل المثال ، يمكن تحويل عملية حساب الجمالون الجسرى المبين فى الشكل (٥ —١، أ) ، عند تأثير الحمل الرأسى P، الموزع بصورة متماثلة بالنسبة للمحور الطولى للجسر ، إلى عملية حساب جمالونين رأسيين مستويين ، هما $ABCD$ و $MNFE$. وعند تعرض الجمالون المذكور لتأثير حمل مؤثر فى اتجاه واحد P ، يجب حسابه باعتباره جمالوناً مجسماً مؤلفاً من قطعة واحدة، أى موحداً . وفى هذه الحالة، سيكون الجمالونان $AMNB$ و $DEFC$ الموضوعان فى مستويين أفقيين ، قابلين لنقل الحمل P من أحد الجمالونين الرأسيين إلى الجمالون الآخر .

إن الجمالون المجسم المبين فى الشكل (٥ — ١، ب ، هو عبارة عن نموذج للجمالون الذى صممه المهندس شوخوف ، ويستخدم لحمل خزان الماء . إن الشكل أو البنيان الهندسى لهذا الجمالون (السطح الزائد hyperboloid) ، لا يسمح بتقسيمه إلى جمالونات مستوية ، لذا يجب حسابه باعتباره جمالونا مجسماً واحداً . أن السقف المقبب ، المبين فى الشكل (٥ — ١ ، ج) يعتبر أيضاً أحد أمثلة الجمالون المجسم .



الشكل ٥ – ١

وتتصل قطع الجمالونات المجسمة مع بعضها البعض ، فى وصلات معينة ، منجزة بواسطة البرشام أو اللحام (الوصلات المبرشمة أو الملحومة) ، أى بواسطة وصلات على درجة معينة من الجسوءة. ولكن وجود الوصلات الجاسئة تماماً ، يؤدى إلى تعقيد الحساب إلى درجة بالغة . ولهذا السبب ، عند حساب الجمالونات المجسمة (خلافاً لحساب الأطر المجسمة) ، تعتبر كافة قطع الجمالون ، متصلة مع بعضها بواسطة وصلات ذات مفصلات كروية . وتمتاز هذه المفصلات عن مفصلات الجمالونات المستوية ، بأن لكل منها ثلاث درجات من حرية الحركة. أما القطع الموصولة بمثل هذه الوصلات المفصلية ، فيمكن أن تدور حول أية ثلاثة محاور ، تمر فى مركزها . أن لمفصلة الجمالون

المستوى (المفصلة الاسطوانية) ، درجة واحدة من حرية الحركة ، وذلك لأنها تسمح بدوران القطع حول محور واحد فقط (وهو المحور العمودى على مستوى الجمالون) .

ويجب أن ترتب قضبان الجمالون المجسم ، بالطريقة التى مجموعة ، مفصلاتها ، مستقرة هندسيا .

وهكذا نجد بأن الجمالون المجسم ، هو عبارة عن جمالون مؤلف من قضبان مرتبة فى الفراغ ، ومتصلة مع بعضها البعض بصورة مستقرة هندسياً ، بواسطة مفصلات كروية .

وعند تأثير الحمل فى وصلات الجمالون (بصورة غير مباشرة) نجد بأن كافة قطع أو قضبان الجمالون المجسم ، تكون معرضة للشد أو الانضغاط فقط ، أى تكون أما مشدودة أو منضغطة .

وإذا كانت مجموعة القوى المؤثرة فى الفراغ ، واقعة فى حالة توازن يجب أن تحقق ست معادلات للتوازن الإستاتيكى . ويمكن كتابة هذه المعادلات ، بمجموعات مختلفة ، مثلا على هيئة ثلاث معادلات للمساقط على المحاور الثلاثة x ، y ، z :

$$\Sigma X = 0 \; ; \; \Sigma Y = 0 \; ; \; \Sigma Z = 0$$

وعلى هيئة ثلاث معادلات للعزوم ، حول المحاور الثلاثة المذكورة :

$$\Sigma M_x = 0 \; ; \; \Sigma M_y = 0 \; ; \; \Sigma M_z = 0$$

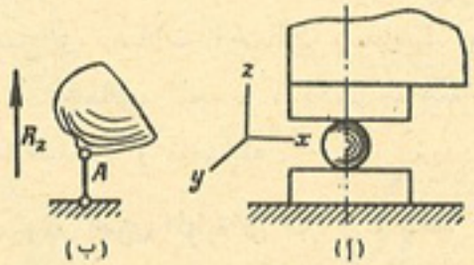
ويحدد اختيار هذه المجموعة أو تلك من المعادلات ، تبعاً لسهولة إستخدامها عند حساب الجمالون . وتصبح المعادلات وحلولها أسهل ، كلما قل عدد المجاهيل فى كل منها . ويتلخص الغرض الأساسى من وضع المعادلات ، فى تفريق المجاهيل إلى أكبر درجة ممكنة .

ويمكن باستخدام معادلات التوازن ، تحديد ردود فعل المساند والإجهادات الناشئة فى قطع (قضبان) الجمالون المجسم ، نتيجة لتأثير الأحمال المعينة .

البند ٥ – ٢ : مساند الجمالونات المجسمة

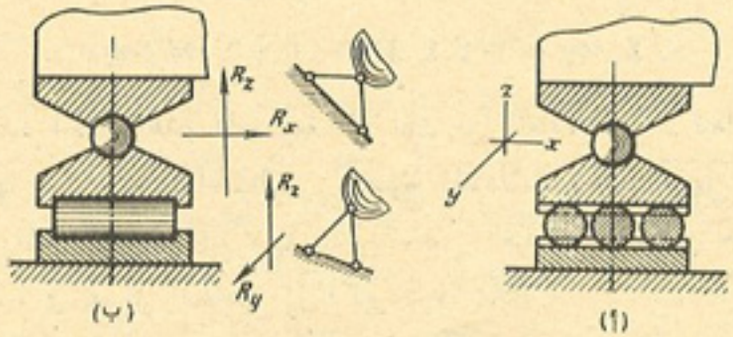
إن تثبيت الجمالونات المجسمة فى الأساس أو فى أى إنشاء آخر مستقر هندسياً ، يتم باستخدام مساند من ثلاثة أنواع ، وهى :

١ – المسند الكروى المتحرك (المتحرك على المستوى) . وهو المسند المبين فى الشكل (٥ – ٢ ، أ) .



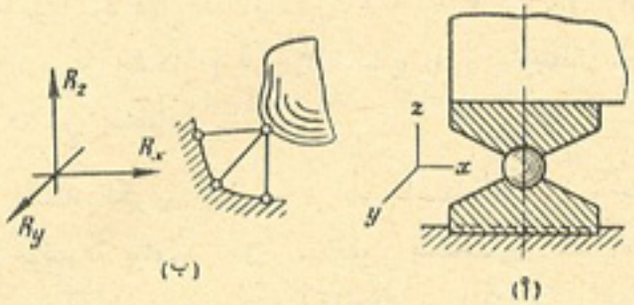
الشكل ٥ – ٢

٢ – المسند الكروى المحمول على الدلافين الإسطوانية (المتحرك حركة خطية) ، وهو المسند المبين فى الشكل (٥ – ٣) .



الشكل ٥ – ٣

٣ – المسند الكروى الثابت (شكل ٥ – ٤) .



الشكل ٥ – ٤

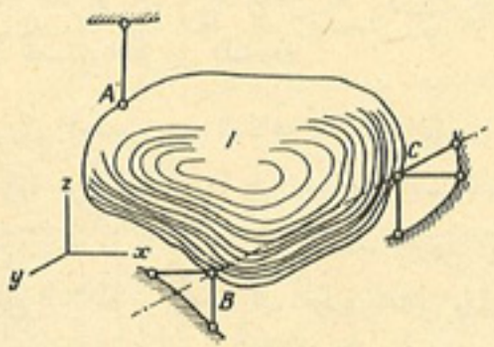
ويتألف المسند الكروى المتحرك من لوحين أو بلاطتين ناعمتين . توجد بينهما كرة . أن الجسم أو الإنشاء المثبت بهذا المسند ، يمكن أن يدور حول المحاور الثلاثة x ، y ، z ، المارة فى مركز الكرة ، ويتحرك فى المستوى xy . وهذا المسند يعرقل أو يمنع حركة الجسم بمحاذاة المحور z فقط فى الإتجاهين الموجب والسالب على السواء ، وهذا غير مبين فى التصميم المناظر المبين فى الشكل (٥ – ٢) ، أى يربطه برباط واحد فقط . وفى هذه الحالة ينشأ فى إتجاه هذا الرباط ، رد الفعل R_z . ويبين الشكل (٥–٢،ب) الرموز الإصطلاحية للمسند الكروى المتحرك .

أن المسند الكروى المحمول على الدلافين الإسطوانية ، يتألف من هزازتين عليا وسفلى ، مع كرة موضوعة فى داخل تجويفين مستحدثين فى الهزازتين ، كما مبين فى الشكل (٥ – ٣ ، أ) . وتستند الهزازة السفلى على دلافين إسطوانية موضوعة على البلاطة . وتوجد فى الهزازة السفلى وفى البلاطة ، اضلاع تمنع حركتهما المتبادلة بمحاذاة محور الدلافين . ويمكن للجسم (الإنشاء) المثبت بمثل هذا المسند ، أن يدور حول ثلاثة محاور ، تمر فى مركز الكرة . ويتحرك حركة إنتقالية بموازاة مستوى دحرجة الدلافين ، وبصورة عمودية على محور الدلافين . وهذا المسند يمنع أو يعرقل حركتين وهما : الحركة بمحاذاة المحور العمودى على مستوى (سطح) الدحرجة ، والحركة فى اتجاه محاور

الدلافين ، أى أن المسند يربط الإنشاء برباطين . وعند مثل هذا النوع من المساند ، ينشأ رد فعل ذو مركبتين هما R_y و R_z أو R_x و R_z تبعاً لموقع الدلافين . ويبين الشكل (٥ — ٣ ، ب) رموز ومخطط المسند الكروى ، المحمول على دلافين إسطوانية .

ويتألف المسند الكروى الثابت ، أو المسند الكروى باختصار ، من هزازتين وكرة موضوعة بينهما ، فى تجويفين مستحدثين لهذا الغرض (شكل ٥ — ٤ ، أ) . أن الإنشاء (الجسم) المثبت بهذا المسند ، يمكن أن يدور فقط حول المحاور الثلاثة المارة فى مركز الكرة . وهذا المسند يربط الإنشاء بثلاثة أربطة ، وينشأ فيه رد فعل فى أى إتجاه كان ، يمر فى مركز الكرة ، وله ثلاث مركبات هى : R_x ، R_y ، و R_z . والرموز الخاصة بهذا المسند ، مبينة فى الشكل (٥—٤،ب) .

أن العدد الأصغر من الأربطة ، الضرورية لربط الجمالون المجسم المستقر هندسياً ، ربطا ثابتاً فى الأرض ، يساوى عدد معادلات توازن الإنشاء فى الفراغ ، أى يساوى ٦ . ويبين الشكل (٥ — ٥) أبسط مجموعة من الأربطة ،

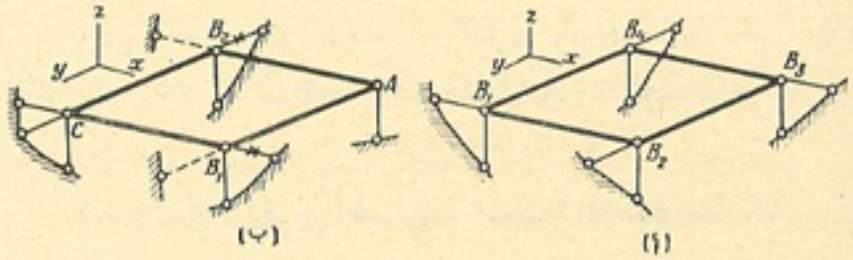


الشكل ٥ — ٥

المستخدمة لهذا الغرض . أن القرص I مثبت فى النقطة C بواسطة مسند كروى ثابت ، ومثبت فى النقطة B ، بواسطة مسند كروى محمول على

دلافين إسطوانية . أن ترتيب هذين المسندين ، يجعل محور القرص I ، وهو المحور BC ، ثابتاً . ويمكن أن يدور القرص حول هذا المحور ، بدرجة واحدة فقط من حرية الحركة ، أى حول المحور BC فقط . أن وضع المسند الكروى المتحرك A (على شرط ألا يتقاطع إتجاه هذا المسند ، مع المحور BC) يؤدى إلى ربط القرص I ربطاً ثابتاً .

وعندما يكون الإنشاء المربوط أو المثبت فى الأرض ، غير مستقر هندسياً ، يزداد عدد الأربطة تبعاً لذلك . ويبين الشكل (٥ — ٦ ، أ) مثالا لهذا الإنشاء :



الشكل ٥ — ٦

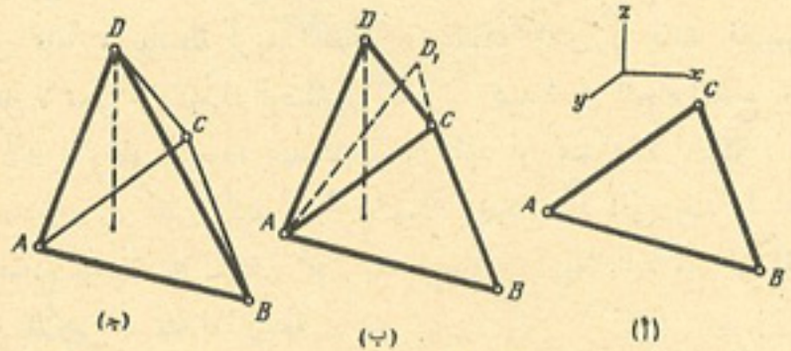
عند تثبيت المستطيل $B_1\ B_2\ B_3\ B_4$ بثلاثة مساند من الأنواع A ، B و C (لاحظ الشكل ٥—٥) ، يصبح قابلا للتغير مرتين (أى له درجتان من حرية الحركة) ، إذ يمكن أن يتغير شكله فى المستوى $B_1\ B_2\ B_3\ B_4$ ، ويمكن أن ينحنى حول أحد أقطاره (جميع المفصلات كروية) . وبالتالى يضاف إلى عدد المساند ، مسندان آخران . إذن يصبح الإنشاء مثبتاً فى الأرض تماماً ، بواسطة أربعة مساند من النوع الثانى (ذات قضيبين) . وبالفعل لايمكن أن تتحرك الوصلة B_1 بصورة عمودية وفى إتجاه الضلع $B_1 B_2$ ، وذلك لأن الأربطة الموجودة عند المسند B_1 تقيد أو تمنع هذه الحركة . والحركة فى إتجاه $B_1\ B_4$ غير ممكنة أيضاً ، نتيجة لوجود رباط افقى عند المسند B_4 . إذن تصبح الوصلة B_1 ثابتة . ثم تربط الوصلة B_2 ربطا ثابتاً مع الوصلة الثابتة B_1 ومع الأرض . بثلاثة اربطة .

وتربط الوصلتان B_3 و B_4 بأربطة مماثلة :

ويجب وضع الأربطة عند المساند ، بطريقة صحيحة ، وذلك لأن وضعها غير الصحيح ، يؤدى إلى زيادة عدد أربطة أحد أقسام الإنشاء ، ويصبح تبعاً لذلك غير محدد إستاتيكيا بينما يصبح القسم الآخر من الإنشاء ، غير مستقر هندسياً . ويبين الشكل (٥ — ٦ ، ب) مثالا للترتيب أو الوضع غير الصحيح للاربطة ، المرسومة بخطوط سميكة : أن اتجاه الأربطة الأفقية فى الوصلتين B_1 و B_2 ، ينطبق مع اتجاه الأربطة المناظرة ، عند المسند C ، ولهذا السبب تكون هذه الأربطة زائدة عن الحاجة . والوصلة B_1 غير مثبتة فى اتجاه B_1A ، أما الوصلة B_2 ، فهى غير مثبتة فى اتجاه B_2A . وعلى سبيل المثال ، يمكن الحصول على الوضع أو الترتيب الصحيح للأربطة ، بتبديل الأربطة المؤثرة بعلامات شارطة ، بالأربطة المرسومة بخطوط منقطة .

البند ٥ — ٣ : تكوين الجمالونات المجسمة المحددة استاتيكياً

إن القرص الذى له شكل المثلث ACB (شكل ٥ — ٧ ، أ) ، يعتبر من الإنشاءات المستوية البسيطة ، المحددة إستاتيكيا . نربط مع هذا القرص الوصلة D ، بواسطة قضيبين هما AD و CD (شكل ٥ — ٧ ، ب) . أن الأنشاء الناتج يكون غير مستقر هندسياً ، وذلك لأن المثلث ADC قابل للدوران حول المستقيم AC . ولكى نقيد أو نمنع هذه الحركة الدورانية ، يجب إضافة رباط لا يقع فى مستوى المثلث ADC ، مثل القضيب BD



الشكل ٥ — ٧

(شكل ٥ — ٧ ، جـ) . أن الإنشاء المجسم الذى حصلنا عليه . وهو على هيئة هرم مثلث ، يمثل أبسط أنواع الإنشاءات المجسمة (البلوكات) . وإذا اضفنا اليه وصلات أخرى ، بحيث تربط كل وصلة باستخدام ثلاثة قضبان . غير واقعة فى مستو واحد . نحصل على إنشاء مجسم بأبسط اشكاله .

والآن نضع العلاقة بين عدد قضبان الإنشاء وعدد الأربطة وعدد الوصلات المفصلية . فى الإنشاءات (الجمالونات) المستقرة هندسياً ، المحددة إستاتيكيا .

لنفرض بأن الرمز S يدل على عدد قضبان الجمالون . والرمز S_0 يدل على الأربطة ، والرمز K يدل على عدد الوصلات المفصلية .

إن العدد السلكى للاجهادات المجهولة سيساوى $S + S_0$.

وعدد المعادلات الإستاتيكية التى يمكن وضعها ، لتحديد هذه الإجهادات ، يساوى $3K$ ، وذلك لأنه يمكن أن توضع لكل وصلة مفصلية ، ثلاث معادلات لمساقط القوى (الأحمال) المؤثرة عليها .

إن درجة عدم التحديد الإستاتيكى (أى العدد i ، الذى يدل على مقدار زيادة عدد المجاهيل ، على العدد الممكن للمعادلات الإستاتيكية المستقلة) ، تساوى ما يلى :

$$i = S + S_0 - 3K \qquad (5 - 1)$$

وإذا كان العدد i أكبر من الصفر ، يكون الإنشاء المبحوث غير محدد إستاتيكيا . وإذا كان العدد i يساوى صفراً ، أى $i = 0$ ، يكون الإنشاء المبحوث محدداً إستاتيكيا . أما إذا كان العدد i أصغر من الصفر ، عندئذ يكون الإنشاء غير مستقر هندسياً .

ويكون الشرط $i = 0$ ، بمثابة دلالة ضرورية . ولكنها غير كافية ، للتحديد الإستاتيكى للانشاء . وإذا كان الإنشاء (الجمالون) محدداً إستاتيكيا ، عندئذ يتحقق الشرط $i = 0$ حتما . ولكن مساواة المقدار $(S + S_0 - 3K)$ للصفر ، لا تدل بعد ، على أن الإنشاء محدد إستاتيكيا . أن هذه الدلالة ،

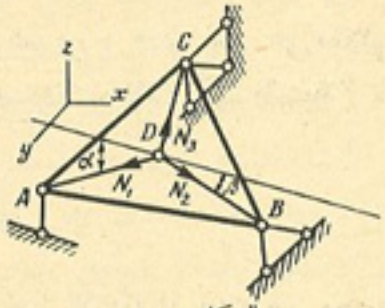
هى دلالة كمية بحتة ، ويمكن بواسطتها أن تحدد فقط ، العلاقة بين عدد المجاهيل وعدد المعادلات التى يمكن وضعها لتحديد هذه المجاهيل .

ولتقرير مسألة التحديد الإستاتيكى للانشاء ، تقريراً نهائياً ، يجب أخذ التركيب (البنيان) الهندسى للانشاء ، فى الاعتبار أيضاً ، أى يجب أن يؤخذ فى الأعتبار الترتيب المتبادل لقضبانه .

وبالنسبة للانشاء (القرص) المجسم البسيط ، الموضح فى الشكل (٥ — ٧ ، ج) ، لدينا ما يلى : $S = 6$ ، $S_0 = 6$ ، $K = 4$ (الأربطة الموضوعة عند المساند ، غير مبينة فى الشكل (٥ — ٧ ، ج) . وهكذا نحصل من الصيغة (1 — 5) على ما يلى :

$$i = 6 + 6 - 3 \times 4 = 0$$

أى يتحقق شرط التحديد الإستاتيكى . ولكن هذا الشرط بالذات ، يتحقق أيضاً ، بالنسبة للانشاء المبين فى الشكل (٥ — ٨) ، الذى يحتوى على نفس العدد من القضبان والوصلات ، ولكنه يتميز بوقوع القضبان الثلاثة AD ، BD ، CD ، فى مستو واحد . ويعتبر هذا الإنشاء لحظى التغير ، وذلك لأن الوصلة D يمكن أن تتحرك على المستقيم العمودى على المستوى ABC .



الشكل ٥ — ٨

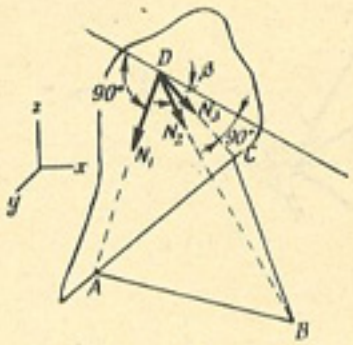
وبعد التأكد من تحقق الشرط الضرورى للتحديد الإستاتيكى للانشاء $i = 0$ ، يمكن لأجل بحث الإستقرار الهندسى للانشاء ، استخدام طريقة حمل الصفر (zero load) . وقد استخدمنا هذه الطريقة سابقاً ، عند بحث الإستقرار الهندسى للجمالونات المستوية . وتتلخص هذه الطريقة ، فى تحديد الإجهادات فى جميع قضبان الجمالون ، عند عدم وجود الأحمال الخارجية . وفى هذه الحالة إذا كانت الإجهادات فى جميع قضبان الجمالون .

مساوية للصفر حتماً ، عندئذ يكون الجمالون مستقراً هندسياً . أما عندما يحتمل أن تكون الإجهادات غير مساوية للصفر ، عندئذ يكون الجمالون لحظى التغير .

ويمكن بالنسبة للجمالون المبين فى الشكل (٥ — ٧ ، ج) أن نثبت بأنه فى حالة تأثير حمل الصفر ، تكون جميع قضبان الجمالون المذكور خاملة تماماً . وإذا قطعنا الوصلة D وأسقطنا القوى N_1 ، N_2 ، N_3 (المؤثرة فى القضبان AD ، BD ، CD) على المستوى العمودى على المستوى ADC ، فسوف نحصل (شكل ٥ — ٩) على ما يلى :

$$N_2 \cos \beta = 0$$

ومنها ينتج أن $N_2 = 0$.



الشكل ٥ — ٩

ويمكن بطريقة مماثلة ، أن نثبت بأن القوتين N_1 و N_3 مساويتان للصفر أيضاً . وببحث المثلث المستوى ABC ، يمكن أن نثبت بأن الإجهادات الناشئة فى القضبان AB ، AC ، BC ، مساوية للصفر أيضاً . إذن يكون الجمالون المبحوث ، مستقراً هندسياً ومحدداً استاتيكياً .

والآن نقوم بإستخدام هذه الطريقة لبحث الجمالون المبين فى الشكل (٥ — ٨) . نقطع الوصلة D ونسقط القوى (الإجهادات) N_1 ، N_2 ، N_3 على المحور العمودى على المستوى ABC ، فنحصل على ما يلى :

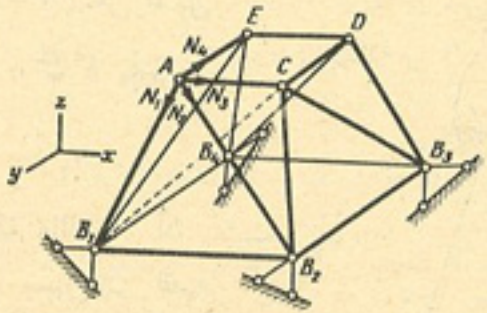
$$N_1 \times 0 + N_2 \times 0 + N_3 \times 0 = 0$$

وتتحقق هذه المعادلة عندما تختلف قيم الإجهادات N_1 ، N_2 ، N_3 عن الصفر . وفى المعادلتين الأخريين لمساقط هذه الإجهادات على المحورين الآخرين (مثلا على المحور الذى ينطبق على إتجاه القوة N_3 ، والمحور العمودى عليه ، الواقع فى المستوى ABC) سوف تدخل ثلاثة مجاهيل ،

وبالتالى قد تكون قيمها لا تساوى صفراً . ولهذا السبب ، نستنتج بأن الجمالون المبحوث ، لحظى التغير .

ونأتى الآن إلى بحث الجمالون المبين فى الشكل (٥ — ١٠) ، حيث نجد فيه ما يلى :

$$i = 8 + 16 - 3 \times 8 = 0 \quad , \quad K = 8 \quad , \quad S = 16 \quad , \quad S_0 = 8$$



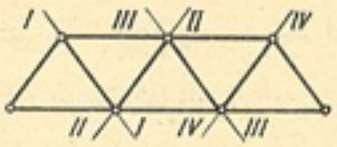
الشكل ٥ — ١٠

إذن يتحقق الشرط الضرورى للتحديد الإستاتيكى للجمالون . والآن نثبت بأن الإجهادات الناشئة فى كافة قضبان الجمالون ، عند عدم وجود الحمل ، تساوى صفراً . ولهذا الغرض ، نقطع الوصلة A ونسقط القوى N_1 ، N_2 ، N_3 ، N_4 على المحور العمودى على المستوى ACB_2B_1 . ونحصل بذلك على $N_4 = 0$. ثم نقطع الوصلة E ونثبت بأن الإجهادات الناشئة فى القضبان B_1E ، B_4E و DE تساوى صفراً . وبعد قطع الوصلات D ، C ، B_1 ، B_2 و B_4 على التوالى ، وبحث شروط توازنها ، نثبت بأن كافة قضبان الجمالون الاخرى ، خاملة أيضاً . ونستنتج من ذلك بأن الجمالون المبحوث محدد إستاتيكيا ومستقر هندسياً

إن الجمالون المبين فى الشكل (٥ — ١٠) لا يعتبر جمالونا بسيطاً وذلك لعدم إمكانية « تفكيكه » بفصل الوصلات على التوالى ، التى تتصل كل

واحدة منها بثلاثة قضبان . أن هذا الجمالون يسمى بالجمالون المعقد ويمكن الحصول عليه بمجرد تبديل قضيب واحد أو عدة قضبان بقضبان أخرى . فإذا أبعدنا القضيب أو الضلع القطرى AB_2 ووضعنا محله الضلع القطرى B_1C ، نحصل عندئذ على جمالون بسيط ، يمكن تفكيكه بفصل الوصلات التالية على التوالى : A ، E ، D ، C ، التى تتصل كل واحدة منها بثلاثة قضبان . ومن هذا الجمالون البسيط ، نحصل على الجمالون الأكثر تعقيداً ، المبين فى الشكل (٥ — ١٠) بخطوط سميكة .

وأخيراً نبحث الجمالون المستوى (الشكل ٥ — ١١) الذى ترتبط قضبانه مع بعضها بوصلات ذات مفصلات كروية ، واحد مثلثاته مثبت تماماً بواسطة ستة اربطة للاسناد . وفى هذا الجمالون ، نجد ما يلى :



الشكل ٥ — ١١

$$i = 11 + 6 - 3 \times 7 = -4 \quad ; \quad K = 7 \quad ; \quad S_0 = 6 \quad ; \quad S = 11$$

إذن يكون الجمالون غير مستقر هندسياً ، وله اربع درجات من حرية الحركة ، ويمكن أن تحدث منه انحناءات حول المحاور I ، II ، III ، IV :

البند ٥ — ٤ : طرق تحديد الإجهادات فى قضبان الجمالونات المجسمة

لتحديد الإجهادات فى قضبان الجمالونات المجسمة المحددة إستاتيكيا ، تستخدم الطرق الثلاث الرئيسية التالية :

(أ) طريقة المقاطع ،

(ب) طريقة تبديل القضبان ،

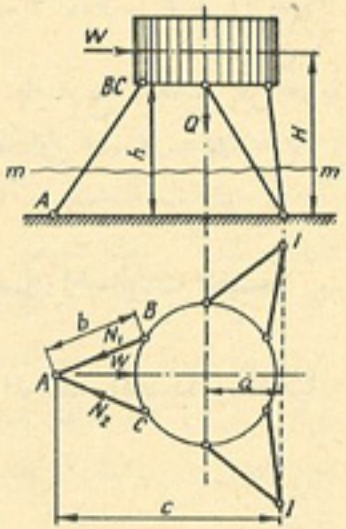
(ج) طريقة تفكيك الجمالون المجسم إلى عدة جمالونات مستوية .

والآن لنبحث كل طريقة من هذه الطرق ، بصورة مفصلة .

طريقة المقاطع : تستخدم هذه الطريقة لتحديد الإجهادات فى قضبان الجمالونات البسيطة التكوين . وتتلخص هذه الطريقة ، فى إستحداث مستوى يقطع الجمالون إلى قسمين ، بحيث يمر المستوى المذكور بالقضبان التى يراد تحديد اجهاداتها. ثم نقوم بإختيار احد القسمين المقطوعين ، ونبحثه . وتلحق بالقضبان المقطوعة ، القوى الطولية المؤثرة فيها . وتوضع معادلة توازن القوى المؤثرة فى القسم المقطوع ، الذى اخترناه من الجمالون . وهنا يمكن بصورة عامة وضع ست معادلات ، علما بأن عدد الإجهادات المجهولة ، التى يمكن تحديدها من المقطع الواحد ، لا يزيد على ستة اجهادات . وتوجد ثلاثة أنواع مختلفة لطريقة المقاطع ، وذلك تبعاً لطبيعة المعادلات الموضوعة ووضع المقطع ، وهى :

١) طريقة العزوم ، ٢) طريقة المساقط ، ٣) طريقة قطع الوصلات .

وعند استخدام طريقة العزوم ، توضع معادلة التوازن على هيئة مجموع عزوم القوى حول محور من المحاور . وهذه الطريقة مماثلة لطريقة نقطة العزم ، المبحوثة عند حساب الجمالونات المستوية . وكمثال لإستخدام هذه الطريقة ، نحدد الإجهادات N_1 و N_2 فى قضبان الجمالون المبين فى الشكل (٥ — ١٢) . نستحدث المقطع $m - m$ ونضع معادلة مجموع عزوم كافة القوى المؤثرة فى القسم العلوى المقطوع ، حول المحور $l - l$. وفى هذه الحالة ، ننقل القوى N_1 و N_2 إلى النقطة A ، وهنا نحللها إلى مركباتها الرأسية والأفقية . إذن نحصل على المعادلة التالية :



الشكل ٥ — ١٢

$$\Sigma M_l = WH - Qa - (N_1 + N_2)\, c \sin\alpha = 0$$

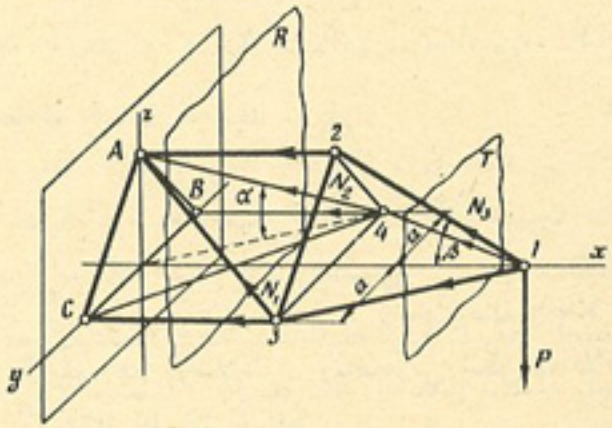
حيث تحدد الزاوية α بواسطة ظلها :

$$\tan\alpha = \frac{h}{b}$$

ومن ظروف تشابه أو تماثل الحمل ، نجد بأن $N_1 = N_2$. وبحل المعادلة المذكورة اعلاه ، نجد ما يلى :

$$N_1 = N_2 = \frac{WH - Qa}{2\, c \sin\alpha}$$

وعند إستخدام طريقة المساقط ، توضع معادلات توازن المساقط المبحوثة عند حساب الجمالونات المستوية . وكمثال لاستخدام هذه الطريقة ، نبحث مسألة تحديد الإجهادات فى الأضلاع القطرية للجمالون الكابولى (المثبت من طرف واحد) المبين فى الشكل (٥ — ١٣) . أن مثلث هذا الجمالون ABC ،



الشكل ٥ — ١٣

مثبت تماماً بواسطة ستة أربطة ، ليست واضحة فى الرسم التخطيطى . وفى هذا الجمالون [راجع الصيغة (١ — ٥)] نجد ما يلى :

$$i = 15 + 6 - 3 \times 7 = 0 \;;\; K = 7 \;;\; S_0 = 6 \;;\; S = 15$$

وبقطع الوصلات 1 ، 2 ، 3 ، 4 على التوالى ، يمكن أن نثبت بأن

الناشئة فى كافة قضبان الجمالون، عند تأثير الصفر ، تساوى
ن الجمالون محدداً إستاتيكيا ومستقراً هندسياً.

لإجهادين N_1 و N_2 نقطع الجمالون بالمستوى R ونضع معادلة
القوى المؤثرة فى القسم الأيمن المقطوع ، على المحور z :

$$\Sigma Z = -P + (N_1 + N_2) \sin \alpha =$$

على المعادلة الثانية ، بوضع معادلة مجموع عزوم هذه القوى
المحور x :

$$\Sigma M_x = N_1 a \sin \alpha - N_2 a \sin \alpha = 0$$

$$N_1 = N_2$$

ادلة المساقط ، نجد ما يلى :

$$N_1 = N_2 = \frac{P}{2 \sin \alpha}$$

التى تجعل مستوى القطع ، يفصل وصلة واحدة فقط ، نكون
طريقة قطع الوصلات . ويتضح من شكل معادلات التوازن ،
يقة مماثلة لطريقة المساقط .

طريقة قطع الوصلات ، لتحديد الإجهاد N_3 ، فى قضيب
ولى ، المبين فى الشكل (٥ — ١٣) .

صلة ا بالمستوى T ثم نضع معادلة مجموع مساقط القوى المؤثرة
حور z :

ومنها ينتج أن :

$$N_3 = \frac{P}{\sin \beta}$$

ونشير الآن إلى حالتين متميزتين ، يكون فيهما من الملائم جداً ، استخدام طريقة قطع الوصلات ، وهما :

١ — لتحديد الإجهادات فى قضبان الجمالون المجسم، المحتوى على وصلة متصلة بثلاثة قضبان ، إذا ما كانت هذه الوصلة غير معرضة لتأثير أى حمل خارجى . وفى هذه الحالة ، تكون الإجهادات فى جميع قضبان الوصلة ، كما ذكرنا أعلاه (لاحظ الشكل ٥ — ٩) مساوية للصفر .

٢ — لتحديد الإجهادات فى قضبان الوصلة المجسمة ، التى تقع جميع قضبانها ، ما عدا واحداً فقط ، فى مستو واحد مشترك . وإذا لم تكن هذه الوصلة معرضة لتأثير حمل خارجى ، أو حمل فعال واقع فى ذلك المستوى المشترك ، عندئذ يكون الإجهاد فى القضيب الذى لا يقع فى ذلك المستوى ، مساوياً للصفر .

طريقة تبديل القضبان : تستخدم هذه الطريقة لتحديد الإجهادات فى الجمالونات المجسمة المعقدة ، عندما يصبح الحساب بطريقة المقاطع معقداً بسبب عدم إمكانية الحصول على مستوى ، لا يقطع أكثر من ستة قضبان .

وطريقة تبديل القضبان مبنية على أساس تحويل الجمالون المعقد إلى جمالون بسيط ، بتبديل قضيب واحد أو عدة قضبان : لنبحث تتابع عملية حساب الجمالون المعقد ، عندما يمكن تحويله إلى جمالون بسيط ، بتبديل قضيب واحد فقط . نرمز إلى الإجهاد فى القضيب المستبدل ، بالرمز X . ونضع بدل القضيب المستبدل فى الجمالون ، القضيب البديل . وبعد هذا التبديل . يتحول الجمالون المعقد إلى جمالون بسيط . وفى هذا الجمالون البسيط ، الواقع تحت تأثير الحمل المعين والقوة X ، يحدد الإجهاد N_p فى القضيب البديل ، وهو الإجهاد الناجم عن تأثير الحمل المعين ، والإجهاد N الناشئ فى

مة الإجهاد الناشىء فى القضيب البديل ، نتيجة لتأثير وحدة
بالرمز $\overline{N}_x$. وهنا نجد بأن الإجهاد N_x يساوى ما يلى :

$$N_x = X\overline{N}_x$$

د الكلى الناشئ فى القضيب البديل . نتيجة لتأثير الحمل
X ، يساوى :

$$N_p + X\overline{N}_x$$

الون المعطى ، لايحتوى على قضيب بديل . ولذلك يجب إعتبار
ه ، مساويا للصفر ، أى كما يلى :

$$N_p + X\overline{N}_x = 0$$

ه المعادلة ، نحصل على الإجهاد فى القضيب المستبدل :

$$X = -\frac{N_p}{\overline{N}_x}$$

يد X ، يمكن إستخراج قيمة N_k فى أى قضيب من قضبان
ستخدام المعادلة التالية :

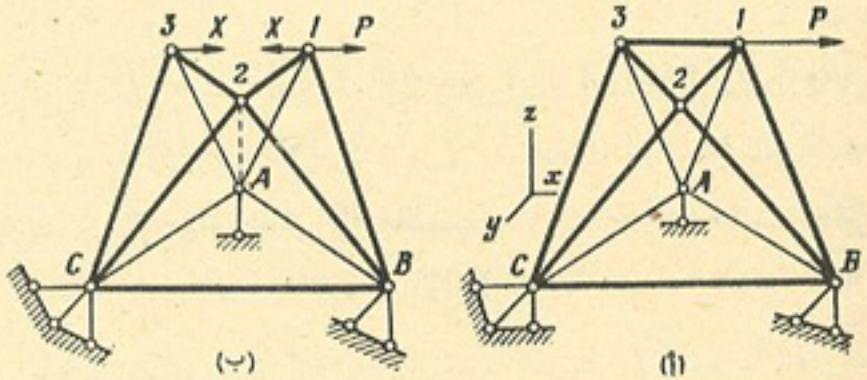
$$N_k = N_{kp} + \overline{N}_{kx}X$$

الإجهاد الناشىء فى القضيب K من الجمالون البسيط ،
نتيجة لتأثير الحمل P ،
الإجهاد الناشىء فى القضيب المذكور . نتيجة لتأثير وحدة
القوى $X = 1$.

ترتيب السابق . تتم عملية حساب الجمالونات المعقدة . حتى
تستدعى تبديل عدة قضبان ، لتحويل هذه الجمالونات إلى

المستبدلة ، يجب وضع وحل مجموعة معادلات ، تحتوى على عدد من المجاهيل ، يساوى عدد القضبان المستبدلة ، كما هو متبع عند حساب الجمالونات المستوية (راجع البند ٤ — ٤) .

نستخدم طريقة تبديل القضبان لتحديد الإجهادات فى قضبان الجمالون ، المبين فى الشكل (٥ — ١٤ ، أ) . (عند حساب هذا الجمالون يمكن كذلك إستخدام طريقة المقاطع مباشرة)



الشكل ٥ — ١٤

نتأكد فى البداية من تحقق الشرط الضرورى للاستقرار الهندسى : أن عدد قضبان الجمالون هو $S = 12$ ، وعدد الأربطة عند المساند هو $S_0 = 6$ ، وعدد الوصلات يساوى $K = 6$ ، ولدينا :

$$i = 12 + 6 - 3 \times 6 = 0$$

أى أن الشرط المذكور يتحقق تماماً .

وسوف نثبت فيما يلى ، بأن الإجهادات الناشئة فى كافة قضبان الجمالون ، عند تأثير حمل الصفر ، سوف تكون مساوية للصفر .

٥ — ١٤ ، بـ) ونحدد الإجهاد N_p الناشئ فى القضيب $A - 2$ ، نتيجة لتأثير القوة P . فى البداية نقطع الوصلة 1 ونحدد الإجهاد فى القضيب 2 — 1 . وبعد أن نقطع الوصلة 3 ، نثبت بأن القضيب 3 — 2 خامل . وبعد ذلك نقطع الوصلة 2 ونحدد N_p فى القضيب $A - 2$. ثم نوجد الإجهاد $\overline{N}_x$ الناشئ فى نفس القضيب نتيجة لتأثير القوة $X = 1$. ويمكن التعبير عن هذا الإجهاد بالشكل التالى :

$$\overline{N}_x = \overline{N'}_x + \overline{N''}_x$$

حيث $\overline{N'}_x$ — الإجهاد الناشئ فى القضيب $A - 2$ نتيجة لتأثير القوة $X = 1$ المؤثرة فى الوصلة 1 ،

$\overline{N''}_x$ — الإجهاد الناشئ فى القضيب $A - 2$ ، نتيجة لتأثير القوة $X = 1$ ، المؤثرة فى الوصلة 3 .

وتبعاً لتماثل الجمالون ، يكون لدينا :

$$\overline{N'}_x = \overline{N''}_x$$

إذن :

$$\overline{N}_x = 2\,\overline{N'}_x$$

ولكن علامة الإجهاد $\overline{N'}_x$ هى عكس علامة الإجهاد N_p ، وذلك لأن إتجاهى القوتين P و X متعاكسان (تبحث القوة X ، المؤثرة فى الوصلة 1) . وبالإضافة إلى ذلك ، أن الإجهاد $\overline{N'}_x$ أصغر من الإجهاد N_p ، بعدد من المرات يساوى P مرة .

إذن ينتج من ذلك أن :

$$\overline{N'}_x = -\frac{N_p}{P}$$

و

$$\overline{N}_x = -\frac{2\,N_p}{P}$$

والإجهاد فى القضيب المستبدل [راجع الصيغة (2 — 5)] يساوى :

$$X = -\frac{N_p}{\overline{N}_x} = \frac{N_p\,P}{2\,N_p} = \frac{1}{2}\,P$$

وبعد تحديد الإجهاد X ، يصبح من السهل إيجاد الإجهادات فى بقية القضبان :

والآن نثبت بأنه عند عدم وجود حمل خارجى ، تكون الإجهادات ، فى كافة قضبان الجمالون المبحوث ، مساوية للصفر . وعند $P = 0$ و $X = 0$ ، يكون القضيب 3 — 1 خاملاً . وبعد قطع الوصلات 1 ، 3 و 2 على التوالى ، نثبت بأن الإجهادات فى كافة القضبان الأخرى ، تكون مساوية للصفر أيضاً .

ومن الملائم إستخدام طريقة تبديل القضبان ، لبحث تكوين الجمالونات : ويجب لهذا الغرض ، تحديد الإجهاد $\overline{N}_x$ فى القضيب البديل ، الناشىء عن تأثير القوة $X = 1$. وتوجد حالتان بهذا الخصوص ، هما :

١ — إذا كانت قيمة $\overline{N}_x$ مساوية للصفر ، أى $\overline{N}_x = 0$ ، عندئذ يكتب الإجهاد على هيئة صيغة غير محددة هى $\frac{0}{0}$ ، وهذا يدل على التغير اللحظى للجمالون .

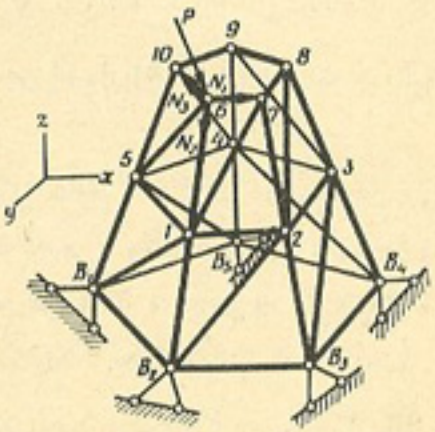
٢ — إذا كانت قيمة $\overline{N}_x$ ، لا تساوى صفراً ، أى $\overline{N}_x \neq 0$ ، عندئذ نجد بأن $X = 0$ ، وفى هذه الحالة ، عند عدم وجود أحمال خارجية ، تتحول قيمة حدى المعادلة التالية

$$N_k = N_{kp} + X\overline{N}_{kx}$$

إلى الصفر ، وهذا يدل على أن الجمالون مستقر هندسياً .

طريقة تفكيك الجمالون المجسم إلى جمالونات مستوية : أن طريقة تحديد

الإجهادات هذه . تستخدم عند بحث الجمالونات ، التى تكون فيها القضبان موضوعة بشكل مجموعات ، فى مستويات مختلفة ، تؤلف عدة جمالونات مستوية . وعند حساب مثل هذه الجمالونات ، يسلط الحمل الخارجى فى الإتجاه الذى ينطبق مع مستويات هذه الجمالونات . ثم يجرى حساب الجمالونات المستوية ، بالنسبة لتأثير الأحمال الواقعة فى مستوياتها .



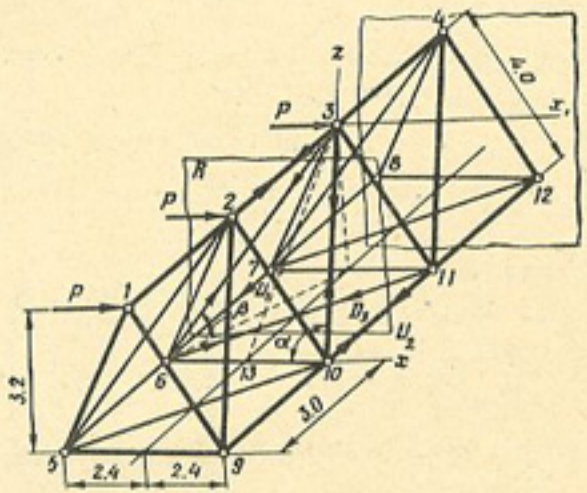
الشكل ٥ — ١٥

وكمثال لتحديد الإجهادات بهذه الطريقة ، نبحث الجمالون المجسم ، المبين فى الشكل (٥ — ١٥) . أن عدد القضبان السائدة فيه هو $S_0 = 5 \times 2 = 10$ ، وعدد قضبانه يساوى $S = 35$ ، وعدد الوصلات هو $K = 15$ ، وفيه : $i = 10 + 35 - 3 \times 15 = 0$.

إذن يتحقق شرط التحديد الإستاتيكى للجمالون . ويمكن بواسطة القطع المتتالى للوصلات 6 ، 7 ، 8 ، 9 ، 10 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 و 5 ، أن نثبت بسهولة بأنه عند $P = 0$ ، تكون الإجهادات فى كافة القضبان ، مساوية للصفر . إذن يكون الجمالون محدداً إستاتيكياً ومستقراً هندسياً . ولتحديد الإجهادات الناشئة فى قضبان الجمالون (لاحظ الشكل ٥ — ١٥) ، نتيجة لتأثير القوة (الحمل) P ، نحلل هذه القوة إلى المركبات التالية : N_1 ، N_2 ، N_3 . وبعد قطع الوصلات 7 ، 8 ، 2 و 3 ، نثبت بأن الإجهادات فى القضبان 8 — 7 ، 3 — 2 ، B_3 — 3 تساوى صفراً . وبنفس الطريقة ، نقطع الوصلات 9 ، 10 ، 6 و 5 ونثبت بأن القضبان 10 — 9 ، 4 — 10 ، 5 — 4 و B_5 — 5 هى قضبان خاملة . وسوف تعمل قضبان جمالونين مستويين فقط : B_2 ، 6 ، 7 ، B_3 (نتيجة لتأثير القوتين N_1 و N_2) و B_1 ، B_2 ، 6 ، 10 (نتيجة لتأثير القوة N_3) : وتحدد هذه الإجهادات بالطرق العادية ، المستخدمة لحساب الجمالونات المستوية .

البند ٥ — ٥ : أمثلة لتحديد الإجهادات فى قضبان الجمالون المجسم

لنبحث تحديد الإجهادات فى قضبان الجزء الهيكل المتوسط للجمالون الكابولى ، المبين فى الشكل (٥ — ١٦) ، وذلك بإستخدام طريقة المقاطع وطريقة التفكيك إلى جمالونات مستوية . وتبين فى الرسم التخطيطى أبعاد وقوة تحميل الجمالون .



الشكل ٥ — ١٦

(أ) طريقة المقاطع : نثبت فى البداية بأن الأضلاع القائمة والأضلاع القطرية 5 ، 8 ، 12 ، 9 للجمالون المستوى ، هى أضلاع خاملة . ولهذا الغرض نقطع الوصلة 9 ، التى تلتقى فيها أربعة قضبان ، ثلاثة منها ، وهى (9 — 10 ، 9 — 2 ، 9 — 1) واقعة فى مستو واحد . وهذه الوصلة غير معرضة لتأثير أى حمل خارجى ، ولهذا السبب تكون قيمة الإجهاد فى القضيب 9 — 5 مساوية للصفر . وبقطع الوصلات 5 ، 10 ، 6 ، 11 ، 7 نثبت بأن الأضلاع 10 — 5 ، 6 — 10 ، 11 — 6 ، 7 — 11 ، 12 — 7 هى أضلاع خاملة . ثم نقطع قضبان الجزء الهيكل المتوسط ، بالمستوى القاطع R .

ونستخدم طريقة العزوم لتحديد الإجهاد O_1 (فى القضيب 3 — 2) . نضع معادلة مجموع عزوم القوى ، المؤثرة فى القسم الأيسر من الجمالون ، حول المحور X ، المنطبق مع محور القضيب 10 — 6 :

$$\Sigma M_x = O_1 \times 3.2 = 0$$

إذن :

$$O_1 = 0$$

ولتحديد الإجهاد D_1 فى القضيب القطرى 6 — 3 ، والإجهاد D_2 فى القضيب القطرى 10 — 3 ، نضع معادلة مجموع مساقط الإجهادات ، المؤثرة فى القسم الأيسر من الجمالون ، على المحورين x و z على التوالى :

$$\Sigma X = 2P + (D_1 - D_2)\cos\alpha = 0$$
$$\Sigma Z = D_1 \sin\beta + D_2 \sin\beta = 0$$

ومنهما ينتج أن :

$$D_1 = -D_2$$

وبعد تعويض ذلك فى معادلة ΣX ، نحصل على :

$$D_2 = \frac{P}{\cos\alpha}$$

ومن المثلث 3 — 13 — 10 نجد ما يلى :

$$\cos\alpha = \frac{2.4}{5} = 0.48$$

إذن فإن الإجهادين فى الضلعين أو القضيبين القطريين يساويان ما يلى :

$$D_2 = \frac{P}{0.48} = \frac{25}{12}P$$

$$D_1 = -\frac{25}{12}P$$

ولتحديد الإجهاد U_1 فى قضيب الوتر 7 — 6 والإجهاد U_2 فى قضيب الوتر 11 — 10 ، نضع معادلة مجموع عزوم القوى ، المؤثرة فى القسم الأيسر من الجمالون ، حول المحور x_1 ، المار فى النقطة 3 ، بصورة موازية للمحور x :

$$\Sigma M_{x_1} = -(U_1 + U_2) \times 3.2 = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$U_1 = -U_2$$

والآن نضع معادلة مجموع عزوم القوى ، المؤثرة فى القسم الأيسر من الجمالون ، حول المحور z المار فى النقطة 3 :

$$\Sigma M_z = -6P - 3P + 2.4\,U_1 - 2.4\,U_2 = 0$$

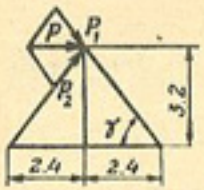
وبعد التعويض عن U_2 ، U_1 نحصل على ما يلى :

$$U_1 = \frac{9P}{4.8} = \frac{15}{8}P$$

إذن :

$$U_2 = -\frac{15}{8}P$$

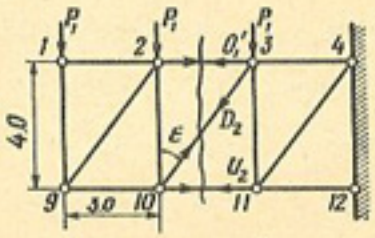
(ب) طريقة التفكيك إلى جمالونات مستوية : نحلل أولا القوى P إلى مركبات واقعة فى مستويات الجمالونات المائلة . أن المركبتين P_1 و P_2 تساويان ما يلى (شكل ٥ — ١٧) :



الشكل ٥ — ١٧

$$P_1 = P_2 = \frac{P}{2\cos\gamma} = \frac{5}{6}P$$

نفصل الجمالون المستوى 9 — 12 — 4 — 1 (شكل ٥ — ١٨) ونحدد الإجهاد O'_1 فى قضيب الوتر العلوى 3 — 2 . وبالإضافة إلى ذلك سيؤثر فى القضيب 3 — 2 ، الإجهاد O''_1 ، فى حالة اشتغال الجمالون المستوى 8 — 4 — 1 — 5 (راجع الشكل ٥ — ١٦) . أن اتجاهى القوتين P_1 و P_2 متعاكسان ، ولذلك يكون لدينا :



الشكل ٥ — ١٨

$$O'_1 = -O''_1$$

والاجهاد الكلى O_1 ، الناجم عن جمع الإجهادين المذكورين ، يساوى صفراً .

ونحصل على الإجهاد فى الضلع (القضيب) القطرى D_2 ، بإسقاط القوى على المحور العمودى على الوترين :

$$\Sigma Y = -2P_1 + D_2\cos\epsilon = 0$$

وبتعويض $P_1 = \frac{5}{6}P$ و $\cos\epsilon = 0.8$ ، نحصل على ما يلى :

$$D_2 = \frac{2 \times 5 \times 5}{6 \times 4}P = \frac{25}{12}P$$

ويتضح بأن الإجهاد D_1 يساوى ما يلى :

$$D_1 = -D_2 = -\frac{25}{12}P$$

وبوضع معادلة مجموع عزوم القوى اليسرى ، حول النقطة 3 نحصل على ما يلى :

$$\Sigma M_3 = -6P_1 - 3P_1 - 4U_2 = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$U_2 = -\frac{9P_1}{4} = -\frac{9 \times 5}{6 \times 4}P = -\frac{15}{8}P$$

والإجهاد يساوى :

$$U_1 = -U_2 = \frac{15}{8}P$$

إن نتائج الحساب تتطبق أو تتفق مع النتائج التى حصلنا عليها سابقاً بإستخدام طريقة المقاطع .

الفصل السادس

نظرية طاقة الانفعال والطرق العامة لتحديد الإزاحات

البند ٦ — ١ : ملاحظات عامة

عند حساب الإنشاءات غير المحددة إستاتيكياً ، نحتاج بالإضافة إلى معادلات التوازن ، كما هو معروف ، إلى وضع وحل معادلات الإزاحات . لوضع مثل هذه المعادلات ، يجب تحديد التشوهات والإنفعالات فى مختلف قطع الإنشاء . وهذا ما نفعله فى معظم الأحيان ، عند حساب الإنشاءات المحددة إستاتيكياً ، التى يجب أن تكون جاسئة إلى حد كاف ، بالإضافة إلى كونها جيدة المقاومة . وذلك لمنع نشوء أية تشوهات أو انفعالات مفرطة ، عند تعرض الإنشاءات المذكورة إلى أحمال التشغيل (working loads) . إن ما ذكرناه هنا ، يدل على أن دراسة الطرق العامة لتحديد إزاحات (تشوهات وانفعالات) الإنشاءات المرنة ، تعتبر واحدة من أهم مسائل الميكانيكا الإنشائية .

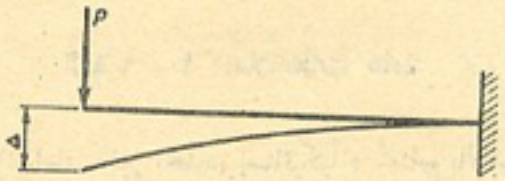
وسوف نبحث فى هذا الفصل ، الطريقة العامة لتحديد التشوهات والإنفعالات فى الإنشاءات الاطارية (مثل العتبات والاطر والعقود وغيرها) . وسنشرح مقدماً ، بعض المسائل المتعلقة بتحديد الشغل الناجم عن القوى الخارجية وطاقة الإنفعال ، فى الإنشاءات المختلفة .

البند ٦ — ٢ : شغل القوى الخارجية

عند تحميل الإنشاء ، تخرج قطعه الانشائية عن حالة السكون وتكتسب سرعة وتعجيلا معينين . وكلما قلت سرعة زيادة الحمل ، قلت سرعة تطور التشوهات فى الإنشاء . وعند زيادة الأحمال ببطء ، تكون قوى القصور الذاتى المتولدة

أثناء انتقال الإنشاء إلى مرحلة التشوه ، ضئيلة للغاية بحيث يمكن إهمالها . إن هذا النوع من التحميل التدريجي ، يسمى بالتحميل الاستاتيكي .

والآن نحدد شغل القوة والحمل الخارجي P ، المسلط تدريجياً (استاتيكياً) على أحد الإنشاءات المرنة (شكل ٦ — ١) ، الذى تخضع مادته لقانون هوك . وعندما



الشكل ٦ — ١

تكون التشوهات (الإنفعالات) صغيرة ، نطبق على الإنشاء قانون تراكب القوى ، وبالتالى تكون إزاحات بعض النقاط والمقاطع المنفردة للانشاء ، متناسبة طردياً مع مقدار الحمل الذى أدى إلى حدوث هذه الإزاحات . وبصورة عامة ، يمكن التعبير عن هذه العلاقة بالمعادلة التالية :

$$\Delta = a P \qquad (6 - 1)$$

حيث Δ — الإزاحة فى إتجاه تأثير القوة أو الحمل P ،

a — معامل تعتمد قيمته على مادة وتصميم وأبعاد الإنشاء .

والآن نزيد قيمة الحمل P بمقدار صغير هو dP . وهذه الزيادة تؤدى إلى زيادة الإزاحة بمقدار $d\Delta$. نضع معادلة الشغل الابتدائى للحمل الخارجي P على امتداد الإزاحة $d\Delta$ ، بإهمال القيم المتناهية الصغر ، من الدرجة الثانية :

$$dA = (P + dP)\, d\Delta = P \times d\Delta$$

وبالتعبير عن $d\Delta$ [على أساس الصيغة (1 — 6)] بواسطة المقدار $a\,dP$ ، نحصل على ما يلى :

$$dA = P \times d\Delta = a\, P \times dP$$

وبأخذ تكامل هذه الصيغة ، فى حدود التغير الكامل للحمل من الصفر إلى القيمة القصوى ، نحصل على صيغة تحديد الشغل المنجز من قبل الحمل الخارجي P ، المسلط تدريجيا (إستاتيكياً) :

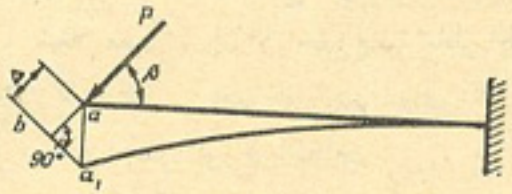
$$A = a \int_0^P P \times dP = \frac{a P^2}{2}$$

وبما أن $\Delta = a P$ ، إذن يمكن كتابة الصيغة التى حصلنا عليها ، بالشكل التالى :

$$A = \frac{1}{2} P \Delta$$

وبصورة عامة قد لا ينطبق إتجاه الحمل P ، مع اتجاه الإزاحة التى يولدها .

وبما إن مقدار الشغل يحدد بضرب القوة فى المسافة المقطوعة فى إتجاه هذه القوة إذن يجب دائما أن تعتبر Δ ، بمثابة مسقط الإزاحة الفعلية (الكلية) لنقطة تأثير الحمل ، على اتجاه الحمل . وعلى سبيل المثال ، عند تأثير الحمل P بزاوية β مع المحور الأفقى للعتبة (شكل ٦ — ٢) ، تكون قيمة الإزاحة Δ مقاسة بقيمة المستقيم ab (الذى يمثل مسقط الإزاحة الفعلية aa_1 ، على إتجاه الحمل P) .



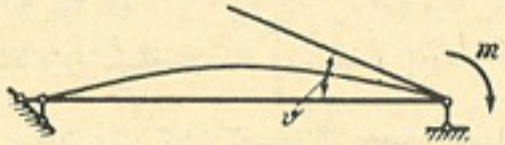
الشكل ٦ — ٢

وفى حالة تعرض الإنشاء لزوج من القوى ، بعزم قدره $\mathfrak{M}$ (عزم مركز) ، يمكن الحصول على صيغة الشغل ، بطريقة مماثلة للطريقة المذكورة سابقاً . وفى هذه الحالة ، يجب إختيار شكل الإزاحة المناظر للعزم المركز ، وسيكون هذا زاوية دوران مقطع العتبة ، المعرض لتأثير العزم .

ونجد على سبيل المثال ، بأن شغل العزم المسلط إستاتيكياً على العتبة المبينة فى الشكل (٦ — ٣) ، يساوى ما يلى :

$$A = \frac{1}{2} \mathfrak{M} \vartheta$$

حيث ϑ — زاوية الدوران (بالزوايا النصف قطرية radians) لمقطع العتبة ؛ المعرض لتأثير العزم m .



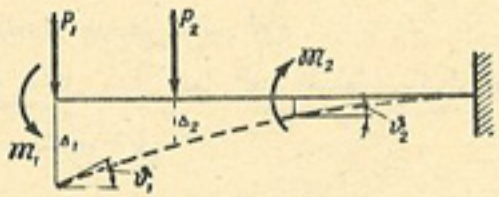
الشكل ٦ — ٣

وهكذا نجد بأن شغل الحمل الخارجي المؤثر استاتيكياً على الإنشاء ، يساوى نصف حاصل ضرب قيمة هذا الحمل فى مقدار الإزاحة المناظرة له .

ولتعميم النتيجة التى توصلنا إليها ، نصطلح على إطلاق اسم الحمل ، على أية قوة مؤثرة فى الإنشاء المرن ، أى ليس على القوة أو الحمل المركز فقط ، بل كذلك على العزم والحمل الموزع بانتظام وغير ذلك .

وسوف نعنى بكلمة الإزاحة ، ذلك النوع من الإزاحة ، التى على امتدادها ينجز الحمل العام ، شغلا معيناً . إن الإزاحة الخطية تناظر الحمل المركز P ، والإزاحة الزاوية تناظر العزم m . ومساحة الرسم البيانى للازاحات فى القسم الذى يؤثر فيه الحمل ، تناظر الحمل الموزع بانتظام .

وعندما يتعرض الإنشاء للتأثير الإستاتيكى لمجموعة من القوى الأحمال الخارجية ، يكون شغل هذه القوى مساوياً لنصف مجموع حاصل ضرب كل قوة فى قيمة الإزاحة المناظرة لها ، الناجمة عن تأثير مجموعة القوى بأكملها . وعلى سبيل المثال ، عند تعرض العتبة المبينة فى الشكل (٦ — ٤) لتأثير الحملين المركزين



الشكل ٦ — ٤

P_1 و P_2 ، والعزمين المركزين m_1 و m_2 ، يكون شغل القوى الخارجية مساوياً لما يلى :

$$A = \frac{P_1\Delta_1}{2} + \frac{P_2\Delta_2}{2} + \frac{m_1\vartheta_1}{2} - \frac{m_2\vartheta_2}{2}$$

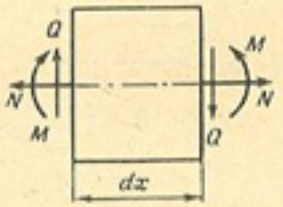
إن العلاقة السالبة الموجودة قبل الحد الأخير من هذه الصيغة ، وضعت لأن اتجاه زاوية دوران المقطع العرضى للعتبة ϑ_2 ، الذى يؤثر فيه العزم m_2 ، معاكس لاتجاه هذا العزم .

إذن نجد أن :

$$A = \Sigma \frac{P_i\,\Delta_i}{2} + \Sigma \frac{m_i\vartheta_i}{2} \qquad (2-6)$$

ويمكن كذلك التعبير عن شغل القوى الخارجية ، المنجز على امتداد الإزاحات الناجمة عن هذه القوى ، بواسطة القوى الداخلية (عزوم الانحناء والقوى الطولية وقوى القص) ، الناشئة فى المقاطع العرضية لقضبان الإنشاء .

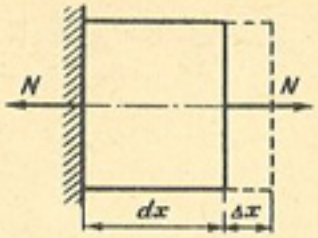
نفصل من القضيب مقطعين عموديين على محوره (شكل ٦ — ٥) ، وقطعة متناهية الصغر طولها dx (القطعة dx) . إن القضيب يتألف من عدد لا نهائى الكبر من هذه القطع . وعندما تؤثر جميع الأحمال فى مستوى محور القضيب ، تكون القطعة dx معرضة لتأثير القوة الطولية N وعزم الانحناء M وقوة القص Q .



الشكل ٦ — ٥

إن القوى أو الإجهادات N ، M ، Q هى عبارة عن قوى داخلية بالنسبة للقضيب ككل . ولكنها بالنسبة للقطعة المفصولة dx ، تعتبر بمثابة قوى خارجية ، ولذلك يمكن الحصول على مقدار الشغل A ، باعتباره مجموعاً متكاملا للأشغال المنجزة من قبل القوى المتدرجة الزيادة N ، M ، Q على امتداد تشوهات القطع dx ، المناظرة لهذه القوى . ولنبحث الآن تأثير كل قوة من هذه القوى فى القطعة dx ، على انفراد .

إن القطعة dx ، المعرضة لتأثير القوة الطولية N فقط ، مبينة فى الشكل



الشكل ٦ – ٦

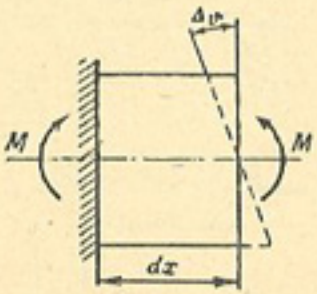
(٦ – ٦) . وإذا اعتبرنا المقطع الأيسر منها ثابتاً تماماً ، عندئذ نجد بأن مقطعها الأيمن سينزاح إلى اليمين بتأثير القوى الطولية ، بمسافة تساوى :

$$\Delta_x = \frac{Ndx}{EF}$$

حيث EF – جسوءة المقطع العرضى للقضيب فى حالة الشد (أو الانضغاط) .

وعلى امتداد هذه الإزاحة ، تنجز القوى الطولية N المتدرجة الزيادة ، شغلا يساوى ما يلى :

$$dA_N = \frac{1}{2} N\Delta_x = \frac{1}{2} N \frac{Ndx}{EF}$$



الشكل ٦ – ٧

إن القطعة dx المعرضة لتأثير عزوم الإنحناء M ، مبينة فى الشكل (٦ – ٧) . فإذا كان مقطعها الأيسر مثبتاً تماماً ، عندئذ نجد بأن زاوية الدوران المتبادلة للمقاطع الطرفية للقطعة المذكورة ، ستساوى زاوية الدوران $\Delta\vartheta$ لمقطعها الأيمن ، أى :

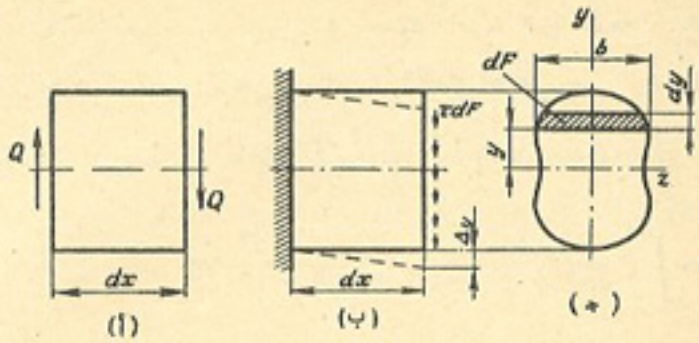
$$\Delta\vartheta = \frac{Mdx}{EJ}$$

حيث EJ – جسوءة المقطع العرضى للقضيب ، فى حالة الانحناء .

وعلى مدى هذه الازاحة الزاوية ، سوف ينجز العزم M المؤثر إستاتيكياً ، الشغل التالى :

$$dA_M = \frac{1}{2} M\Delta\vartheta = \frac{1}{2} M \frac{Mdx}{EJ}$$

ويبين الشكل (٦ – ٨ ، أ) القطعة dx ، الواقعة تحت تأثير قوى القص Q بعد تثبيت مقطعها الأيسر (الشكل ٦ – ٨ ، ب) ، تسلط على المقطع الأيمن الإجهادات المستعرضة أو إجهادات القص $\tau\, dF$ ، التى محصلتها قوة القص Q وهذه الإجهادات تحدد فى حالة الانحناء باستخدام صيغة جورافسكى التالية :



الشكل ٦ – ٨

$$\tau\, dF = \frac{QS}{Jb} dF$$

حيث dF – مساحة الشريط الأفقى ذى العرض المتناهى الصغر ، التابع للمقطع الطرفى للقطعة dx ، والواقع على مسافة قدرها y من محور التعادل (شكل ٦ – ٨ ، ج) .

S – العزم الاستاتيكى حول المحور z ، لذلك القسم من المقطع ، الذى يقع إلى أعلى (أو أسفل) ذلك الشريط .

إن الإزاحة المطلقة (قوة القص) لشريطين متماثلين (يعود أحدهما إلى المقطع الطرفى الأيسر للقطعة dx ، والثانى إلى المقطع الطرفى الأيمن لهذه القطعة) بالنسبة لبعضهما البعض ، أى الإزاحة المتبادلة ، تساوى إزاحة الشريط الأيمن وهى $\gamma\, dx$ (وذلك لأن الشريط الأيسر يعتبر ثابتاً) ، ويمكن إيجاد قيمتها من الصيغة التالية :

$$\gamma\, dx = \frac{\tau}{G} dx$$

حيث γ – زاوية القص .

وبناء على ذلك ، يمكن تحديد الشغل الذى أنجزته قوة القص $\tau\, dF$ المتناهية الصغر ، على امتداد الإزاحة $\gamma\, dx$ ، من حاصل الضرب التالى :

$$\frac{1}{2} \tau\, dF \times \gamma\, dx$$

وبأخذ تكامل الصيغة الأخيرة . فى حدود المقطع F بأجمعه . نحصل على العمل الذى تنجزه كافة قوى القص . المؤثرة فى المقطع العرضى :

$$dA_Q = \int_F \frac{1}{2}\,\tau\gamma\,dx\,dF = \int_F \frac{\tau^2\,dx}{2G}\,dF =$$

$$= \int_F \frac{Q^2}{J^2}\frac{S^2}{b^2}\frac{dx}{2G}\,dF = \frac{Q^2\,dx}{2GJ^2}\int_F \frac{S^2}{b^2}\,dF = \eta\,\frac{Q^2\,dx}{2GF}$$

حيث GF — جسوءة المقطع العرضى للقضيب فى حالة القص .

$\eta = \frac{F}{J^2}\int_F \frac{S^2}{b^2}\,dF$ — معامل لا بعدى . يعتمد على شكل المقطع العرضى للقضيب فقط .

وإذا رمزنا إلى المقدار $\eta\,\frac{Q\,dx}{GF}$ بالرمز Δ_r . يمكننا التعبير عن المقدار dA_Q بالشكل التالى أيضاً :

$$dA_Q = \frac{1}{2}\,Q\,\Delta_r = \frac{1}{2}\,Q\,\frac{Q\,dx}{GF}\,\eta$$

ويمكن اعتبار المقدار Δ_r معبراً عن الإزاحة المتبادلة للمقاطع الطرفية للقطعة dx . مع بعضها البعض (لاحظ الشكل ٦ — ٨ . ب) . وعند تحديد قيمة المعامل η للمقطع المستطيل . يجب تعويض الصيغ التالية فى معادلة η :

$$F = bh,\quad J = \frac{bh^3}{12},\quad S = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

عندئذ تكون قيمة المعامل η للمقطع المستطيل . مساوية 1.2 . أى $\eta = 1.2$. وللمقطع الدائرى $\eta = \frac{10}{9}$. ويمكن أن تؤخذ القيمة التقريبية التالية للمعامل $\eta = \frac{F}{F_w}$. بالنسبة للمقطع شكل 1 . حيث F_w تمثل مساحة وترة المقطع 1 .

وفى حالة تعرض القطعة المفصولة للتأثير الموحد للقوة الطولية N وعزم الانحناء M وقوة القص Q . نجد بأن شغل كل قوة من هذه القوى . المنجز على امتداد الإزاحات الناشئة عن تأثير القوى الأخرى . يساوى صفراً . ولذلك يكون الشغل الكلى مساوياً لما يلى :

$$dA = dA_N + dA_M + dA_Q = \frac{1}{2}\left(N\frac{N\,dx}{EF} + M\frac{M\,dx}{EJ} + Q\frac{Q\,dx}{GF}\,\eta\right)$$

وبأخذ تكامل الصيغة dA فى حدود طول كل قسم l من أقسام القضبان جميعها ، وإجراء عملية الجمع فى كافة أقسام الإنشاء ، نحصل على الصيغة التالية . لحساب شغل القوى الخارجية ، أى حساب شغل هذه القوى على امتداد الإزاحات الناجمة عنها ، وهذه الصيغة هى :

$$A = \frac{1}{2}\left(\Sigma\int_0^l M\frac{M\,dx}{EJ} + \Sigma\int_0^l N\frac{N\,dx}{EF} + \Sigma\int_0^l Q\frac{Q\,dx}{GF}\,\eta\right) \qquad (6-3)$$

أو

$$A = \Sigma\int_0^l \frac{M^2\,dx}{2\,EJ} + \Sigma\int_0^l \frac{N^2\,dx}{2\,EF} + \Sigma\int_0^l \frac{Q^2\,dx}{2\,GF}\,\eta \qquad (6-4)$$

إن معاملات الضرب M ، N ، Q فى الصيغة (6—3) تمثل الإجهادات (القوى) الداخلية فى المقطع العرضى للقضيب ، ذى الإحداثى السينى x . أما معاملات الضرب $\frac{M\,dx}{EJ}$ ، $\frac{N\,dx}{EF}$ ، $\frac{Q\,dx}{GF}\,\eta$ ، فإنها تمثل التشوهات المناظرة لها . الحاصلة فى القطعة dx من القضيب . أن الصيغ التى حصلنا عليها ، تعبر عن شغل القوى الخارجية (الأحمال الخارجية) . بواسطة الإجهادات (القوى) الداخلية فى القضبان . ويتضح من الصيغة (4 — 6) ، بأن شغل الأحمال (القوى) الخارجية ، المنجز على امتداد الإزاحات الناجمة عنها . يكون موجباً دائماً .

البند ٦ — ٣ : طاقة الانفعال

عند تحميل الجسم ، تنجز الأحمال (القوى) الخارجية شغلا معيناً . ويصرف قسم معين من هذا الشغل للتغلب على الاحتكاك الداخلى فى المادة ، ولتغيير درجة الحرارة والخواص المغنطيسية للجسم . ويكون القسم المذكور من الشغل ، فى

المواد التي يمكن اعتبارها مرنة ، ضئيلا ويمكن إهماله عند الحساب . وبناء على ذلك ، يمكن أن نعتبر بأن جميع شغل الأحمال الخارجية ، فى الإنشاءات المصنوعة من المواد المرنة ، يتحول إلى طاقة انفعال (طاقة وضع ناجمة عن التشوهات) ، وتتراكم هذه الطاقة فى الجسم ، بزيادة حجم التشوهات ، الناجمة عن تأثير الأحمال الخارجية . وللجسم المرن قابلية لتجميع (تركيم) الطاقة المصروفة من قبل الأحمال (القوى) الخارجية . وأثناء تحميل الجسم ، تظهر طاقة الانفعال على هيئة شغل تنجزه القوى الداخلية ، المؤثرة فى الجسم (مثل عزوم الانحناء والقوى الطولية وقوى القص ، المؤثرة فى المقاطع العرضية لقطع أو قضبان الإنشاءات الإطارية) . ويمكن استناداً إلى قانون حفظ الطاقة ، أن نعتبر بأن جميع شغل الأحمال الخارجية ، أى الشغل A ، يتحول إلى طاقة انفعال W للإنشاء ، أى أن :

$$A = W$$

نعوض فى هذه المعادلة ، قيمة A المستخرجة من الصيغة (4 — 6) ، فنحصل على ما يلى :

$$W = \Sigma \int_0^l \frac{M^2 dx}{2\,EJ} + \Sigma \int_0^l \frac{N^2\,dx}{2\,EF} + \Sigma \int_0^l \frac{Q^2\,dx}{2\,GF}\,\eta \qquad (6-5)$$

إن تحليل معادلة طاقة الانفعال هذه ، يساعد على التوصل إلى النتائج التالية :

١ — إن طاقة الانفعال موجبة دائماً ، وذلك لاحتواء صيغتها على مربعات القوى (الإجهادات) الداخلية M ، N ، Q .

٢ — إن طاقة الانفعال عبارة عن دالة متجانسة من الدرجة الثانية ، للإجهادات ، وللإزاحات أيضاً (وذلك لأن الإزاحات تتناسب طرديا مع الإجهادات) .

٣ — إن طاقة الانفعال الناجمة عن تأثير مجموعة معينة من القوى أو الأحمال ، لا تساوى مجموع طاقات الانفعال الناجمة عن تأثير كل قوة من القوى على انفراد ، إذن لا يمكن تطبيق قانون تراكب القوى بالنسبة لطاقة الانفعال .

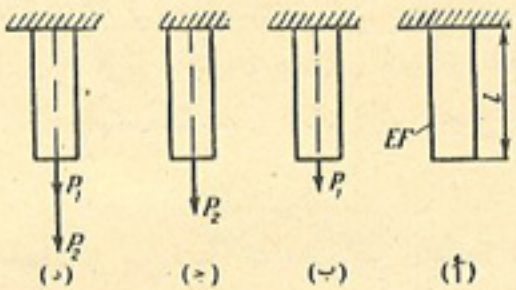
وهذا نتيجة لكون طاقة الانفعال تعتمد على مربعات القوى الداخلية M ، N ، Q ، ومربع المجموع لا يساوى مجموع المربعات بتاتا .

٤ — لا تعتمد كمية طاقة الإنفعال على تتابع وضع الأحمال (وذلك لأن قيم M و N و Q لا تعتمد بدورها على تتابع وضع الأحمال) . ولكنها تحدد اعتماداً على الحالة النهائية للانشاء أو الجسم المرن .

ويمكن إيضاح صحة النتيجة الثالثة من النتائج المذكورة أعلاه ، ببحث المثال التالى :

نبحث ثلاث حالات من التحميل الاستاتيكى للعتبة المبينة فى الشكل (٦ — ٩ ، أ) ، وهى :

١ — التحميل بحمل واحد فقط ، هو P_1 (شكل ٦ — ٩ ، ب) .



الشكل ٦ — ٩

٢ — التحميل بحمل واحد فقط ، هو P_2 (شكل ٦ — ٩ ، ج) .

٣ — التحميل بحملين فى نفس الوقت ، وهما P_1 و P_2 (شكل ٦—٩ ، د) .

وبناء على الصيغة (5 — 6) ، نجد بأن طاقة انفعال العتبة ، فى الحالتين الأولى والثانية ، تساوى مايلى :

$$W_1 = \frac{P_1^2\,l}{2\,EF}$$

$$W_2 = \frac{P_2^2\,l}{2\,EF}$$

أما طاقة الانفعال فى الحالة الثالثة ، فتساوى ما يلى :

$$W_3 = \frac{(P_1 + P_2)^2 l}{2EF} = \frac{P_1^2 l}{2EF} + \frac{P_2^2 l}{2EF} + \frac{P_1 P_2 l}{EF}$$

وبمقارنة W_3 مع المجموع $W_1 + W_2$. نجد بأن مجموع طاقتى الانفعال الناجمتين عن تأثير كل حمل من الحملين على انفراد ، لا يساوى طاقة الانفعال الناجمة عن مجموع الحملين . وفى هذه الحالة ، يكون لدينا ما يلى :

$$W_3 = W_1 + W_2 + \frac{P_1 P_2 l}{EF}$$

ولكى نفهم المعنى الفيزيائى للحد الأخير ، نفرض بأن حالة التحميل الاستاتيكى للعتبة بالحملين P_1 و P_2 تتم بالشكل التالى* : نفرض بأننا فى البداية وضعنا الحمل المتدرج الزيادة P_1 على العتبة (لاحظ الشكل ٦ — ٩ ، أ) ، وبعد وصول هذا الحمل إلى قيمته القصوى ، نبدأ بوضع الحمل المتدرج الزيادة أيضاً P_2 على العتبة المذكورة ، ونتيجة لذلك ، نجد بأن المقطع السفلى للعتبة ، ومعه الحمل P_1 ، ينزاح إزاحة إضافية (نتيجة لتأثير الحمل P_2) بمسافة قدرها $\frac{P_2 l}{EF}$.

وبما أن الحمل P_1 يبقى ثابتاً أثناء الزيادة المتدرجة للحمل P_2 ، فإنه ينجز على امتداد هذه الإزاحة الإضافية ، الناجمة عن تأثير الحمل P_2 ، شغلا يساوى $\frac{P_1 P_2 l}{EF}$ من الناحية العددية .

وهكذا نجد بأن الحد $\frac{P_1 P_2 l}{EF}$ فى صيغة W_3 ، يعبر عن الشغل الإضافى للحمل P_1 على امتداد الإزاحة الناشئة فى اتجاهه الناجمة عن تأثير الحمل P_2 (أو عند الترتيب العكسى لوضع هذين الحملين ، يعبر عن شغل الحمل P_2 على امتداد الإزاحة الناجمة عن الحمل P_1) .

وهكذا ، بالفعل ، عند تحديد طاقة انفعال الإنشاء أو الجسم المرن ، لا يمكن استخدام مبدأ تراكب القوى ، لأنه فى هذه الحالة ستفقد الحدود المعبرة عن شغل بعض الأحمال ، على امتداد الإزاحات الناشئة عن تأثير احمال أخرى .

* نعتبر بأن كمية طاقة الانفعال ، لا تعتمد على طريقة أو نظام التحميل .

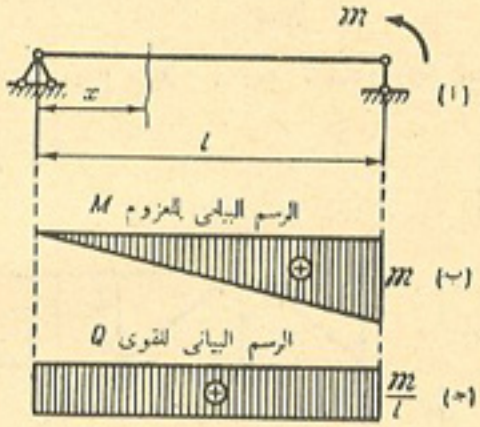
مثال ١ : يطلب تحديد كمية طاقة الانفعال ، فى العتبة البسيطة ذات المقطع المستطيل ، الذى عرضه b وارتفاعه h ، التى يؤثر فى طرفها الايمن ، العزم $\mathfrak{m}$ (شكل ٦ — ١٠ ، أ) .

الحل : يبين الشكل (٦ — ١٠ ، ب ، ج) الرسوم البيانية لعزوم الانحناء M وقوى القص Q فى العتبة التى يجرى بحثها* أن معادلتى القوتين المذكورتين ، تكونان على الشكل التالى :

$$M = \frac{\mathfrak{m}}{l} x$$

و

$$Q_x = \frac{\mathfrak{m}}{l}$$



الشكل ٦ — ١٠

وبتعويض قيمتى M و Q المستخرجتين من صيغة طاقة الانفعال ، وهى الصيغة (5 — 6) ، نحصل على ما يلى :

$$W = \int_0^l \frac{M^2\,dx}{2\,EJ} + \int_0^l \frac{Q^2\,dx}{2\,GF}\,\eta = \frac{\mathfrak{m}^2}{2l^2 EJ}\int_0^l x^2\,dx + \frac{\mathfrak{m}^2}{2l^2 GF}\,\eta \int_0^l dx =$$

$$= \frac{\mathfrak{m}^2}{2l^2}\left(\frac{l^3}{3\,EJ} + \frac{\eta l}{GF}\right) = \frac{\mathfrak{m}^2}{2l}\left(\frac{l^2}{3\,EJ} + \frac{\eta}{GF}\right)$$

* أن القوى الطولية فى المقاطع العرضية للعتبة التى يجرى بحثها ، تساوى صفراً .

ونحدد إلى أى مدى تؤثر قوة القص ، على كمية طاقة الانفعال . ولهذا الغرض ، نعوض القيم التالية فى الصيغة التى حصلنا عليها ، وهذه القيم هى :

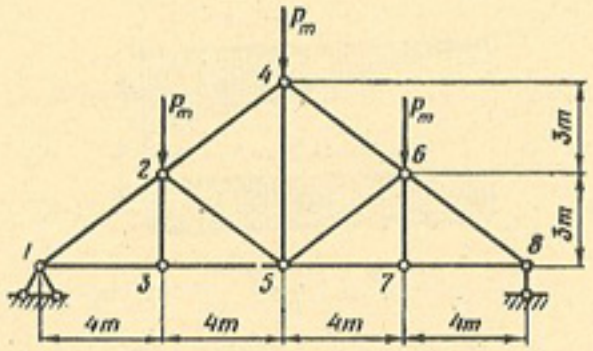
$G = 0.4E$ ، $F = bh$ ، $J = \frac{bh^3}{12}$ و $\eta = 1.2$ (للمقطع المستطيل) . إذن نجد بأن :

$$W = \frac{\text{Ш}^2}{2l}\left(\frac{l^2}{\frac{3E \times bh^3}{12}} + \frac{1.2}{0.4E \times bh}\right) = \frac{2\text{Ш}^2 l}{Ebh^3}\left[1 + \frac{3}{4}\left(\frac{h}{l}\right)^2\right]$$

أن الحد الثانى الموضوع فى داخل الأقواس المربعة ، يبين تأثير قوة القص . وكلما زادت نسبة ارتفاع العتبة إلى باعها ، كلما كان ذلك التأثير ملموسا أكثر . وعندما تكون النسبة كما يلى : $\frac{h}{l} = \frac{1}{5}$ (قلما تكون هذه النسبة أكثر من ذلك) ، نجد بان :

$$W = \frac{2\text{Ш}^2 l}{Ebh^3}(1 + 0.03)$$

أى بقدر تأثير قوة القص بمقدار 3% . وعند الأبعاد العادية للعتبة ، يكون هذا التأثير اقل من ذلك .



الشكل ٦ — ١١

مثال ٢ : يطلب تحديد كمية طاقة الانفعال فى الجمالون المبين فى الشكل (٦ — ١١) ، مع العلم بأن مساحة جميع المقاطع العرضية لقضبان الجمالون متساوية تماماً ، وتساوى F .

الحل : أن عزوم الانحناء وقوى القص فى المقاطع العرضية لجميع قضبان الجمالون ، تساوى صفراً ، أما القوى الطولية N والجسوءات EF فتكون ثابتة على الطول الكلى للقضيب . وبناء على ذلك ، نجد بأن صيغة طاقة الانفعال (5 — 6) للجمالون ، تأخذ الشكل التالى :

$$W = \Sigma \frac{N^2}{2EF}\int_0^l dx = \Sigma \frac{N^2 l}{2EF} \qquad (6 — 6)$$

حيث N — الإجهاد الناشىء فى القضيب ، نتيجة لتأثير الحمل الخارجى ، l — طول القضيب .

وتشير العلامة Σ إلى أن جمع طاقات الانفعال ، يجب أن يتم لجميع قضبان الجمالون . وفى هذه الحالة يمكن إهمال القضبان التى فيها $N = 0$ ، وذلك لأنه بالنسبة لهذه القضبان يكون المقدار $\frac{N^2 l}{2EF}$ مساوياً للصفر ، أى $\frac{N^2 l}{2EF} = 0$.

وسوف نقوم بحساب طاقة الانفعال فى الجمالونات ، بالطريقة المبينة فى الجدول (٦ — ١) .

جدول ٦ — ١

رقم القضيب	الإجهاد N* (بالأطنان)	N^2 (بالأطنان المربعة)	l (متر)	$N^2 l$ (بالأطنان المربعة × متر)
١	٢	٣	٤	٥
1 — 2; 6 — 8	$-\frac{5}{2}P$	$\frac{25}{4}P^2$	5	$\frac{125}{4}P^2$
2 — 4; 4 — 6	$-\frac{5}{3}P$	$\frac{25}{9}P^2$	5	$\frac{125}{9}P^2$
1 — 3; 3 — 5				
5 — 7; 7 — 8	$2P$	$4P^2$	4	$16P^2$
2 — 3; 6 — 7	0	0	3	0
2 — 5; 5 — 6	$-\frac{5}{6}P$	$\frac{25}{36}P^2$	5	$\frac{125}{36}P^2$
4 — 5	P	P^2	6	$6P^2$

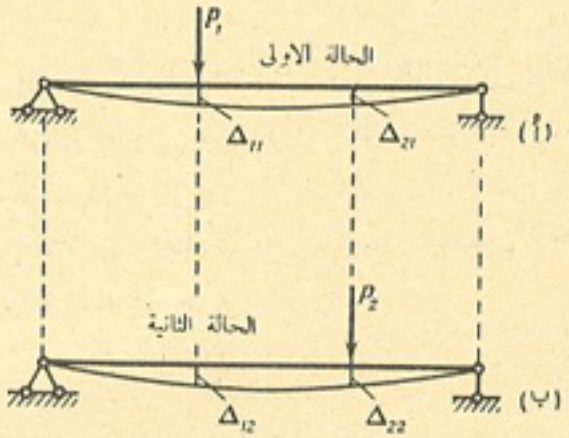
* سوف لا نقوم هنا بتحديد قيم القوى الطولية N فى قضبان الجمالون .

وقد أدرجت فى العمود الأخير من الجدول القيمة N^2l ، لكل قضيب الجمالون . وبجمع قيم N^2l فى جميع قضبان الجمالون ، وتقسيم المجموع على المقدار $2EF$ (حيث E مقاسة بالطن / م^2 ، و F مقاسة بالمتر المربع) نحصل على كمية طاقة الانفعال فى الجمالون بأكمله ، وتساوى ما يلى :

$$W = \left(\frac{125}{4} P^2 \times 2 + \frac{125}{9} P^2 \times 2 + 16P^2 \times 4 + 0 \times 2 + \frac{125}{36} P^2 \times 2 + 6P^2 \right) \times \frac{1}{2EF} = 83 \frac{11}{18} \frac{P^2}{EF}$$

البند ٦ — ٤ : نظرية تبادل الشغل (الشغل المتبادل)

سنبحث أدناه حالتين من حالات الإنشاء المرن ، الموجود فى حالة توازن . وفى كل حالة من هاتين الحالتين ، يؤثر على الإنشاء حمل استاتيكى معين ، مثل الحمل P_1 فى الحالة الأولى ، والحمل P_2 فى الحالة الثانية (شكل ٦ — ١٢) .



الشكل ٦ — ١٢

وسوف نرمز إلى إزاحة الإنشاء ، الناجمة عن تشوهه (إنحنائه) بالرمز Δ_{mn} حيث يشير الحرف السفلى الأول إلى اتجاه الازاحة ، ويشير الحرف الثانى إلى سبب تلك الإزاحة .

ويقرأ الرمز Δ_{mn} حرفيا كما يلى : الإزاحة فى اتجاه الحمل m ، الناجمة عن تأثير الحمل n . وقد تكون الإزاحة Δ_{mn} عبارة عن إزاحة خطية أو زاوية دوران (مقاسة بالزوايا النصف قطرية) ، وذلك تبعاً لماهية الحمل m ، أهو حمل مركز أم هو عزم مركز . ويقصد بالحمل n ، أى حمل كان يؤثر على الإنشاء ، مثل الحمل المؤلف من عدة أحمال وعزوم مركزة ، وحمل آخر موزع بانتظام .

وفى الحالة التى نبحثها الآن ، تكون الإزاحة الكلية Δ_{mn} ممثلة فيما يلى :

Δ_{11} – الإزاحة (الانحراف) فى اتجاه الحمل P_1 ، الناجمة عن تأثير الحمل P_1 ،

Δ_{12} – الإزاحة فى اتجاه الحمل P_1 ، الناجمة عن تأثير الحمل P_2 ،

Δ_{21} – الإزاحة فى اتجاه الحمل P_2 ، الناجمة عن تأثير الحمل P_1 ،

Δ_{22} – الإزاحة فى اتجاه الحمل P_2 ، الناجمة عن تأثير الحمل P_2 .

ويبين الشكل (٦ – ١٢) الازاحات أو الانحرافات Δ_{11} ، Δ_{12} ، Δ_{21} و Δ_{22} .

وسوف نرمز إلى شغل الحمل P_1 (أى حمل الحالة الأولى) المنجز على امتداد الإزاحة الناجمة عنه ، بالرمز A_{11} ، وإلى شغل الحمل P_2 المنجز على امتداد الإزاحة الناجمة عنه ، بالرمز A_{22} .

وقيمتا هذين الشغلين ، عند التأثير الاستاتيكى للحملين المذكورين [راجع الصيغة (2 — 6)] تساويان ما يلى :

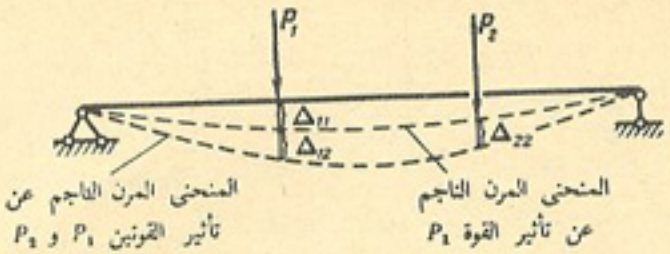
$$A_{11} = \frac{P_1 \Delta_{11}}{2}$$

$$A_{22} = \frac{P_2 \Delta_{22}}{2}$$

ويمكن التعبير عن الشغلين A_{11} و A_{22} بواسطة الإجهادات الداخلية ، الناشئة فى المقاطع العرضية لقضبان الجمالون [راجع الصيغة(4 — 6)] :

$$\left.\begin{aligned} A_{11} &= \Sigma \int_0^l \frac{M_1^2\,dx}{2EJ} + \Sigma \int_0^l \frac{N_1^2\,dx}{2EF} + \Sigma \int_0^l \frac{Q_1^2\,dx}{2GF}\,\eta \\ A_{22} &= \Sigma \int_0^l \frac{M_2^2\,dx}{2EJ} + \Sigma \int_0^l \frac{N_2^2\,dx}{2EF} + \Sigma \int_0^l \frac{Q_2^2\,dx}{2GF}\,\eta \end{aligned}\right\} \quad (6-7)$$

والآن نبحث حالة التحميل الاستاتيكى لنفس الجمالون (لاحظ الشكل ٦ – ١٢) بالحملين P_1 و P_2 ، حسب التتابع التالى : نضع على الجمالون أولا ، الحمل المتدرج الزيادة P_1 (شكل ٦–١٣) . وعند وصول الحمل المذكور إلى قيمته



الشكل ٦ – ١٢

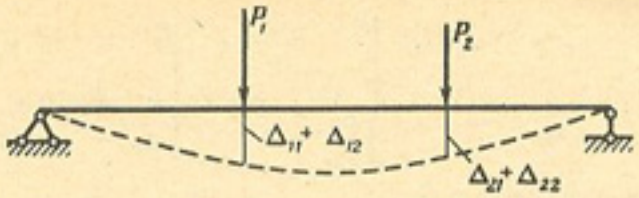
النهائية (القصوى) ، سوف تكون تشوهات (ازاحات) الجمالون والإجهادات الداخلية المؤثرة فيه ، كما كانت عليه فى الحالة الأولى ، المبينة فى الشكل (٦ – ١٢ ، أ) ، وخاصة سيكون الانحناء أو الانحراف الناجم عن تأثير الحمل P_1 ، مساوياً للمقدار Δ_{11} . أن الشغل الذى ينجزه الحمل P_1 أثناء مرحلة زيادته من الصفر إلى القيمة القصوى ، سيساوى ما يلى :

$$A_{11} = \frac{P_1 \Delta_{11}}{2}$$

ثم نبدأ بتسليط أو وضع الحمل المتدرج الزيادة P_2 ، على الجمالون المذكور . ونتيجة لذلك تحدث فى الجمالون تشوهات وإجهادات داخلية إضافية ، مساوية للتشوهات (الإزاحات) والإجهادات الناجمة فى الحالة الثانية ، المبينة فى الشكل (٦–١٢ ، ب) ، ونجد بصورة خاصة ، بأن الانحراف الاضافى الناجم تحت الحمل P_1 ، سيساوى Δ_{12} . وفى مرحلة زيادة الحمل P_2 من الصفر إلى القيمة القصوى ، يبقى الحمل P_1 ثابتا ، وينزاح إلى الأسفل بمقدار يساوى الإنحراف الإضافى Δ_{12} ، وينجز بذلك شغلا إضافيا يساوى $A_{12} = P_1 \Delta_{12}$ ، بينما ينجز الحمل P_2 فى هذه الأثناء ، شغلا يساوى $A_{22} = \frac{P_2 \Delta_{12}}{2}$. وهكذا نجد بأن الشغل الكلى A ، المنجز عند التحميل المتتابع للجمالون بالحملين P_1 و P_2 ، يساوى ما يلى :

$$A = A_{11} + A_{12} + A_{22} = \frac{P_1 \Delta_{11}}{2} + P_1 \Delta_{12} + \frac{P_2 \Delta_{22}}{2} \qquad (6-8)$$

ومن ناحية أخرى ، يمكن تحديد الشغل A الذى ينجزه الحملان P_1 و P_2



الشكل ٦ — ١٤

من الصيغة (2 — 6) ، باعتباره نصف مجموع حاصل ضرب كل حمل من الحملين المذكورين فى الإزاحة الكلية المناظرة له ، الناجمة عن تأثير الحملين معاً (شكل ٦ — ١٤) ، أى :

$$A = \frac{P_1\,(\Delta_{11} + \Delta_{12})}{2} + \frac{P_2\,(\Delta_{21} + \Delta_{22})}{2}$$

وإذا ساوينا معادلتى الشغل A مع بعضهما البعض ، فسوف نحصل على ما يلى :

$$\frac{P_1\,\Delta_{11}}{2} + P_1\,\Delta_{12} + \frac{P_2\,\Delta_{22}}{2} = \frac{P_1\,(\Delta_{11} + \Delta_{12})}{2} + \frac{P_2\,(\Delta_{21} + \Delta_{22})}{2}$$

ومنها ينتج أن :

$$P_1\,\Delta_{12} = P_2\,\Delta_{21}$$

وتمثل القيمة $P_1\Delta_{12}$ الشغل A_{12} ، الذى ينجزه الحمل P_1 فى الحالة الأولى (شكل ٦ — ١٢ ، أ) على امتداد الإزاحة الحاصلة فى اتجاهه الناجمة عن تأثير الحمل P_2 فى الحالة الثانية (شكل ٦ — ١٢ ، ب) . وبصورة مماثلة ، نجد بأن القيمة $P_2\Delta_{21}$ تمثل الشغل A_{21} الذى ينجزه الحمل P_2 فى الحالة الثانية ، على امتداد الإزاحة الحاصلة فى اتجاهه ، الناجمة عن تأثير الحمل P_1 فى الحالة الأولى .

إذن يكون لدينا :

$$A_{12} = A_{21} \qquad (6 - 9)$$

وكنا سنحصل على نفس النتيجة ، لو سلطنا على الجمالون ، فى كل حالة من الحالتين المبحوثتين (شكل ٦ — ١٢) ، ليس حملا واحداً فحسب ، بل

أى عدد كان من الأحمال والعزوم .

وهكذا نجد بأن الشغل الذى ينجزه الحملان فى الحالة الأولى ، على إمتداد الإزاحات الحاصلة فى اتجاهيهما ، الناجمة عن تأثير الحملين فى الحالة الثانية ، يساوى الشغل الذى ينجزه الحملان فى الحالة الثانية ، على امتداد الازاحات الحاصلة فى اتجاهيهما ، الناجمة عن تأثير الحملين فى الحالة الأولى .

وتسمى هذه النتيجة بنظرية تبادل الشغل أو الشغل المتبادل أو نظرية بيتى (Theorem of Betty) .

نعبر عن الشغل A_{12} بواسطة عزوم الانحناء والقوى الطولية وقوى القص ، الناشئة فى الحالتين الأولى والثانية .

ومن الصيغة (8 — 6) نحصل على ما يلى :

$$A_{12} = A - A_{11} - A_{22} \qquad (6 - 10)$$

حيث A — الشغل الكلى الذى ينجزه الحملان P_1 و P_2 على إمتداد الإزاحات الناجمة عن نفس الحملين المذكورين . وهذا الشغل ، بناء على الصيغة (6 — 4) يساوى ما يلى :

$$A = \Sigma \int_0^l \frac{(M_1 + M_2)^2 dx}{2EJ} + \Sigma \int_0^l \frac{(N_1 + N_2)^2\, dx}{2EF} + \Sigma \int_0^l \frac{(Q_1 + Q_2)^2\, dx}{2GF}\,\eta \qquad (6 - 11)$$

حيث M_1 ، N_1 ، Q_1 — عزوم الانحناء والقوى الطولية وقوى القص على التوالى ، الناشئة فى المقاطع العرضية لقضبان الجمالون ، نتيجة لتأثير الحمل P_1 ،

M_2 ، N_2 ، Q_2 — نفس القوى المذكورة أعلاه ، الناشئة فى قضبان الجمالون ، نتيجة لتأثير الحمل P_2 .

إن مجاميع القوى $M_1 + M_2$ و $N_1 + N_2$ و $Q_1 + Q_2$ تمثل القيم

الكلية للاجهادات الداخلية ، الناشئة فى المقاطع العرضية للقضبان نتيجة للتأثير الموحد للحملين P_1 و P_2 .

وبتعويض الصيغة (11 — 6) المعبرة عن الشغل A ، وكذلك الصيغة (7 — 6) المعبرة عن الشغلين A_{11} و A_{22} ، فى الطرف الأيمن للصيغة (10—6) ، نحصل على ما يلى :

$$A_{12} = \Sigma \int_0^l \frac{(M_1+M_2)^2 - M_1^2 - M_2^2}{2EJ}\, dx + \Sigma \int_0^l \frac{(N_1+N_2)^2 - N_1^2 - N_2^2}{2EF}\, dx +$$

$$+ \Sigma \int_0^l \frac{(Q_1+Q_2)^2 - Q_1^2 - Q_2^2}{2GF}\, \eta\, dx$$

أو

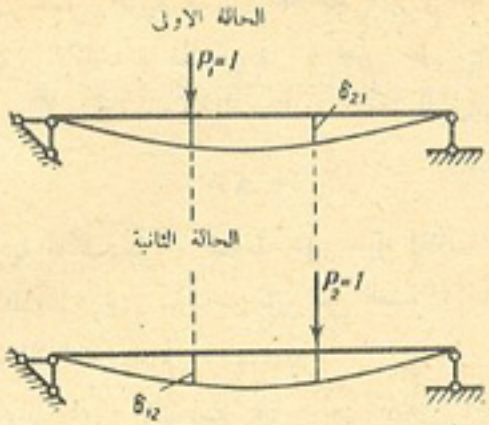
$$A_{12} = \Sigma \int_0^l M_1 \frac{M_2\, dx}{EJ} + \Sigma \int_0^l N_1 \frac{N_2\, dx}{EF} + \Sigma \int_0^l Q_1 \frac{Q_2\, dx}{GF}\, \eta \qquad (6-12)$$

إن كل صيغة موجودة بعد علامة التكامل فى الطرف الأيمن لهذه المعادلة ، يمكن أن تعتبر بمثابة حاصل ضرب الإجهاد الداخلى (مثل عزم الانحناء M_1) ، الناشىء فى مقطع القضيب ، نتيجة لتأثير الحملين فى الحالة الأولى ، فى مقدار التشوه (مثل $\frac{M_2\, dx}{EJ}$) الحاصل فى القطعة dx ، نتيجة لتأثير الحملين فى الحالة الثانية .

البند ٦ — ٥ : نظرية الازاحات المتبادلة

لنبحث الحالتين التاليتين من حالات الإنشاء الواحد بالذات . يؤثر على الإنشاء (الجمالون) فى الحالة الأولى الحمل $P_1 = 1$ ، وفى الحالة الثانية الحمل $P_2 = 1$ (شكل ٦ — ١٥) .

وسوف نرمز إلى الإزاحات الناجمة عن تأثير وحدات الأحمال أو العزوم (أى تأثير الحمل $P = 1$ أو العزم $\mathfrak{M} = 1$) بالرمز δ ، وذلك لتمييزها عن الازاحات الناجمة عن الأحمال والعزوم التى لا تساوى واحد ، المعروفة بالرمز Δ . وطبقاً لذلك سوف نرمز إلى إزاحة الإنشاء المبحوث ، فى اتجاه وحدة الحمل P_2



الشكل ٦ — ١٥

فى الحالة الأولى (أى الناجمة عن تأثير وحدة الحمل $P_1 = 1$) ، بالرمز δ_{21} ، ونرمز إلى الإزاحة فى اتجاه وحدة الحمل P_1 فى الحالة الثانية بالرمز δ_{12} (شكل ٦ — ١٥) .

واستناداً إلى نظرية الشغل المتبادل . نحصل بالنسبة للحالتين المبحوثتين . على ما يلى :

$$P_1\delta_{12} = P_2\delta_{21}$$

ولكن بما أن

$$P_1 = P_2 = 1$$

إذن :

$$\delta_{12} = \delta_{21}$$

أو فى الحالة العامة لتأثير أى وحدات أحمال لا على التعيين ، يكون لدينا ما يلى :

$$\delta_{mn} = \delta_{nm} \qquad (6-13)$$

وتسمى المعادلة الناتجة . بنظرية الإزاحات المتبادلة (مبدأ أو نظرية ماكسويل) ، وتنص على ما يلى : إن الإزاحات الناشئة فى أى إنشاء مرن ، نتيجة لتأثير وحدة حمل معينة فى اتجاه خط تأثير وحدة حمل ثانية ، تكون دائماً مساوية للازاحة

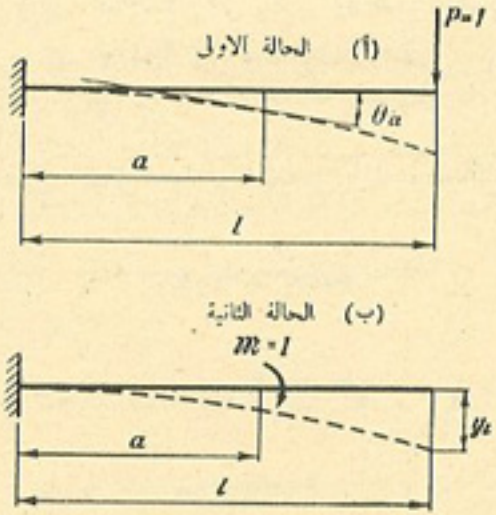
الناجمة عن وحدة الحمل الثانية ، فى اتجاه خط تأثير وحدة الحمل الأولى .

وتنطبق معادلة الإزاحات المذكورة ، حتى على الحالة التى تكون فيها $P_1 = P_2 \neq 1$. ولكنها فى هذه الحالة ، تأخذ الشكل التالى :

$$\Delta_{12} = \Delta_{21} \qquad (6 - 14)$$

ولإيضاح نظرية ماكسويل ، نبحث على سبيل المثال حالتين من حالات العتبة المبينة فى الشكل (6 — 16) . يؤثر على العتبة فى الحالة الأولى الحمل $P = 1$ ، وفى الحالة الثانية العزم $\mathfrak{M} = 1$.

إن زاوية الدوران θ_a ، الناجمة عن تأثير الحمل $P = 1$ ، على أساس نظرية الإزاحات المتبادلة ، يجب أن تساوى عدديا ، الانحراف y_l ، الناجم عن تأثير العزم $\mathfrak{M} = 1$ ، أى $\theta_a = y_l$.



الشكل ٦ — ١٦

والآن نحدد قيمتى θ_a و y_l بطريقة البارامترات الابتدائية . وهنا نجد فى الحالة الأولى (شكل ٦ — ١٦ ، أ) ما يلى :

$$\theta_a = \frac{1}{EJ}\left(-Pl \times a + \frac{Pa^2}{2}\right) = -\frac{Pa}{EJ}\left(l - \frac{a}{2}\right)$$

ونجد فى الحالة الثانية (شكل ٦ — ١٦ ، ب) ما يلى :

$$y_l = \frac{1}{EJ}\left(-\mathfrak{M}\frac{l^2}{2} + \mathfrak{M}\frac{(l-a)^2}{2}\right) = -\frac{\mathfrak{M}a}{EJ}\left(l - \frac{a}{2}\right)$$

وعند $\mathfrak{M} = P = 1$ ، نجد بأن :

$$\theta_a = -\frac{a}{EJ}\left(l - \frac{a}{2}\right)$$

و

$$y_l = -\frac{a}{EJ}\left(l - \frac{a}{2}\right)$$

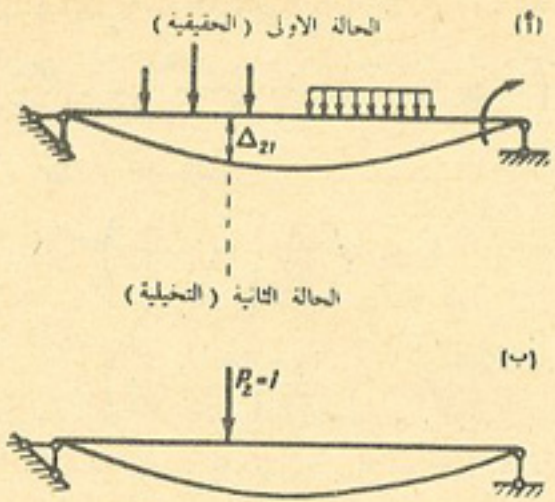
إذن :

$$\theta_a = y_l$$

إن لوحدات الإزاحة (أى الإزاحات الناجمة عن تأثير وحدة الحمل اللابعدية $P = 1$ ، أو عن تأثير وحدة العزم اللابعدية $\mathfrak{M} = 1$) ، مقاييس خاصة تختلف عن المقاييس العادية للازاحات . إن مقياس وحدة الإزاحة (الانحراف) هو عبارة عن مقياس نسبة الإزاحة (غير الناجمة عن وحدة الحمل) إلى قيمة الحمل الناجمة عنه . وفى المثال الذى نبحثه الآن ، تقاس وحدة زاوية الدوران θ_a ، الناجمة عن الحمل $P = 1$ (وليس عن الحمل الذى يساوى طنا واحداً مثلا) ، بالمقدار $\frac{1}{\text{ton}}$ وتقاس وحدة الانحراف y_l ، الناجمة عن تأثير العزم $\mathfrak{M} = 1$ ، بالمقدار $\frac{\text{m}}{\text{ton.m}}$ أو بالمقدار $\frac{1}{\text{ton}}$ ، أى بنفس مقياس وحدة زاوية الدوران θ_a .

البند ٦ — ٦ : صيغ حساب الإزاحات

لنبحث حالتين من حالات الإنشاء الواحد . يؤثر على هذا الإنشاء فى الحالة الأولى ، أى عدد كان من الأحمال والعزوم ، التى يمكن اختيارها حسب الرغبة (شكل ٦ — ١٧ ، أ) . وفى الحالة الثانية ، يؤثر على الإنشاء حمل مركز واحد



الشكل ٦ – ١٧

فقط ، هو $P_2 = 1$ (شكل ٦ – ١٧ ، ب) .

والآن نضع صيغة الشغل A_{21} الذى ينجزه الحمل $P_2 = 1$ فى الحالة الثانية ، على إمتداد الإزاحة Δ_{21} ، الناجمة عن تأثير الأحمال فى الحالة الأولى :

$$A_{21} = P_2 \Delta_{21} = 1 \times \Delta_{21} = \Delta_{21}$$

وإذا عبرنا عن الشغل A_{21} بواسطة الإجهادات الداخلية فى قضبان الإنشاء أو الجمالون (راجع الصيغتين (9 – 6) و (12 – 6) فسوف نحصل على ما يلى :

$$\Delta_{21} = A_{21} = \Sigma \int_0^l \overline{M}_2 \frac{M_1\,dx}{EJ} + \Sigma \int_0^l \overline{N}_2 \frac{N_1\,dx}{EF} + \Sigma \int_0^l \overline{Q}_2 \frac{Q_1\,dx}{GF}\,\eta \qquad (6-15)$$

إن العلامات الشارطة الموضوعة فوق الإجهادات الداخلية M_2 ، N_2 و Q_2 ، تدل على أن هذه الإجهادات الداخلية تنشأ فى حالة واحدة هى حالة تأثير قوة تساوى وحدة الحمل .

وهكذا يمكن التعبير عن الإزاحة الناجمة عن تأثير أى حمل كان ، بواسطة الإجهادات الداخلية ، الناشئة فى الإنشاء قيد البحث ، نتيجة لتأثير ذلك الحمل . والناشئة فيه نتيجة لتأثير وحدة الحمل . وينطبق اتجاه وحدة الحمل ، مع اتجاه الإزاحة المراد تحديدها . فإذا أريد تحديد الإزاحة الخطية (مثل انحراف أية نقطة من نقاط محور الإنشاء) ، عندئذ تكون وحدة الحمل عبارة عن حمل مركز لا بعدى ، مؤثر فى تلك النقطة بالذات . أما إذا أريد تحديد زاوية دوران المقطع العرضى فى أية نقطة من نقاط محور الإنشاء ، عندئذ تكون وحدة الحمل عبارة عن عزم مركز (لا بعدى أيضا) مؤثر فى تلك النقطة .

إن حالة الإنشاء الناجمة عن تأثير وحدة الحمل ، تسمى بحالة تأثير وحدة الحمل (حالة التحميل التخيلية) . وخلافا لذلك ، تسمى الحالة الناجمة عن تأثير الحمل المعطى الذى له قيمة معينة ، بحالة تأثير الحمل الحقيقى (حالة التحميل الحقيقية) . أن الرسوم البيانية للاجهادات الداخلية ، الناشئة فى قضيب الإنشاء (الجمالون) فى حالة تأثير وحدة الحمل ، تسمى بوحدات الرسوم البيانية (unit diagrams) ، ويرمز إليها بالرموز $\overline{M}$ ، $\overline{N}$ ، $\overline{Q}$ ، أما الرسوم البيانية للاجهادات الناشئة فى القضبان نتيجة لتأثير الأحمال الحقيقية ، فتسمى بالرسوم البيانية الحقيقة (real diagrams) ، ويرمز إليها بالرموز M_p ، N_p و Q_p .

وفى بعض الأحيان تستبدل الرموز الدليلية العددية 1 و 2 فى الصيغة (15 – 6) ، بحروف عادية ، مثل m و n (او p و k) ، عندئذ تصبح الصيغة المذكورة ، على الشكل التالى :

$$\Delta_{mn} = \Sigma \int_0^l \overline{M}_m \frac{M_n\,dx}{EJ} + \Sigma \int_0^l \overline{N}_m \frac{N_n\,dx}{EF} + \Sigma \int_0^l \overline{Q}_m \frac{Q_n\,dx}{GF}\,\eta \qquad (6-16)$$

حيث Δ_{mn} – الإزاحة فى إتجاه الحمل $P_m = 1$ ، الناجمة عن تأثير الحمل n (مجموعة الأحمال n) . وعندما تكون أبعاد المقاطع العرضية لكل قضيب من قضبان الجمالون ، ثابتة على طول هذا القضيب ، تأخذ الصيغة الأخيرة الشكل التالى :

$$\Delta_{mn} = \Sigma \frac{1}{EJ} \int_0^l \overline{M}_m M_n\,dx + \Sigma \frac{1}{EF} \int_0^l \overline{N}_m N_n\,dx + \Sigma \frac{\eta}{GF} \int_0^l \overline{Q}_m Q_n\,dx$$

إن كل صيغة من الصيغ الثلاث الأخيرة ، تسمى بصيغة الإزاحات (أو صيغة مور (Mohr's formula) .

ويتم تحديد الإزاحات بواسطة الصيغ التى حصلنا عليها أعلاه ، حسب الترتيب التالى :

١ – تستخرج صيغ الإجهادات M_n ، N_n و Q_n ، الناشئة نتيجة لتأثير الحمل المعين ، باعتبارها دالات للاحداثى السينى x للمقطع الاختيارى ،

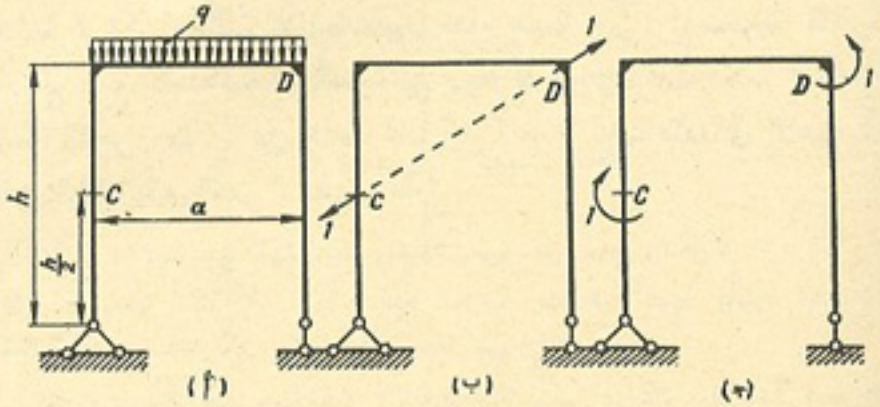
٢ – تسلط وحدة الحمل المناظرة للإزاحة المطلوبة ، فى اتجاه هذه الإزاحة (فى حالة الإزاحة الخطية يسلط الحمل المركز ، وفى حالة زاوية الدوران ، يسلط العزم المركز) ،

٣ – تحدد صيغ الإجهادات $\overline{M}_m$ ، $\overline{N}_m$ و $\overline{Q}_m$ الناجمة عن تأثير وحدة الحمل ، باعتبارها دالات للإحداثى السينى x للمقطع الاختيارى ،

٤ – توضع الإجهادات المستخرجة M_n ، N_n ، Q_n ، $\overline{M}_m$ ، $\overline{N}_m$ و $\overline{Q}_m$ فى الطرف الأيمن لصيغة الإزاحات . وبأخذ تكامل الأقسام فى حدود الإنشاء بأجمعه ، نحصل على الأزاحة المطلوبة Δ_m . فإذا كانت Δ_m موجبة ، عندئذ تنطبق الإزاحة مع الإزاحة الناجمة عن وحدة الحمل ، أما إذا كانت Δ_m سالبة ، فتكون الإزاحة بعكس اتجاه وحدة الحمل .

وفى بعض الأحيان ، وخاصة عند حساب الإنشاءات غير المحددة استاتيكياً ، يتحتم تحديد الأزاحات (الانحرافات) المتبادلة لبعض النقاط أو المقاطع المنفردة للإنشاء . وفى هذه الحالة ، تسلط وحدة الأحمال العامة فى اتجاه الإزاحة المطلوبة (عند تحديد الإزاحة الخطية المتبادلة) ، أو تسلط وحدة العزم العامة (عند تحديد زاوية الدوران المتبادلة) . وإذا أردنا على سبيل المثال ، تحديد مدى تغير المسافة بين نقطتى محور الإطار C و D ، المبين فى الشكل (٦ – ١٨ ، أ) ، يجب أن نسلط فى النقطتين C و D ، وحدات الحمل المتجهة فى اتجاه المستقيم CD ، كما مبين فى الشكل (٦ – ١٨ ، ب) . إن حساب تكامل صيغة مور ، يتم حسب القواعد المذكورة أعلاه ، ولكن فى هذه الحالة يجب اعتبار وحدات الإجهادات الداخلية

($\overline{M}_m$ ، $\overline{N}_m$ ، $\overline{Q}_m$) على أنها قيم هذه الاجهادات المناظرة للتأثير الموحد لوحدتى الحمل الاثنتين . وإذا كانت نتيجة حساب تكامل صيغة مور ، فى هذه الحالة موجبة ، فسوف يدل ذلك على أن اتجاه الإزاحة المطلوبة ينطبق مع اتجاه وحدات



الشكل ٦ – ١٨

الحمل ، أى تزداد المسافة بين النقطتين D و C . وتدل العلامة السالبة على تضاؤل هذه المسافة ، أى على تقارب النقطتين D و C .

ويمكن بطريقة مماثلة ، تحديد زاوية الدوران المتبادلة ، لأى مقطعين مع مقاطع الإطار ، مثل المقطعين المناظرين لنفس النقطتين D و C . ولهذا الغرض يجب أن نسلط فى المقطعين المذكورين ، وحدتى عزم فى اتجاهين متعاكسين (شكل ٦–١٨ ، ج) . وفى بقية الحالات الأخرى لا يختلف حساب زاوية الدوران المتبادلة أبداً عن حالة الإزاحة الخطية المتبادلة التى بحثناه سابقاً .

وفى الواقع ، لا يستخدم فى أكثر الحالات ، إلا حداً واحداً من صيغة الإزاحات . وعندما يتم بحث الإنشاء المعرض فى الغالب للانحناء (مثل العتبات والأطر وأحيانا العقود) ، يمكن بدرجة تامة من الدقة ، ان توضع فقط صيغة التكامل ، المعتمدة على عزوم الانحناء . وعند حساب الانشاء ، الذى تكون قطعه (قضبانه) معرضة للشد والانضغاط المركزيين (مثل الجمالون) ، يوضع فى صيغة الإزاحات ، الحد الذى يحتوى على القوى الطولية فقط .

وعندما حساب العتبات والأطر فيما بعد ، سوف لا يؤخذ فى الاعتبار تأثير

القوى الطولية وقوى القص، على الإزاحات ، باستثناء بعض الحالات المتفق عليها .

وإذا كانت القطعة الإنشائية عبارة عن قضيب ذى نسبة انحناء صغيرة (لاتقل نسبة نصف قطر محور القضيب المنحنى ، إلى ارتفاع مقطعه العرضى ، عن العشرة) يمكن حساب الإزاحات باستخدام صيغة مور ، المستخرجة للقضيب المستقيم ، مع الاستعاضة عن القطعة التى طولها dx الموجودة تحت علامة التكامل ، بقطعة القوس dx . وفى هذه الحالة أيضاً ، لا يؤخذ عادة فى الاعتبار تأثير القوى الطولية وقوى القص ، بصورة عامة .

مثال ١ : لدينا عتبة ثابتة المقطع ، محمولة بحرية على مسندين (شكل ٦ – ١٩ ، أ) ويؤثر فى وسطها الحمل P_n . يطلب تحديد انحراف هذه العتبة نتيجة لتأثير الحمل (فى النقطة C) مع حساب تأثير كافة حدود صيغة مور .

الحل : إن حالة تأثير وحدة الحمل ، ستكون الحالة الناجمة عن تأثير وحدة الحمل $P_m = 1$ ، على العتبة المذكورة فى اتجاه الإزاحة المطلوبة (شكل ٦ – ١٩ ، ب) .

والقوى الطولية الناشئة فى المقاطع العرضية للعتبة ، نتيجة لتأثير الحمل ، تساوى صفراً . ولذلك سوف يتحول حد التكامل الثانى لصيغة الإزاحات (17 — 6) إلى الصفر ، وتأخذ هذه الصيغة الشكل التالى :

$$\Delta_{mn} = \Sigma \frac{1}{EJ}\int_0^l \overline{M}_m M_n dx + \Sigma \frac{\eta}{GF}\int_0^l \overline{Q}_m Q_n dx = \Delta_{mn}^M + \Delta_{mn}^Q .$$

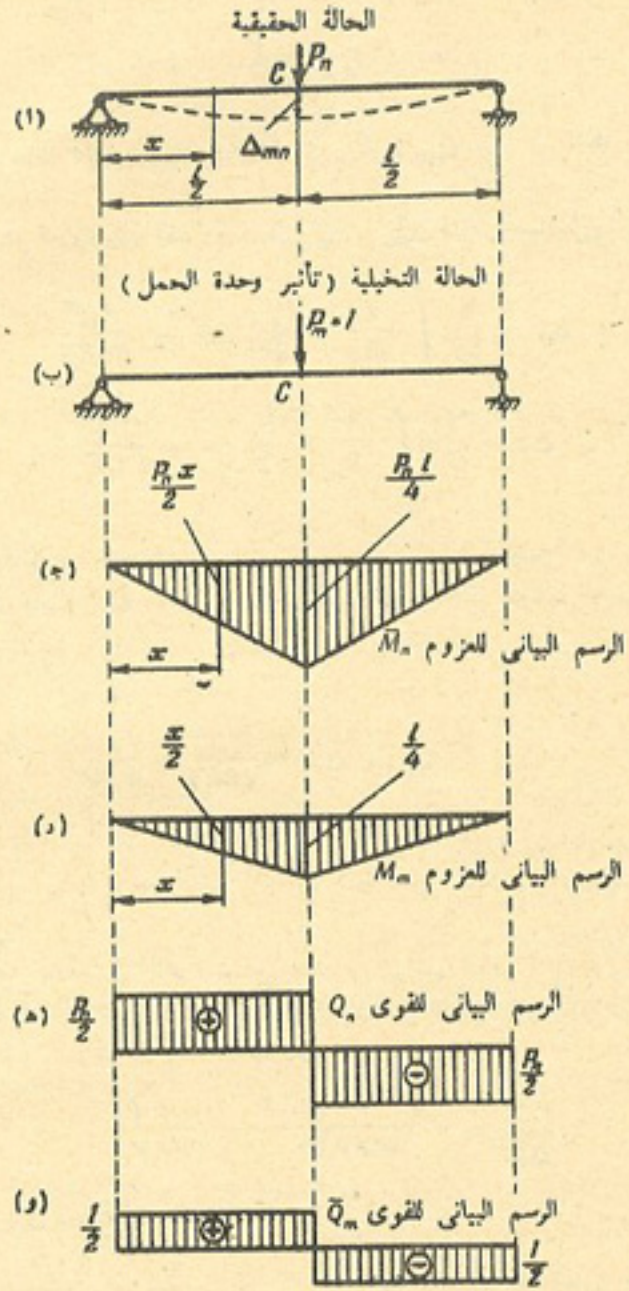
حيث : $\Delta_{mn}^M = \Sigma \frac{1}{EJ}\int_0^l \overline{M}_m M_n dx$ – تمثل الانحراف فى حالة الانحناء (أى الانحراف المعتمد على عزوم الانحناء) .

و $\Delta_{mn}^Q = \Sigma \frac{\eta}{GF}\int_0^l \overline{Q}_m Q_n dx$ – تمثل الانحراف فى حالة القص (أى الانحراف المعتمد على قوى القص) .

وبالنسبة لمقطع العتبة الواقع بين المسند الأيسر والنقطة C (إلى منتصف العتبة) ، نجد بأن عزوم الانحناء M_n و $\overline{M}_m$ وقوى القص Q_n و $\overline{Q}_m$ تساوى ما يلى :

$$M_n = \frac{P_n}{2} x$$

$$\overline{M}_m = \frac{1}{2} x$$



الشكل ٦ – ١٩

$$Q_n = \frac{P_n}{2}$$

$$\bar{Q}_m = \frac{1}{2}$$

إن الرسوم البيانية لكل من M_n ، $\bar{M}_m$ ، Q_n و $\bar{Q}_m$ مبينة فى الشكل (٦ – ١٩ ، ج ، د ، هـ ، و) .

واذا عوضنا بقيم العزوم وقوى القص فى صيغتى Δ^M_{mn} و Δ^Q_{mn} فسوف نحصل على ما يلى :

$$\Delta^M_{mn} = \frac{2}{EJ}\int_0^{l/2} \frac{x}{2} \times \frac{P_n}{2}\, x dx = \frac{P_n l^3}{48EJ}$$

$$\Delta^Q_{mn} = \frac{2\eta}{GF}\int_0^{l/2} \frac{1}{2} \times \frac{P_n}{2}\, dx = \frac{P_n \eta l}{4\, GF}$$

ويؤخذ التكامل فى حدود النصف الأيسر للعتبة ، والمعامل 2 الموضوع قبل علامة التكامل ، يدل على أنه ما دامت العتبة متماثلة ، إذن تكون قيمة التكامل لنصفها الأيمن مساوية لقيمة التكامل للنصف الأيسر .

إن الانحراف الكلى Δ_{mn} يساوى ما يلى :

$$\Delta_{mn} = \Delta^M_{mn} + \Delta^Q_{mn} = \frac{P_n l^3}{48EJ} + \frac{P_n \eta l}{4\, GF}$$

وتدل العلامة الموجبة على انطباق اتجاه الانحراف مع اتجاه وحدة الحمل . وكانت العلامة السالبة ، ستدل على أن الاتجاه الحقيقى لانحراف نقطة محور العتبة C ، معاكس للاتجاه المأخوذ لوحدة الحمل P_m .

والآن نوجد العلاقة بين الانحرافات التى تعتمد على قيم قوى القص ، والانحرافات التى تعتمد على قيم عزوم الانحناء . نفرض هنا بان مقطع العتبة مستطيل الشكل ، واضلاعه تساوى b و h ، وأن ارتفاعه يساوى $h = 0.1\, l$ ، عندئذ يكون لدينا ما يلى :

$$\frac{\Delta^Q_{mn}}{\Delta^M_{mn}} = \frac{P_n \eta\, l \times 48EJ}{4GFP_n l^3} = \frac{12\, \eta\, EJ}{l^2 GF}$$

وبعد أن نعوض فى هذه الصيغة القيم التالية :

$$\eta = 1.2;\ F = bh = \frac{bl}{10};\quad J = \frac{bh^3}{12} = \frac{bl^3}{12000}$$

وباتخاذ $G = 0.4\, E$ ، نحصل على ما يلى :

$$\frac{\Delta^Q_{mn}}{\Delta^M_{mn}} = \frac{12 \times 1.2 \times Ebl^3 \times 10}{12000 \times l^2 \times 0.4\, Ebl} = \frac{3}{100}$$

أى أن الانحراف المعتمد على قوى القص (فى حالة القص) ، يساوى 3% فقط ، من الانحراف المعتمد على عزوم الانحناء .

وسوف يقل تأثير قوى القص على قيمة الانحناء ، كلما قلت النسبة $\frac{h}{l}$ ، وذلك لأنه عند $h = \frac{1}{20}$ ، نجد ما يلى :

$$\frac{\Delta^Q_{mn}}{\Delta^M_{mn}} = \frac{3}{400}$$

ومن الواضح تماما ، بانه يمكن إهمال قيمة Δ^Q_{mn} ، بالمقارنة مع قيمة Δ^M_{mn} . عندئذ نحصل على ما يلى :

$$\Delta_{mn} = \Delta^M_{mn} = \frac{P_n l^3}{48\, EJ}$$

مثال ٢ : يطلب تحديد الانحراف الرأسى Δ_C للنقطة C ، من العتبة المثبتة ، من طرفها الأيسر ، والمحملة بحمل موزع بانتظام (شكل ٦ – ٢٠ ، أ) .

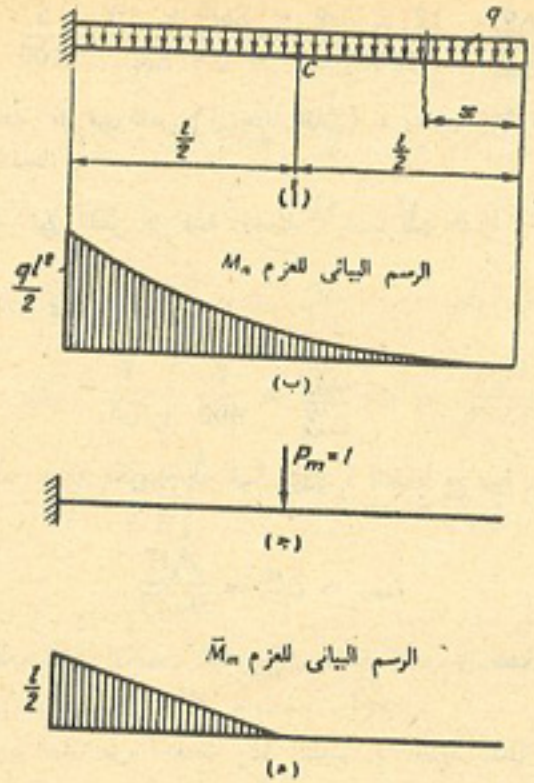
الحل : إن الرسم البيانى لعزم الانحناء M_n الناجم عن تأثير الحمل الموزع ، بانتظام ، مبين فى الشكل (٦ – ٢٠ ، ب) . وعزم الانحناء فى المقطع x (الواقع على مسافة x من الطرف الايمن للعتبة) يساوى : $M_n = -\frac{qx^2}{2}$. إن حالة تأثير وحدة الحمل هنا ، هى الحالة الناجمة عن تأثير الحمل $P_m = 1$ ، المسلط على العتبة فى النقطة C ، فى اتجاه الإزاحة المطلوبة ، أى المؤثر بصورة رأسية (شكل ٦ – ٢٠ ، ج) . إن وحدة الرسم البيانى لعزوم الانحناء $\bar{M}_m$ (الناجمة عن تأثير الحمل $P_m = 1$) ، موضح فى الشكل (٦ – ٢٠ ، د).

إن العزم $\bar{M}_m$ ينشأ فقط فى مقاطع النصف الأيسر للعتبة ، وذلك عندما تكون $\frac{l}{2} \leqslant x \leqslant l$ ، ويساوى : $\bar{M}_m = -\left(x - \frac{l}{2}\right)$. أما فى النصف الأيمن للعتبة ، فنجد بأن :

$$\bar{M}_m = 0$$

واستناداً إلى التنويهات المذكورة على الصفحة ٣٦٩ ، لا يؤخذ فى الاعتبار إلا تأثير عزوم الانحناء على انحراف العتبة . ونقوم بأخذ التكامل ، فى حدود النصف الأيسر للعتبة فقط ، وذلك لأن التكامل بالنسبة لنصف العتبة الأيمن (حيث $\bar{M}_m = 0$) ، يساوى صفراً .

وباستخدام صيغة الإزاحات (17 — 6) نحصل على ما يلى :



الشكل ٦ – ٢٠

$$\Delta c = \frac{1}{EJ}\int_{l/2}^{l} \overline{M}_m M_n \, dx = \frac{1}{EJ}\int_{l/2}^{l}\left(x - \frac{l}{2}\right)\frac{qx^2}{2}\,dx =$$

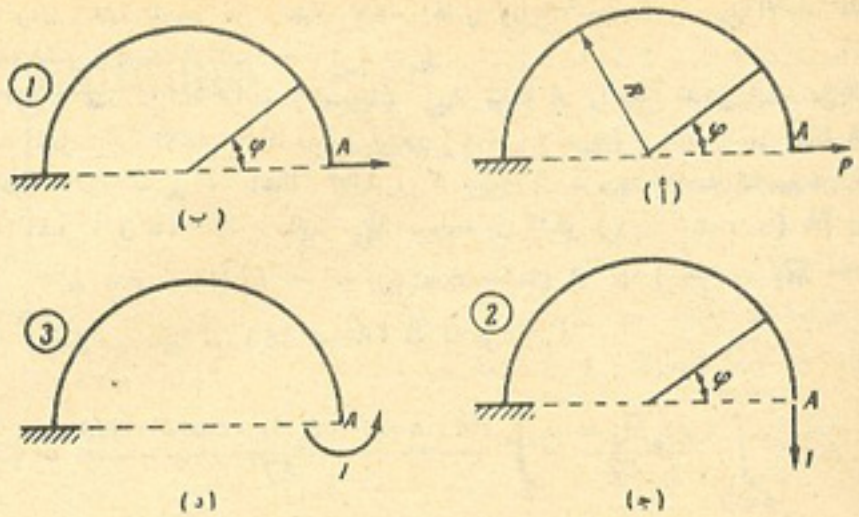
$$= \frac{q}{2\,EJ}\int_{l/2}^{l}\left(x^3 - \frac{x^2 l}{2}\right)\times dx = \frac{q}{2EJ}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3 l}{6}\right)_{l/2}^{l} =$$

$$= \frac{q}{2EJ}\left[\frac{l^4}{4} - \frac{l^4}{6} - \frac{(l/2)^4}{4} + \frac{(l/2)^3 l}{6}\right] = \frac{17\,ql^4}{38\;4EJ}$$

مثال ٣ : يطلب تحديد الإزاحة الخطية الكلية للنقطة A التابعة لمحور العتبة المحنية المبينة فى الشكل (٦ – ٢١ ، أ) ، وتحديد زاوية دوران المقطع العرضى المار فى هذه النقطة .

الحل : استناداً إلى الملاحظات الواردة على الصفحة ٣٦٩ يهمل فى هذه الحالة تأثير القوى الطولية وقوى القص .

إن اتجاه الإزاحة المطلوبة غير معروف سلفاً فى هذه الحالة . ولهذا السبب نعين



الشكل ٦ – ٢١

أو نحدد على انفراد ، المركبات الأفقية والعمودية لهذا الاتجاه ، ثم نوجد الإزاحة الكلية باعتبارها المجموع الهندسى للمركبات المذكورة .

يحدد عزم الانحناء الناشىء فى المقطع الاختيارى للعتبة ، نتيجة لتأثير الحمل المعلوم ، باستخدام الصيغة التالية :

$$M_p = PR \sin \phi$$

ولإيجاد الإزاحة الأفقية Δ_{1p} ، نسلط فى النقطة A وحدة الحمل الافقية الاتجاه (شكل ٦ – ٢١ ، ب) . وسوف نسمى حالة العتبة المناظرة لهذا التحميل ، بالحالة الأولى . إن صيغة عزم الانحناء لهذه الحالة ، تكون على الشكل التالى :

$$\overline{M}_1 = 1 \times R \sin \phi = R \sin \phi$$

ومن صيغة مور (16 — 6) نحصل على ما يلى :

$$\Delta_{1p} = \int_{\phi=0}^{\phi=\pi} \frac{M_p \overline{M}_1 ds}{EJ} = \int_0^{\pi} \frac{PR \sin \phi \times R \sin \phi \times Rd\phi}{EJ} =$$

$$= \frac{PR^3}{EJ}\int_0^{\pi} \sin^2 \phi \, d\phi = \frac{PR^3}{EJ}\left(\frac{\phi}{2} - \frac{\sin 2\phi}{4}\right)_0^{\pi} = \frac{\pi PR^3}{2EJ}$$

وفى هذه الحالة $dx = R\,d\phi$.

وتدل العلامة الموجبة على انطباق الاتجاه الحقيقى لإزاحة النقطة A ، مع الاتجاه المأخوذ لوحدة الحمل (لاحظ الشكل ٦ – ٢١ ، ب) .

والآن نحدد الإزاحة الرأسية (العمودية) Δ_{2p} للنقطة A . ولهذا الغرض نسلط على العتبة وحدة الحمل الرأسية الاتجاه ، كما مبين فى الشكل (٦ – ٢١ ، جـ) . وسوف نسمى حالة العتبة المناظرة لهذا التحميل ، بالحالة الثانية ، كما سنرمز إلى عزوم الانحناء الناجمة عن تأثير وحدة الحمل ، فى هذه الحالة ، بالرمز $\overline{M}_2$. ونجد من الشكل (٦ – ٢١ ، جـ) بأن :

$$\overline{M}_2 = -1 \times R\,(1 - \cos\phi) = -R\,(1 - \cos\phi)$$

ونحصل من صيغة مور (16 — 6) على ما يلى :

$$\Delta_{2p} = \int_{\phi=0}^{\phi=\pi} \frac{M_p \overline{M}_2\, ds}{EJ} = \int_0^{\pi} \frac{PR\sin\phi\,[-R\,(1-\cos\phi)]\,Rd\phi}{EJ} =$$

$$= \frac{PR^3}{EJ}\left(\int_0^{\pi} -\sin\phi\, d\phi + \int_0^{\pi} \sin\phi\cos\phi\, d\phi\right) = -\frac{2PR^3}{EJ}$$

وتدل العلامة السالبة على أن النقطة تنزاح إلى الأعلى ، أى بعكس اتجاه تأثير وحدة الحمل .

والإزاحة الكلية للنقطة A تساوى ما يلى :

$$\Delta_A = \sqrt{\Delta_{1p}^2 + \Delta_{2p}^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi PR^3}{2EJ}\right)^2 + \left(-\frac{2PR^3}{EJ}\right)^2} =$$

$$= \frac{PR^3}{EJ}\sqrt{\frac{\pi^2}{4} + 4}$$

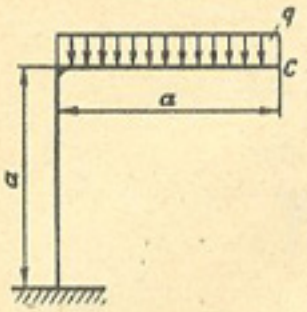
ولتحديد زاوية الدوران Δ_{3p} للمقطع A ، نسلط فى هذا المقطع ، عزماً يساوى وحدة ، أى وحدة عزم (شكل ٦ – ٢١ ، د) . وسوف نسمى حالة العتبة المناظرة لهذا التحميل بالحالة الثالثة ، عندئذ $\overline{M}_3 = 1$.

وبذلك تكون الإزاحة الزاوية ، مساوية لما يلى :

$$\Delta_{3p} = \int_{\phi=0}^{\phi=\pi} \frac{M_p \overline{M}_3\, ds}{EJ} = \int_0^{\pi} \frac{PR\sin\phi \times 1 \times Rd\phi}{EJ} = \frac{2PR^2}{EJ}$$

المقطع يدور بعكس حركة عقارب الساعة ، أى باتجاه وحدة العزم المسلط .

مثال ٤ : يطلب تحديد زاوية دوران المقطع العرضى C ، للإطار المرفقى (knee frame) ، المبين فى الشكل (٦ — ٢٢) .



الشكل ٦ – ٢٢

الحل : نسلط فى المقطع العرضى C للإطار المرفق المذكور ، وحدة العزم $M = 1$ ، لنجعل المقطع يستدير فى الاتجاه المطلوب . وبما أنه ، فى هذه الحالة ، تبرز تحت تأثير هذا الزوج من القوى عزوم الانحناء فقط ، وتكون القوى الطولية وقوى القص مساوية للصفر ، إذن ليست هناك أية حاجة لتحديد القوى N و Q للإطار المرفق فى هذه الحالة ، الناجمة عن تأثير وحدة الحمل المذكورة ، حتى لو استدعت الحاجة عند تحديد زاوية الدوران ، إلى تحديد القوى الطولية وقوى القص ، من الناحية الفرضية .

نخطط الرسمين البيانيين لعزوم الانحناء : الرسم البيانى لحالة تأثير الحمل المعين q ، والرسم البيانى لحالة تأثير وحدة العزم M ، المؤثرة فى اتجاه الإزاحة المطلوبة .

ويبين الشكل (٦ – ٢٣) ، الرسوم البيانية لحالتى التحميل الحقيقية n والتخيلية m .

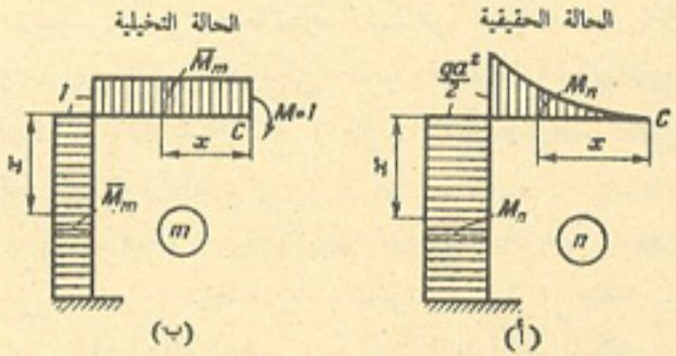
ونعبر عن عزوم الانحناء ، بواسطة الإحداثيات السينية المتغيرة القيمة x ، كما يلى :

لعارضة الإطار : $\overline{M}_m = -1$ ، $\quad M_n = -\dfrac{qx^2}{2}$

للضلع القائم للإطار : $\overline{M}_m = -1$ ، $\quad M_n = -\dfrac{qa^2}{2}$

وباستخدام صيغة الإزاحة (16 – 6) ، نوجد زاوية الدوران ϕ وتساوى ما يلى :

$$\phi = \Delta_{mn} = \int_0^a \frac{1}{2} \times \frac{qx^2}{EJ}\, dx + \int_0^a \frac{1}{2} \times \frac{qa^2}{EJ}\, dx = \frac{2qa^3}{EJ}$$



الشكل ٦ – ٢٣

البند ٦ – ٧ : الانفعالات الحرارية

يمكن كتابة صيغة مور (16 — 6) على الشكل التالى :

$$\Delta_{mn} = \Sigma \int_0^l \overline{M}_m \Delta_{\varphi n} + \Sigma \int_0^l \overline{N}_m \Delta_{xn} + \Sigma \int_0^l \overline{Q}_m \Delta_{yn} \qquad (6-18)$$

حيث $\Delta_{\varphi n} = \frac{M_n dx}{EJ}$ – تمثل زاوية الدوران المتبادلة للمقاطع الطرفية للقطعة dx من القضيب، الناجمة عن تأثير الحمل المعلوم ،

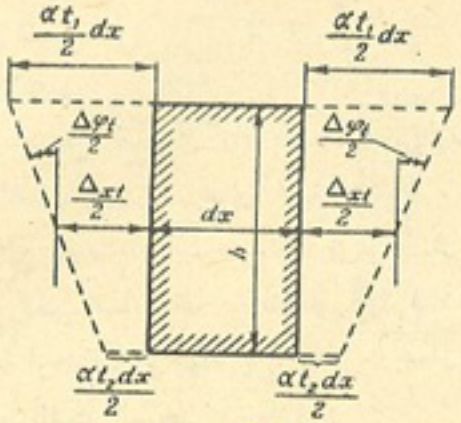
$\Delta_{xn} = \frac{N_n dx}{EF}$ – تمثل الإزاحة المتبادلة للمقاطع المذكورة، فى اتجاه محور القضيب ،

و $\Delta_{yn} = \frac{Q_n dx}{GF}$ – تمثل الإزاحة المتبادلة للمقاطع المذكورة ، فى الاتجاه العمودى على محور القضيب (راجع البند ٦ – ٢) .

وبهذا الشكل يمكن إستخدام صيغة مور ليس فقط عندما تكون الإزاحات $\Delta_{\varphi n}$، Δ_{xn} و Δ_{yn} للقطعة dx من القضيب ناجمة عن الإجهادات الداخلية فى مقاطعة العرضية فحسب ، بل وعندما تكون ناجمة عن المؤثرات الحرارية فى الانشاء (تغير درجات الحرارة) كذلك . إذن يمكن استخدام صيغة مور بشكلها المبين أعلاه، لتحديد الانفعالات الحرارية للإنشاء (مثل التمدد والتقلص الحراريين) ، الناجمة عن تغير درجات الحرارة .

لنفرض بأننا رفعنا درجة حرارة الألياف العليا للقطعة dx ، بمقدار t_1 ، والألياف السفلى بمقدار t_2 درجة مئوية (شكل ٦ – ٢٤) . ونعتبر بأن توزيع درجة الحرارة على ارتفاع المقطع العرضى ، يتم طبقاً لقانون الخط المستقيم .

وعندما يكون معامل التمدد الحرارى الطولى هو α ، نجد بأن تمدد كل ليف



الشكل ٦ – ٢٤

من الألياف العليا ، يساوى $\alpha t_1 dx$ ، وتمدد الألياف السفلى يساوى $\alpha t_2 dx$. ويمكن الحصول على التمدد المحورى $\Delta_{xn} = \Delta_{xt}$ ، باعتباره مساوياً للمعدل الحسابى لتمددات الألياف العليا والسفلى (عندما يكون المقطع العرضى متماثلا بالنسبة للمحور الأفقى) . إذن التمدد المحورى المذكور ، يساوى ما يلى :

$$\Delta_{xn} = \frac{\alpha\ (t_1 + t_2)}{2}\ dx$$

وزاوية الدوران المتبادل للمقاطع العرضية الطرفية (للقطعة dx) تساوى ما يلى :

$$\Delta\varphi_n = \Delta\varphi_t = \frac{\alpha\ (t_1 - t_2)}{h}\ dx$$

وسوف لا تظهر فى القطعة dx ، أية انفعالات أو تشوهات قص ، ناجمة عن تغير درجات الحرارة ، أى أن $\Delta_{yn} = 0$.

وإذا عوضنا القيم المستخرجة أعلاه والصيغة (18 — 6) ، فسوف نحصل على صيغة تستخدم لإيجاد الانفعالات والإزاحات الحرارية * الناجمة عن تغير درجات الحرارة ، وهى كما يلى :

* يفترض بأن يكون تغير درجات الحرارة متساوياً على طول كل قضيب (أو قطعة) ، وأن ارتفاع h المقطع العرضى لكل قضيب (أو قطعة) يبقى ثابتاً أيضاً ، على الطول بأجمعه .

$$\Delta_{mt} = \Sigma \alpha \frac{t_1 - t_2}{h} \int_0^l \overline{M}_m dx + \Sigma \alpha \frac{t_1 + t_2}{2} \int_0^l \overline{N}_m dx \qquad (6-19)$$

وتدل العلامة Σ ، على الجمع فى كافة قضبان وقطع الإنشاء .

وعند حساب الانفعال Δ_{mt} ، تجرى عملية التكامل ، فقط بالنسبة لقطع (قضبان) الإنشاء ، التى تغيرت درجات حرارتها . وفى القضبان المستقيمة أو المحنية ، ذات المقطع الثابت ، يمكن حساب التكاملات على أنها مساحات وحدات الرسوم البيانية (الرسوم البيانية لوحدات الإجهاد) ، وهذا ما يجعل صيغة الانفعالات المذكورة أعلاه ، تأخذ الشكل البسيط جدا التالى :

$$\Delta_{mt} = \Sigma \alpha \frac{t_1 - t_2}{h} \Omega_{\overline{M}} + \Sigma \alpha \frac{t_1 + t_2}{2} \Omega_{\overline{N}} \qquad (6-20)$$

حيث $\Omega_{\overline{M}}$ و $\Omega_{\overline{N}}$ — تمثلان الرسمين البيانيين لوحدتى العزم $\overline{M}$ والقوة الطولية $\overline{N}$.

وعندما يكون مقطع القضيب غير متماثل بالنسبة للمحور الأفقى ، يدخل فى الصيغة المقدار $t_2 + \frac{t_1 - t_2}{h} y$ بدلا من المقدار $\frac{t_1 + t_2}{2}$ ، حيث y تمثل المسافة من الألياف السفلى للقضيب إلى المحور الأفقى ، المار فى مركز ثقل المقطع العرضى .

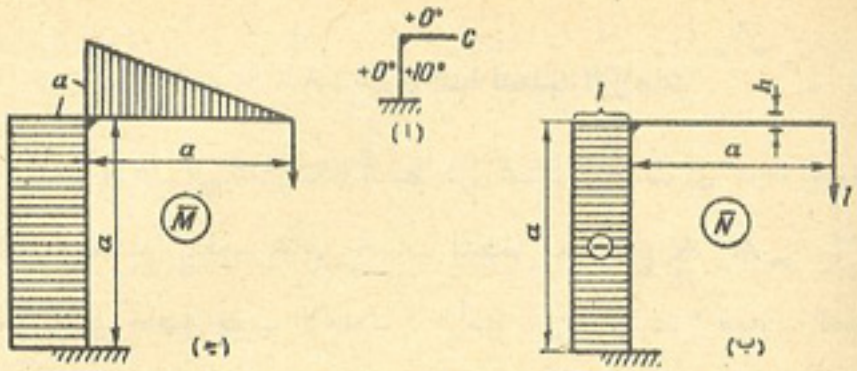
وتحدد علامات حدود صيغة Δ_{mt} كما يلى : إذا كانت انفعالات القطعة dx ، الناجمة عن كل من تغير درجات الحرارة ووحدة الحمل متجهة فى نفس الاتجاه ، تكون علامة الحد المناظر لها ، موجبة ، والعكس بالعكس .

وعند تحديد الانفعالات (الإزاحات) الحرارية ، المؤثرة فى الإنشاء لا يجوز إهمال حد الصيغة ، المعتمد على القوة الطولية .

مثال : يطلب تحديد الإزاحة الرأسية للنقطة C ، من الإطار المرفق المذكور فى المثال السابق والمبين فى الشكل (٦ — ٢٢) ، عندما ترتفع درجة الحرارة داخل المبنى بمقدار $10°$ مئوية ، وتبقى درجة الحرارة خارج المبنى ثابتة (شكل ٦ — ٢٥ ، أ) .

الحل : نسلط على الإطار المرفق وحدة الحمل فى اتجاه الإزاحة المطلوبة ، ونخطط منها الرسمين البيانيين $\overline{N}$ و $\overline{M}$ ، الناجمين عن تأثير وحدة الحمل المذكورة (شكل ٦ — ٢٥ ، ب ، جـ) .

نحسب مساحتى الرسمين البيانيين المذكورين ، وتساويان ما يلى :



الشكل ٦ — ٢٥

$$\Omega_{\overline{N}} = 1 \times a = a$$

$$\Omega_{\overline{M}} = \frac{aa}{2} + aa = 1.5\, a^2$$

ثم نحسب كذلك قيم الحدود التى تعتمد مباشرة على تغير درجات الحرارة :

$$\frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{0 + 10}{2} = 5$$

$$|t_1 - t_2| = |0 - 10| = 10$$

وتشير الخطوط المستقيمة فى الصيغة الأخيرة ، إلى أن الفرق فى درجات الحرارة ، يقاس بالقيمة المطلقة .

إن درجة الحرارة تؤدى إلى تمدد الألياف الداخلية للإطار . أكثر من تمدد الألياف الخارجية ، أما وحدة الحمل فتؤدى إلى تمدد الألياف الخارجية وتقلص الألياف الداخلية ، ولهذا السبب يجب أن توضع علامة سالبة قبل حد صيغة الانفعالات (الإزاحات) الحرارية ، الذى يحتوى على عزوم الانحناء . ويجب كذلك وضع علامة سالبة ، قبل الحد الذى يحتوى على القوة الطولية ، وذلك لأن تغير درجات الحرارة ، يؤدى إلى تمدد الضلع القائم للإطار ، بينما تؤدى وحدة الحمل إلى تقلصه .

وهكذا نحصل على الصيغة التالية :

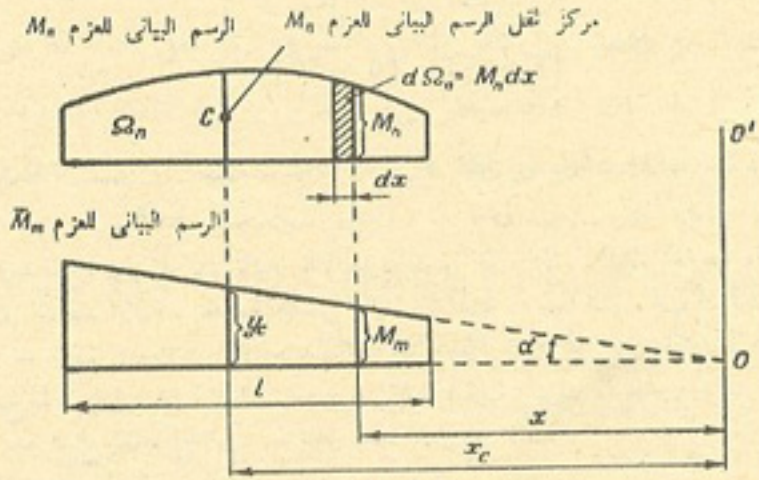
$$\Delta_{mt} = -5\, \alpha a - 15\, \alpha \frac{a^2}{h}$$

البند ٦ – ٨ : الطرق الفنية لتحديد الإزاحات

يمكن فى عدد من الحالات ، تبسيط طرق تحديد الإزاحات إلى درجة كبيرة ، وذلك باستخدام أسلوب خاص لحساب التكامل من النوع $\int_0^l \overline{M}_m M_n \, dx$ * . ونظراً لدخول حاصل ضرب الإحداثيات الرأسية لـ $\overline{M}_m$ و M_n ضمن الصيغة المسبوقة بعلامة التكامل ، تسمى هذه الطريقة بطريقة مضاعفة الرسوم البيانية (multiplication method graph) . ويمكن استخدام هذه الطريقة ، عندما يكون أحد الرسوم البيانية المضاعفة ، مثل الرسم البيانى لـ $\overline{M}_m$ ، على هيئة مستقيم ، ويمكن أن يكون الرسم البيانى الآخر أما على هيئة مستقيم أو خط منكسر أو خط منحن . وفى هذه الحالة ، يمكن وضع الصيغة التالية :

$$\overline{M}_m = x \tan \alpha$$

وقيمتا x و α مبينتان فى الشكل (٦ – ٢٦) .



الشكل ٦ – ٢٦

* وكذلك من النوعين $\int_0^l \overline{N}_m N_n \, dx$ و $\int_0^l \overline{Q}_m Q_n \, dx$.

وبتعويض قيمة $\overline{M}_m$ فى الصيغة $\int_0^l \overline{M}_m M_n \, dx$ ، نحصل على ما يلى :

$$\int_0^l \overline{M}_m M_n \, dx = \tan \alpha \int_0^l x M_n \, dx = \tan \alpha \int_0^l x \, d\Omega_n$$

حيث $d\Omega_n = M_n dx$ – تمثل تفاضل المساحة Ω_n ، التابعة للرسم البيانى M_n (شكل ٦ – ٢٦) .

ويمثل التفاضل $\int_0^l x \, d\Omega_n$ العزم الاستاتيكى للمساحة Ω_n ، التابعة للرسم البيانى M_n ، حول المحور $O - O'$ (شكل ٦ – ٢٦) .

ويمكن التعبير عن هذا العزم الاستاتيكى ، بصيغة أخرى ، وهى :

$$\int_0^l x \, d\Omega_n = \Omega_n \times x_c$$

حيث x_c – الإحداثى السينى لمركز ثقل المساحة Ω_n ؛ التابعة للرسم البيانى M_n. عندئذ نحصل على ما يلى :

$$\int_0^l \overline{M}_m M_n \, dx = x_c \tan \alpha \times \Omega_n$$

ولكن بما أن $x_c \tan \alpha = y_c$ (لاحظ الشكل ٦ – ٢٦) ، إذن يكون لدينا :

$$\int_0^l \overline{M}_m M_n \, dx = \Omega_n y_c \qquad (6-21)$$

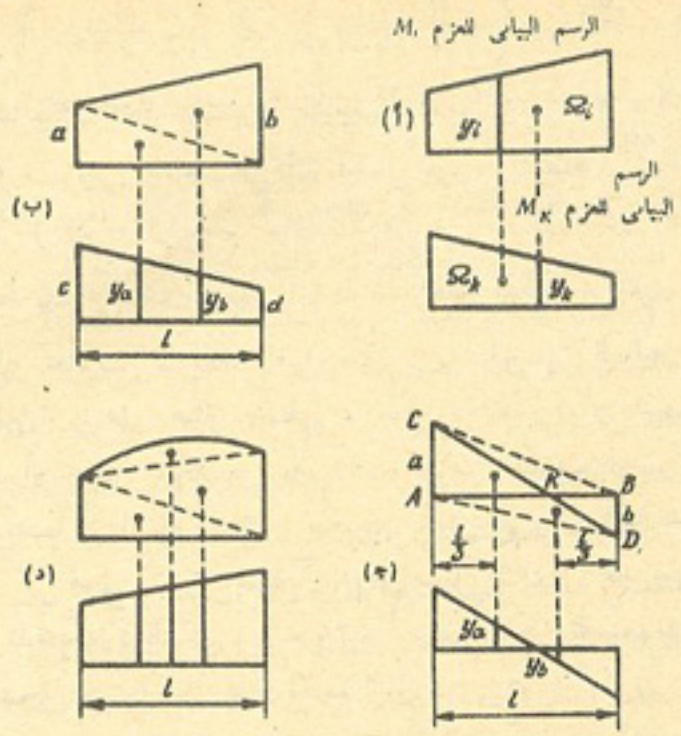
وإذن تكون نتيجة مضاعفة (ضرب) الرسمين البيانيين ، مساوية لحاصل ضرب مساحة أحدهما ، فى الإحداثى الرأسى y_c للرسم البيانى الثانى (الذى يجب أن يكون مستقيماً بالضرورة) ، المأخوذ تحت مركز ثقل مساحة الرسم البيانى الأول .

وعند ضرب الرسوم البيانية فى بعضها توضع علامة موجبة عندما تكون علامتا الرسم البيانى والإحداثى الرأسى الواقع تحت مركز ثقله المأخوذ من الرسم البيانى الآخر متماثلتين ، وتوضع علامة سالبة عندما تكون العلامتان المذكورتان مختلفتين . وقد اقترحت طريقة مضاعفة أو ضرب الرسوم البيانية هذه ، فى عام ١٩٢٥ من قبل أحد طلبة معهد مهندسى السكك الحديدية بموسكو ، ويدعى أ . فيريشاجين ، ولذلك يطلق على هذه الطريقة أيضاً اسم قاعدة أو طريقة فيريشاجين .

ونلاحظ بأن الطرف الأيسر من الصيغة الأخيرة ، يختلف عن تكامل مور ، بعدم احتوائه على عامل جسوءة المقطع EJ . إذن يجب تقسيم نتيجة ضرب الرسوم البيانية ، المستخرجة طبقاً لقاعدة فيريشاجين ، على عامل جسوءة المقطع ، EJ وذلك عندما يراد تحديد الأزاحة المطلوبة .

ومن المهم جداً الإشارة إلى إن الإحداثى الرأسى y_c ، يجب أن يؤخذ حتماً ، من الرسم البيانى المستقيم . وإذا كان كلا الرسمين البيانيين ، على هيئة خط مستقيم (مستقيمين) ، عندئذ يمكن أخذ الإحداثى الرأسى المذكور ، من أى واحد منهما . وهكذا إذا أريد مضاعفة أو ضرب الرسمين البيانيين المستقيمين M_i و M_k (شكل ٦ — ٢٧ ، أ) ، فسوف تكون النتيجة متساوية تماماً فيما إذا أخذ حاصل الضرب $\Omega_i y_k$ (المساحة Ω_i التابعة للرسم البيانى M_i فى الإحداثى الرأسى y_k ، الواقع تحت مركز ثقلها ، والمأخوذ من الرسم البيانى M_k) ، لو إذا أخذ حاصل الضرب $\Omega_k y_i$ (المساحة Ω_k التابعة للرسم البيانى M_k ، فى الإحداثى الرأسى y_i ، الواقع تحت أو فوق مركز ثقلها ، والمأخوذ من الرسم البيانى M_i) .

وعندما يراد ضرب رسمين بيانيين على هيئة شبه المنحرف ، عندئذ ليست هناك ضرورة لإيجاد مركز ثقل مساحة أحد الرسمين البيانيين . ومن الأسهل فى هذه الحالة ، تقسيم أحد الرسمين البيانيين إلى مثلثين ، وضرب مساحة كل مثلث فى الإحداثى الرأسى الواقع تحت مركز ثقله ، والمأخوذ من الرسم البيانى الآخر . مثلا ، فى الحالة المبينة فى الشكل (٦ — ٢٧ ، ب) ، نحصل على المعادلة التالية :



الشكل ٦ — ٢٧

$$\frac{al}{2}y_a + \frac{bl}{2}y_b = \frac{al}{2}\left(\frac{2c}{3}+\frac{d}{3}\right)+\frac{bl}{2}\left(\frac{c}{3}+\frac{2d}{3}\right) = \frac{1}{6}\left(2ac+2bd+ad+bc\right)$$

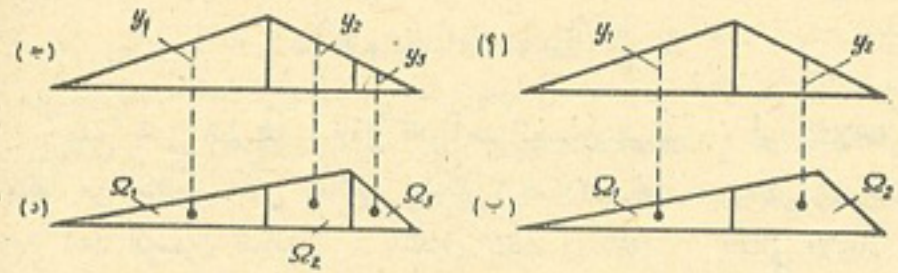
ونتبع نفس الطريقة ، إذا كان أحد الرسمين البيانيين ، أو كلاهما ، مؤلفاً من مثلثين مختلفى العلامة (شكل ٦ — ٢٧ ، ج) . ويمكن التعويض عن أحد الرسمين البيانيين ، بالمثلثين ABC و ABD ، المختلفى الاتجاه ، وفى هذه الحالة سوف لا يؤثر المثلثان الإضافيان CBK و AKD على النتيجة المطلوبة ، وذلك لأن إحداثييهما الرأسيين ، متساويان فى المقدار ومختلفان فى العلامة .

وبنتيجة ضرب الرسمين البيانيين ، الموضحين فى الشكل (٦ — ٢٧ ، ج) نحصل على ما يلى :

$$\frac{al}{2}y_a + \left(-\frac{bl}{2}\right)\left(-y_b\right) = \frac{al}{2}y_a + \frac{bl}{2}y_b$$

وعندما يكون أحد الرسمين البيانيين (شكل ٦ — ٢٧ ، د) على هيئة قطع مكافئ مخروطى (ناجم عن تأثير الحمل الموزع بانتظام ، بشدة قدرها q) ، عندئذ لأجل ضربه فى الرسم البيانى الآخر ، يقسم إلى مثلثين وقطع مكافئ : وهنا نلاحظ بأن الإحداثى الرأسى المتوسط لهذا القطع المكافئ ، يساوى $\frac{ql^2}{8}$ دائماً .

وهناك حالات لا يكون فيها أى من الرسمين البيانيين المضروبين (المضاعفين) ، على هيئة مستقيم ، ولكن احدها (أو كليهما) محدد بمستقيمات أو خطوط منكسرة . وفى هذه الحالات ، لضرب الرسمين البيانيين ، يقسمان مسبقاً إلى أقسام معينة ، بحيث يكون رسم بيانى واحد على الأقل ، فى حدود كل قسم منها ، مستقيماً : وعلى سبيل المثال ، عند ضرب الرسمين البيانيين الموضحين فى الشكل (٦ — ٢٨ ، أ ، ب) يمكن تقسيمهما إلى قسمين ، ووضع نتيجة الضرب على هيئة الجمع التالى : $\Omega_1 y_1 + \Omega_2 y_2$. ويمكن عند ضرب نفس الرسمين البيانيين ، تقسيمهما إلى ثلاثة أقسام ، كما مبين فى الشكل (٦ — ٢٨ ، جـ ، د) ، وفى هذه الحالة ستكون نتيجة ضرب الرسمين البيانيين ، مساوية لما يلى : $\Omega_1 y_1 + \Omega_2 y_2 + \Omega_3 y_3$.



الشكل ٦ — ٢٨

وعند تطبيق قاعدة فيريشاجين ، يجب حساب مساحات الأشكال المختلفة ، وتحديد مواضع مراكز ثقلها . وبناء على ذلك ، أدرجت فى الجدول (٦ — ٢) قيم المساحات والإحداثيات الرأسية لمراكز الثقل ، لأكثر الأشكال التى تصادفنا عملياً .

ويحتوى الجدول (٦ — ٣) على قيم التفاضل $\int M_1 M_k dx$ ، لمختلف أنواع الرسمين البيانيين لـ M_1 و M_k . أن استخدام هذا الجدول يسهل حساب الإزاحات والانفعالات .

ومن المفيد استخدام قاعدة فيريشاجين لحساب تكامل مور ، عند تحديد الإزاحات أو الانحرافات فى العتبات ذات الجسوءة الثابتة على امتداد طولها بأكمله ، أو فى حدود أقسام معينة منها ، وكذلك فى الأطر المصنوعة من القضبان (القطع) المستقيمة ، ذات الجسوءة الثابتة أو المتغيرة تدريجياً . وعندما تكون جسوءة القطعة الإنشائية ، مستمرة التغير على امتدادها ، لا يمكن إخراج المقدار EJ خارج علامة التكامل ، ولذلك لا يمكن استخدام قاعدة فيريشاجين مباشرة : وفى هذه الحالة ، يجب تحديد الإزاحات أو الانحرافات ، أما بطريقة الحساب التحليلى لتكامل مور ، أو بطريقة فيريشاجين ، ولكن بعد الاستعاضة التقريبية عن الجسوءة المستمرة التغير للقطعة الإنشائية ، بالجسوءة المتغيرة تدريجياً .

وعند تحديد إزاحات أو انحرافات الإنشاءات التشابكية (الجمالونات) ، تختفى الحدود المحتوية على عزوم الانحناء وقوى القص ، من صيغة الإزاحات ، وذلك لنشوء قوى طولية فقط ، فى المقاطع العرضية لقضبان الجمالونات . وبناء على ذلك ، تكون صيغة الإزاحات (صيغة مور) فى هذه الحالة ، على الشكل التالى :

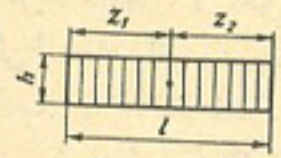
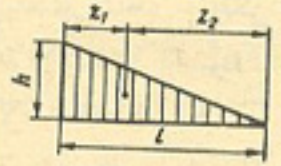
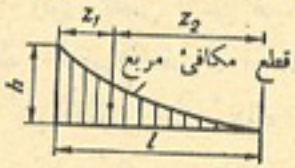
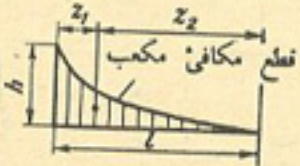
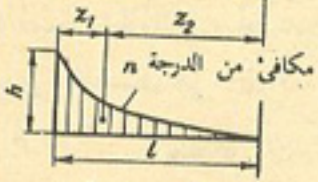
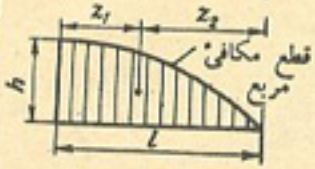
$$\Delta_{mn} = \Sigma \int_0^l \bar{N}_m \frac{N_n\, dx}{EF}$$

وتجرى عملية الجمع بالنسبة لكافة قضبان الجمالون ، أما عملية التكامل ، فتجرى فى حدود طول كل قضيب من القضبان على انفراد . وتبقى القوى الطولية $\bar{N}_m$ و N_n والمساحة F ومعامل المرونة E ، ثابتة على طول كل قضيب ، ولهذا تأخذ الصيغة السابقة ، الشكل التالى :

$$\Delta_{mn} = \Sigma \frac{\bar{N}_m N_n}{EF} \int_0^l dx = \Sigma \frac{\bar{N}_m N_n}{EF} l \qquad (6-22)$$

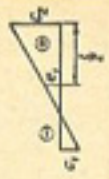
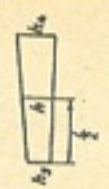
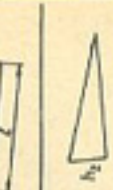
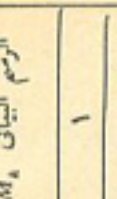
وهكذا تحدد انحرافات أو إزاحات الجمالونات ، بجمع حواصل الضرب من النوع $\frac{\bar{N}_m N_n}{EF} l$ ، المستخرجة لكل قضيب من القضبان. ومن السهل وضع نتائج حساب إزاحات أو انحرافات الإنشاءات التشابكية (الجمالونات) ، فى جدول خاص بذلك .

جدول ٦ — ٢

التسلسل	شكل الرسم البيانى	المساحة Ω	الإحداثى السينى لمركز الثقل z_1	z_2
1		hl	$\frac{l}{2}$	$\frac{l}{2}$
2		$\frac{hl}{2}$	$\frac{l}{3}$	$\frac{2l}{3}$
3		$\frac{hl}{3}$	$\frac{l}{4}$	$\frac{3l}{4}$
4		$\frac{hl}{4}$	$\frac{l}{5}$	$\frac{4l}{5}$
5		$\frac{hl}{n+1}$	$\frac{l}{n+2}$	$\frac{(n+1)\,l}{n+2)}$
6		$\frac{2hl}{3}$	$\frac{3l}{8}$	$\frac{5l}{8}$

جدول ٦ — ٣

قيم تكاملات مور $\int M_1 M_n ds$ (أن طول قاعدة كل رسم بيانى يساوى ١)

الرسم البيانى M_1 M_n	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
	$\frac{1}{6} h_2 (2c_2 - c_1)$	$\frac{l}{6} h_2 (2h_4 + h_3)$	$\frac{l}{6} [2(-c_1 h_5 + c_2 h_6) - c_1 h_6 + c_2 h_5]$	$\frac{l}{6} [2(c_1 c_3 + c_2 c_4) - c_2 c_3 - c_1 c_4]$	$\frac{l}{12} (-3c_1 + c_2)$	$\frac{l f'}{3} (-c_1 + c_2)$	$\frac{l}{6} (-c_1 k' + 4c_1 h_0 + c_2 k')$
	$\frac{l h_2^2}{6}$	$\frac{l h_2 h_3}{3}$	$\frac{l h_2}{6} (2h_5 + h_6)$	$\frac{l h_2}{6} (-2c_3 + c_4)$	$\frac{l f_2 h_2}{4}$	$\frac{l f' h_2}{3}$	$\frac{l}{6} h_2 (k' + 2h_0)$
	$\frac{l h_2}{6} (2h_4 + h_3)$	$\frac{l}{6} [2(h_3 h_4 + h_4 h_6) + h_3 h_6 + h_4 h_3]$	$\frac{l h_2}{6} (2h_6 + h_5)$	$\frac{l h_2}{6} (2c_4 - c_3)$	$\frac{l f_2 h_2}{12} (3h_3 + h_4)$	$\frac{l f' h_2}{3} (h_3 + h_4)$	$\frac{l}{6} (h_3 k' + 4k h_0 + h_4 k')$
	$\frac{l}{6} h_2 (2c_2 - c_1)$	$\frac{l h_2 h_3}{3}$	$\frac{l}{6} h_2 (2h_6 + h_5)$	$\frac{l h_2}{6} (2c_4 - c_3)$	$\frac{l f_2 h_2}{12}$	$\frac{l f' h_2}{3}$	$\frac{l h_2}{6} (2h_0 + k')$

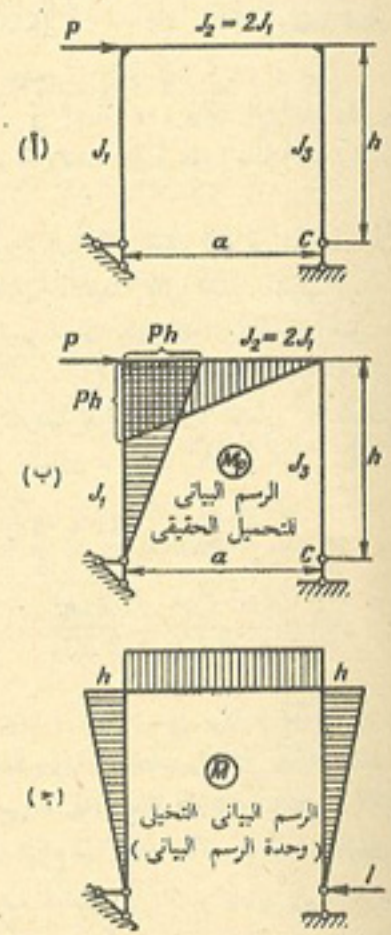
تابع الجدول ٦ – ٣

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
شبه منحرف مربع	$\frac{1}{12}J_1h_2$	$\frac{1}{12}J_1(3h_1+h_2)$	$\frac{1}{12}J_1(-3c_1+c_2)$	$\frac{1}{5}J_1J_2$	$\frac{1}{5}J_1J_2$	$\frac{1}{60}J_1[5(3x'+x')+12z']$
شبه منحرف مربع	$\frac{1}{4}J_1h_2$	$\frac{1}{12}J_1(3h_1+h_2)$	$\frac{1}{12}J_1(3c_2)$	$\frac{1}{30}J_1J_2$	$\frac{1}{5}J_1J_2$	$\frac{1}{60}J_1[5(3x'+x')+12z']$
شبه منحرف مربع	$\frac{1}{3}J_1h_2$	$\frac{1}{3}J_1(h_1+h_2)$	$\frac{1}{3}J_1(c_1+c_2)$	$\frac{1}{5}J_1J_2$	$\frac{8}{15}J_1J_2$	$\frac{1}{15}J_1[5(x'+x')+8z']$
شبه منحرف مربع	$\frac{1}{6}h_2(2x'+x)$	$+\frac{1}{6}(h_1x'+4x'+h_2x)$	$+\frac{1}{6}(-c_1+4c_0+c_2)$	$+\frac{1}{60}J_1[5(3x+x)+12z]$	$+\frac{1}{15}J_1[5(t+x)+8z]$	$+\frac{1}{6}[2x'+2x'+x'+x'+2z'(t+x)+2z'(t+x)+3\times2z'z']$

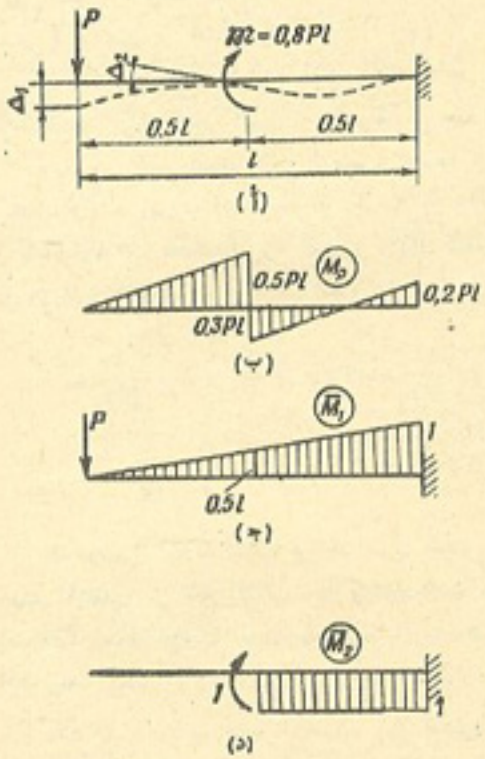
البند ٦ – ٩ : أمثلة لتحديد الإزاحات أو الانحرافات باستخدام طريقة فيريشاجين

مثال ١ : يطلب تحديد انحراف النقطة C فى العتبة المبينة فى الشكل (٦ – ١٩ ، أ) ، على أن يؤخذ فى الاعتبار فى هذه الحالة ، تأثير عزوم الانحناء وقوى القص .

الحل : إن حالة تأثير وحدة الحمل على العتبة ، وكذلك الرسوم البيانية للإجهادات الداخلية الناشئة فيها ، نتيجة لتأثير الحمل P_n ، ووحدة الحمل P_m ، مبينة فى الشكل (٦ – ١٩ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، و) .



الشكل ٦ – ٢٩



الشكل ٦ – ٣٠

وباستخدام طريقة فيريشاجين لإيجاد الانحرافات ، نحصل على ما يلى :

$$\Delta_{mn} = \frac{2}{EJ} \times \frac{P_d l}{4} \times \frac{l}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{l}{4} + \frac{2\eta}{GF} \times \frac{P_n}{2} \times \frac{l}{2} \times \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{P_n l^3}{48\,EJ} + \frac{P_n \eta l}{4\,GF}$$

وهذه النتيجة تنطبق مع النتيجة التى حصلنا عليها (على الصفحة ٣٧٢) ، باستخدام التكامل .

مثال ٢ : يطلب تحديد الإزاحة الأفقية للنقطة C ، فى الإطار المبين فى الشكل (٦ – ٢٩ ، أ) . مع العلم بأن عزوم القصور الذاتى لقوائم الإطار ولعارضته ، موضحة فى الرسم التخطيطى ، وأن E ثابتة .

الحل : أن حالة التحميل الحقيقة للإطار مبينة فى الشكل (٦ – ٢٩ ، أ) . والرسم البيانى لعزوم الانحناء M_p فى هذه الحالة (الرسم البيانى الحقيقى) موضح فى الشكل (٦ – ٢٩ ، ب) .

فى حالة تأثير وحدة الحمل ، تؤثر على الإطار فى النقطة C ، باتجاه الإزاحة المطلوبة (أى أفقياً) ، وحدة حمل واحدة . والرسم البيانى لعزوم الانحناء $\overline{M}$ فى هذه الحالة (وحدة الرسم البيانى) ، مبين فى الشكل (٦ – ٢٩ ، ج) .

ويمكن عدم وضع علامات عزوم الانحناء على الرسوم البيانية ، وذلك لأنه من المعروف بأن الإحداثيات الرأسية للرسم البيانى ، موضوعة من جهة الألياف المشدودة لكل قطعة (قضيب) .

وبضرب الرسم البيانى لحالة التحميل الحقيقية فى الرسم البيانى لحالة التحميل بوحدة الحمل ، (التخيلية) ، بطريقة فيريشاجين (شكل ٦ – ٢٩ ، ب ، ج) ، على أن تؤخذ بنظر الاعتبار فى هذه الحالة القيم المختلفة لعزوم القصور الذاتى للمقاطع العرضية لقوائم وعارضة الإطار ، فنحصل على الإزاحة المطلوبة (الانحراف المطلوب) للنقطة C ، وتساوى ما يلى :

$$\Delta_C = -Ph\,h \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times h \times \frac{1}{EJ_1} - Ph\,a \times \frac{1}{2} \times h \times \frac{1}{EJ_2} =$$

$$= -\frac{Ph^3}{3\,EJ_1} - \frac{Pa\,h^2}{2\,EJ_2} = -\frac{Ph^2}{EJ_1}\left(\frac{h}{3} + \frac{a}{4}\right)$$

وقد وضعت العلامة السالبة ، عند ضرب الرسوم البيانية ، لأن الرسمين M_p و $\overline{M}$ واقعان فى جهتين مختلفتين من قطع الإطار ، وبذلك تكون علامات عزمى الانحناء M_p و $\overline{M}$ مختلفة . إن القيمة السالبة للإزاحة المستخرجة للنقطة C ، تدل على أن هذه النقطة لا تنزاح (تنحرف) فى اتجاه وحدة الحمل (لاحظ الشكل ٦ – ٢٩ ، ج) ، بل تنزاح فى الاتجاه المعاكس ، أى إلى اليسين .

مثال ٣ : يطلب تحديد الانحراف Δ_1 للعتبة المعرضة لتأثير الحمل P ، وتحديد زاوية الدوران Δ_2 للمقطع العرضى للعتبة ، الذى يؤثر فيه العزم m (شكل ٦ – ٣٠ ، أ) . إن الرسم البيانى M_p لعزوم الانحناء الناجمة فى العتبة ، نتيجة لتأثير الحمل المذكور مبين فى الشكل (٦ – ٣٠ . ب) .

الحل : نسلط على العتبة فى اتجاهات الانحرافات المطلوبة ، وحدة القوة (شكل ٦ – ٣٠ ، ج)

ووحدة العزم (شكل ٦ – ٣٠ ، د) ونخطط الرسوم البيانية لعزوم الانحناء ، الناجمة عن تأثير الوحدتين المذكورتين (شكل ٦ – ٣٠ ، ج ، د) . ثم نقوم بتحديد الانحرافات باستخدام صيغة مور . ولهذا الغرض ، نستخدم طريقة فيريشاجين لضرب الرسمين البيانيين M_p و $\overline{M}_1$ ، ثم لضرب الرسمين البيانيين M_p و $\overline{M}_2$ ، وذلك كما يلى :

$$\Delta_1 = \frac{1}{EJ}\Big[0.5\,Pl \times 0.5\,l \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times 0.5\,l + \frac{0.5\,l}{6}\big(-2\times0.3\,Pl\times0.5\,l +$$

$$+2\times0.2\,Pl \times l - 0.3\,Pl\times l + 0.2\,Pl \times 0.5l\big)\Big] = \frac{Pl^3}{30\,EJ}$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{EJ}\left(0.3\,Pl \times 0.5\,l \times \frac{1}{2} \times 1 - 0.2\,Pl \times 0.5\,l \times \frac{1}{2} \times 1\right) = \frac{Pl^2}{40\,EJ}$$

مثال ٤ : يطلب تحديد الإزاحة الأفقية للنقطة D ، من الإطار المبين فى الشكل (٦ – ٣١ ، أ) .

الحل : إن الرسم البيانى لعزوم الانحناء M_p ، الناجمة عن تأثير الحمل ، مبين فى الشكل (٦ – ٣١ ، ب) . نسلط وحدة الحمل فى اتجاه الإزاحة المطلوبة ، ونخطط الرسم البيانى التخيلى (وحدة الرسم البيانى) لعزوم الانحناء $\overline{M}$ ، الناجمة عن تأثير وحدة الحمل المذكورة (شكل ٦ – ٣١ ، ج) .

نضرب الرسمين البيانيين M_p ، $\overline{M}$ فى بعضهما ، بطريقة فيريشاجين ، ونحدد الإزاحة المطلوبة Δ_1 ، على أن نأخذ فى الاعتبار ، فى هذه الحالة ، الاختلاف الواضح فى عزوم القصور الذاتى للمقاطع العرضية لهذا الإطار ، أى :

$$\Delta_1 = \frac{qa^2}{2} \times a \times \frac{1}{3} \times \frac{3a}{4} \times \frac{1}{EJ_1} + \frac{qa^2}{2} \times a \times a \times \frac{1}{EJ_1} +$$

$$+ \frac{2a}{6} \times \left(2\times \frac{qa^2}{2} \times a + 2 \times \frac{3qa^2}{2}\,a - \frac{qa^2}{2} \times a - \frac{3\,qa^2}{2} \times a\right)\frac{1}{EJ_2} =$$

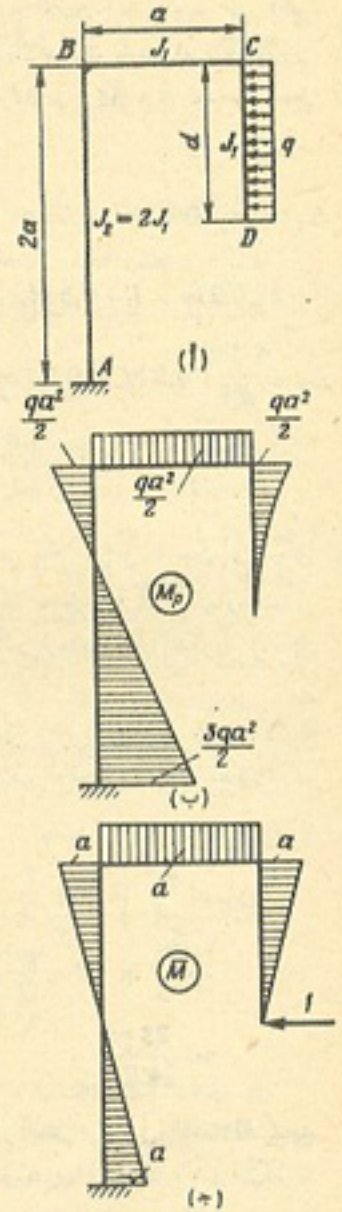
$$= \frac{23\,qa^4}{24\,EJ_1}$$

وقد أخذ فى الاعتبار عند ضرب الرسوم البيانية ، بأن مساحة الرسم البيانى M_p فى القسم CD من الإطار ، محددة أو محاطة بقطع ناقص مقعر ، يساوى ثلث حاصل ضرب الإحداثى الرأسى الأكبر ، فى طول القطعة (القضيب) ، أى أن :

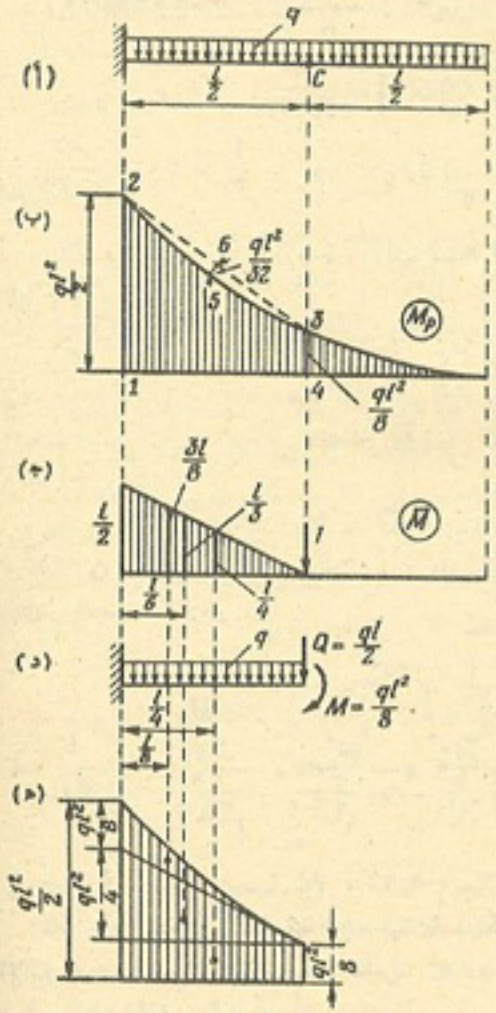
$$\Omega_{CD} = \frac{1}{3} \times \frac{qa^2}{2} \times a = \frac{qa^3}{6}$$

ويقع مركز ثقل هذا القطع الناقص ، على مسافة $\frac{a}{4}$ من النقطة C للإطار المذكور (راجع

الجدول ٦ – ٢) ، إذن يكون الإحداثى الرأسى للرسم البيانى $\overline{M}$ ، المناظر لمركز الثقل المذكور، مساوياً للمقدار $\frac{3a}{4}$.



الشكل ٦ – ٣١



الشكل ٦ – ٣٢

مثال ٥ : يطلب تحديد الإزاحة الرأسية (الانحراف الرأسى) Δ_C للنقطة C ، من العتبة المثبتة من طرفها الأيسر ، والمعرضة لتأثير حمل موزع بانتظام (شكل ٦ – ٣٢ ، أ) .

الحل : نخطط الرسم البيانى الحقيقى لعزوم الانحناء M_p (شكل ٦ – ٣٢ ، ب) . ثم نسلط

وحدة الحمل فى اتجاه الإزاحة المطلوبة ، ونخطط الرسم البيانى التخيلى لعزوم الأنحناء $\overline{M}$ ، الناجمة عن تأثير وحدة الحمل المذكورة (شكل ٦ – ٣٢ ، جـ) .

ولتحديد الإزاحة Δ_C ، يجب ضرب الرسمين البيانيين M_p و $\overline{M}$. ويمكن القيام بذلك ، باتباع طرق مختلفة، نتطرق هنا إلى اثنتين منها فقط :

الطريقة الأولى – نعتبر بان الرسم البيانى M_p ، فى النصف الأيسر من العتبة ، مؤلفاً من شبه المنحرف 1 – 4 – 3 – 6 – 2 – 1 ، ذى الإحداثيات الرأسية السالبة ، ومن القطع الناقص المخروطى المحدب 2 – 5 – 3 – 6 – 2 ، ذى الإحداثيات الرأسية الموجبة (شكل ٦ – ٣٢، ب) .

أن الإحداثى الرأسى الاكبر للقطع الناقص ، يساوى ما يلى :

$$\frac{q\left(\frac{l}{2}\right)^2}{8} = \frac{ql^2}{32}$$

وبضرب الرسمين البيانيين M_p و $\overline{M}$ فى بعضهما ، نحصل على ما يلى :

$$\Delta_C = \frac{1}{EJ}\left[\frac{l}{2} \times \frac{l}{2} \times \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} \times \frac{ql^2}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{ql^2}{8}\right) - \frac{ql^2}{32} \times \frac{l}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{l}{2}\right] = \frac{17}{384}\frac{ql^4}{EJ}$$

الطريقة الثانية – نهمل النصف الأيمن للعتبة ، ونعوض عن تأثيره على النصف الأيسر ، بالعزم $M = \frac{ql^2}{8}$ ، وقوة القص $Q = \frac{ql}{2}$ ، المؤثرين فى المقطع C من العتبة (شكل ٦–٣٢، د) .

أن الرسم البيانى لعزوم الانحناء M_p للنصف الأيسر المتبقى من العتبة ، مبين فى الشكل (٦ – ٣٢ ، هـ) . وهذا الرسم البيانى مشابه تماماً للرسم البيانى 1 – 4 – 3 – 5 – 2 – 1 ، المبين فى الشكل (٦ – ٣٢ ، ب) . والآن نقسم الرسم البيانى M_p إلى الاقسام التالية التى يتألف منها (شكل ٦ – ٣٢ ، هـ) وهى :

(أ) الرسم البيانى لعزوم الانحناء ، الذى على هيئة مستطيل ، وإحداثياته الرأسية تساوى $\frac{ql^2}{8}$ (ناجم عن تأثير العزم $M = \frac{ql^2}{8}$ ، المؤثر فى المقطع C من العتبة) .

(ب) الرسم البيانى للعزوم ، الذى على هيئة مثلث ، وإحداثيه الرأسى الأكبر يساوى $\frac{ql^2}{4}$ (ناجم عن تأثير قوة القص $Q = \frac{ql}{2}$ ، المؤثرة فى المقطع C) .

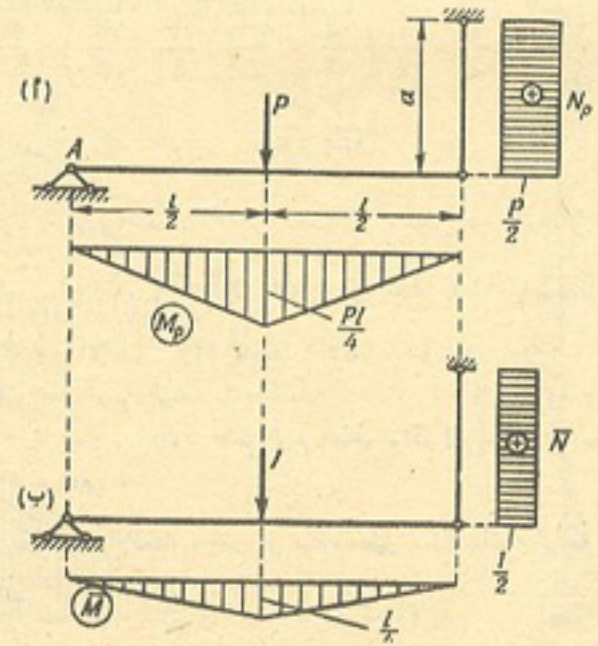
(جـ) الرسم البيانى للعزوم، الذى على هيئة قطع مكافىء مخروطى مقعر ، وإحداثيه الرأسى الأكبر

يساوى $\frac{ql^2}{8}$ (ناجم عن تأثير الحمل الموزع بانتظام q ، المؤثر فى النصف الأيسر من العتبة) .

وبضرب كل قسم من الأقسام المذكورة للرسم البيانى (شكل ٦ – ٣٢ ، هـ) فى وحدة الرسم البيانى ، أى فى الرسم البيانى التخيلى (شكل ٦ – ٣٢ ، جـ) ، نحصل على ما يلى :

$$\Delta_c = \frac{1}{EJ}\left(\frac{ql^2}{8}\times\frac{l}{2}\times\frac{l}{4}+\frac{ql^2}{4}\times\frac{l}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{l}{3}+\frac{ql^2}{8}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{l}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}\,l\right)=\frac{17\,ql^4}{384EJ}$$

مثال ٦ : يطلب تحديد الإزاحة الرأسية للعتبة المبينة فى الشكل (٦ – ٣٢ ، أ) فى نقطة تسليط الحمل P . أن الطرف الأيسر للعتبة يستند على مسند مفصل ثابت ، أما الطرف الأيمن ، فعلق بشدادة ، متصلة مفصليا مع العتبة كما مبين فى الشكل المذكور . هذا مع العلم بأن جسوءة مقطع العتبة تساوى EJ ، وجسوءة مقطع الشدادة (الكبل) تساوى EF .



الشكل ٦ – ٣٣

الحل : فى هذه الحالة ، نجد بأن أحد قسمى الإنشاء (وهو العتبة بالذات) يكون معرضاً للانحناء ، بينما يكون القسم الثانى (وهو الشدادة) معرضاً للشد . وعند حساب تكامل مور ، يجب أن يحسب ، بالنسبة للعتبة ، الحد الذى يحتوى على عزوم الانحناء فقط . وينشأ فى الشدادة إجهاد داخلى فقط ،

مثلا فى القوة الطولية N ، ولذلك لحساب إزاحتها (انحرافها) ، يجب حساب الحد الذى يحتوى على القوة الطولية فقط ، من حدود تكامل مور .

وهكذا نجد بأن صيغة تحديد الإزاحات الكلية لنقطة تأثير الحمل ، تكون على الشكل التالى :

$$\Delta = \int_0^l \frac{M_p\,\bar{M}\,dx}{EJ} + \int_0^a \frac{N_p\,\bar{N}\,dx}{EF}$$

والآن نسلط على العتبة وحدة الحمل ، فى اتجاه الإزاحة المطلوبة ، ونخطط الرسم البيانى للعزم $\bar{M}$ (شكل ٦ – ٣٣ ، ب) .

نحسب الحد الأول من الصيغة المذكورة أعلاه ، باستخدام قاعدة فيريشاجين :

$$\int_0^l \frac{M_p\,\bar{M}\,dx}{EJ} = \frac{1}{EJ}\times 2\left(\frac{1}{2}\times\frac{Pl}{4}\times\frac{l}{2}\right)\frac{2}{3}\times\frac{l}{4} = \frac{Pl^3}{48\,EJ}$$

أن إجهادى الشد فى الشدادة N_p و $\bar{N}$ ، الناجمين عن تأثير الحمل P ووحدة الحمل ، يساويان ما يلى على التوالى : $N_p = \frac{P}{2}$ ، $\bar{N} = \frac{1}{2}$. والرسوم البيانية المناظرة هما ، مبينة فى الشكل (٦ – ٣٣ ، أ ، ب) . وبضرب هذين الرسمين فى بعضهما ، حسب قاعدة فيريشاجين نحصل على قيمة الحد الثانى من صيغة الإزاحات :

$$\int_0^a \frac{N_p\,\bar{N}\,dx}{EJ} = \frac{P}{2}\times a\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{EF} = \frac{Pa}{4\,EF}$$

إذن الإزاحة الكلية متساوى ما يلى :

$$\Delta = \frac{Pl^3}{48\,EJ} + \frac{Pa}{4\,EF}$$

مثال ٧ : يطلب تحديد زاوية الدوران Δ_B للمقطع العرضى B من الإطار المتصل بثلاث مفصلات (شكل ٦ – ٣٤ ، أ) . أن جسوءة المقاطع العرضية EJ لكافة قطع (قضبان) الإطار المذكور ، متساوية وقيمتها هى $25 \times 10^4\ \mathrm{tm}^2$.

الحل : لأجل تحديد ردود فعل المساند ، نضع معادلات التوازن التالية (شكل ٦ – ٣٤ ، ب) :

$$\Sigma_L M_C = H_A \times 4 - V_A \times 1.5 - q \times 4 \times \frac{4}{2} = 4 H_A - 1.5 V_A -$$
$$- 2 \times 4 \times \frac{4}{2} = 0$$

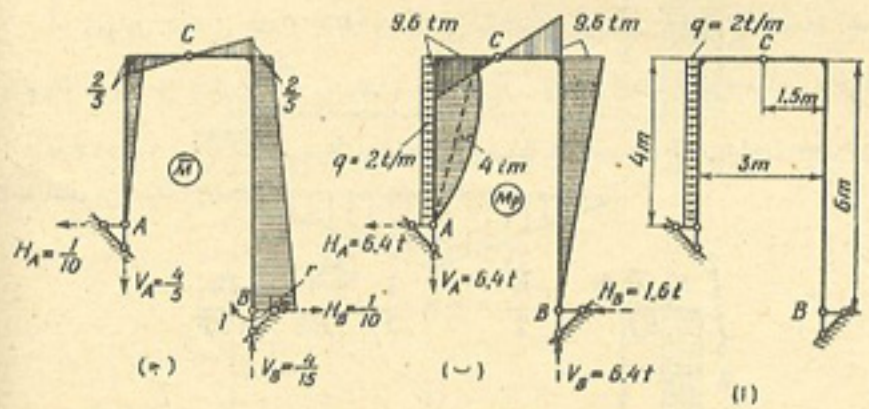
ومنها ينتج أن :

$$4 H_A - 1.5 V_A = 16 \qquad (a)$$

$$\Sigma M_B = - H_A \times 2 - V_A \times 3 + q \times 4 \left(\frac{4}{2} + 6 - 4 \right) = - 2 H_A -$$
$$- 3 V_A + 2 \times 4 \times 4 = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$2 H_A + 3 V_A = 32 \qquad (b)$$
$$\Sigma Y = - V_A + V_B = 0 \qquad (c)$$
$$\Sigma X = - H_A - H_B + q \times 4 = - H_A - H_B + 2 \times 4 = 0$$



الشكل ٦ – ٣٤

ومنها ينتج أن :

$$H_B = 8 - H_A \qquad (d)$$

ومن المعادلتين (a) و (b) نجد بأن $V_A = 6.4\ t$ و $H_A = 6.4\ t$. ونجد من المعادلة (c) بأن $V_B = 6.4\ t$. ومن المعادلة (d) بأن $H_B = 1.6\ t$.

ثم نخطط الرسم البيانى الحقيقى لعزوم الانحناء M_P (شكل ٦ – ٣٤ ، ب) .

ثم نسلط وحدة العزم فى اتجاه زاوية الدوران (فى المقطع B) ، ونحدد ردود فعل المساند ،

الناجمة عن تأثير هذا العزم (شكل ٦ – ٣٤ ، جـ) :

$$\Sigma_L M_C = H_A \times 4 - V_A \times 1.5 = 0 \qquad (e)$$
$$\Sigma M_B = - H_A \times 2 - V_A \times 3 + 1 = 0 \qquad (f)$$
$$\Sigma Y = - V_A + V_B = 0 \qquad (g)$$
$$\Sigma X = - H_A + H_B = 0 \qquad (h)$$

ونحصل من المعادلتين (e) و (f) على ما يلى :

$$V_A = \frac{4}{15}$$

و

$$H_A = \frac{1}{10}$$

ومن المعادلتين (g) و (h) نحصل على ما يلى :

$$V_B = \frac{4}{15}$$

و

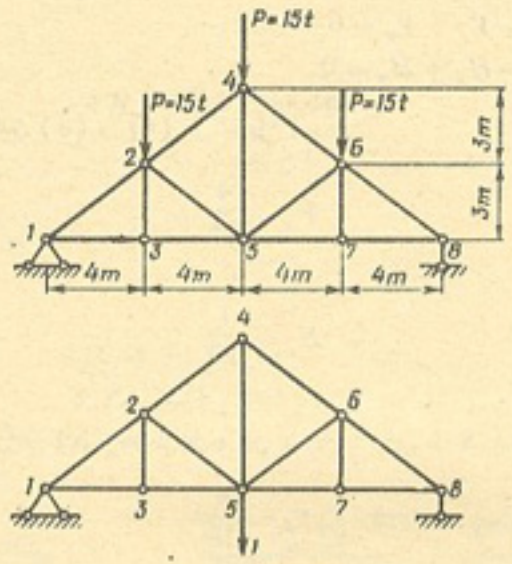
$$H_B = \frac{1}{10}$$

وقد خطط الرسم البيانى التخيلى لعزوم الانحناء $\overline{M}$ ، الناجمة عن تأثير وحدة العزم وردود الفعل المستخرجة أعلاه (شكل ٦ – ٣٤ ، جـ) .

وبضرب الرسم البيانى لعزوم الانحناء M_P (شكل ٦ – ٣٤ ، ب) فى الرسم البيانى التخيلى لوحدة العزم $\overline{M}$ (شكل ٦ – ٣٤ ، جـ)، نحصل على الإزاحة المطلوبة (أى على زاوية دوران المقطع B) :

$$\Delta_B = \frac{1}{EJ} \left[\frac{9.6 \times 4}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{4 \times 4 \times 2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} + \right.$$
$$\left. + \frac{9.6 \times 1.5}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} \times 2 + \frac{9.6 \times 6}{2} \left(\frac{2}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \times 1 \right) \right] =$$
$$= \frac{1}{25 \times 10^4} \left(\frac{76.8}{15} + \frac{32}{15} + \frac{57.6}{15} + \frac{259.2}{15} \right) = 1.13 \times 10^{-4} \text{ radians}$$

مثال ٨ : يطلب تحديد الإزاحة الرأسية (الانحراف الرأسى) Δ_5 للوصلة 5 من الجمالون المعدنى، المبين فى الشكل (٦ – ٣٥، أ). مع العلم بان مساحة المقطع العرضى لكافة قضبان (قطع)



الشكل ٦ – ٣٥

الجمالون متساوية تماماً، وقدرها $F = 125\text{cm}^2$، ومعامل المرونة يساوى $E = 2\times10^6\text{kg/cm}^2$.

الحل : تحدد الإزاحة Δ_5 من الصيغة التالية :

$$\Delta_5 = \Sigma \frac{N_P \overline{N}}{EF} l$$

إن المعطيات اللازمة للحساب، مدرجة فى الجدول (٦ – ٤). ويبين العمود الأخير من الجدول قيمة $N_P\overline{N}l$ مقاسة بـ : طن م (tm) لكل قضيب من قضبان الجمالون. وبجمع قيم $N_P\overline{N}l$ لكل قضبان الجمالون وتقسيم المجموع على EF (حيث $E = 2 \times 10^7\text{t/m}^2$ ، $F = 0.0125\text{m}^2$)، نحصل على مقدار الإزاحة المطلوبة :

$$\Delta_5 = \frac{1}{2\times10^7\times0.0125}\left(156.25\times2 + 104.17\times2 + 80\times4 + 90\times1\right) =$$
$$= 3.72\times10^{-3}\text{m} = 3.72\text{mm}$$

جدول ٦ – ٤

رقم القضيب	طول القضيب l (m)	الإجهاد فى القضيب: الإجهاد الناجم عن الحمل المعين N_P (t)	الإجهاد فى القضيب: الإجهاد الناجم عن وحدة الحمل $\overline{N}$	$N_P\overline{N}l$ (tm)
1 — 2; 6 — 8	5	— 37.5	— 0.833	156.25
2 — 4; 4 — 6	5	— 25	— 0.833	104.17
1 — 3; 3 — 5 5 — 7; 7 — 8	4	30	0.667	80
2 — 3; 6 — 7	3	0	0	0
2 — 5; 5 — 6	5	— 12,5	0	0
4 — 5	6	15	1	90

البند ٦ – ١٠ : طريقة طاقة الانفعال لتحديد الإزاحات

إن طريقة طاقة الانفعال المستخدمة لتحديد الإزاحة، تعتمد على نظرية كاستيليانو، التى تنص على أن المشتقة الجزئية (partial derivative) لصيغة طاقة الانفعال، المعبر عنها بواسطة الحمل P (ويقصد بالحمل P، مجموعة الأحمال الكلية)، تساوى الإزاحة الناجمة عن الحمل الحقيقى، فى اتجاه ذلك الحمل.

ولإثبات صحة هذه النظرية، نكتب صيغة طاقة الانفعال، مقتصرين بذلك لأجل الاختصار، على الحد الذى يحتوى على عزوم الانحناء فقط (راجع البند ٦ – ٣) :

$$W = \Sigma \int_0^l \frac{M^2\,dx}{2EJ}$$

وتحلل القيمة الكلية لعزم الانحناء، إلى مركبات مناظرة للأحمال المنفردة، كما يلى :

$$M = \overline{M}_1 P_1 + \overline{M}_2 P_2 + \dots + M_k P_k + \dots + \overline{M}_n P_n$$

حيث $\overline{M}_1$ ، $\overline{M}_2$ ، . . . . ، $\overline{M}_k$ ، ... $\overline{M}_n$ تمثل قيم عزوم الانحناء ، الناجمة عن تأثير وحدات الأحمال التالية $P_1 = 1$ ، $P_2 = 1$ ، ... $P_k = 1$ ، ... $P_n = 1$.

نستخرج المشتقة الجزئية للصيغة W ، معبرين عنها بالمقدار P_k ، فنحصل على ما يلى :

$$\frac{\partial W}{\partial P_k} = \frac{\partial}{\partial P_k}\left(\Sigma \int_0^l \frac{M^2\,dx}{2\,EJ}\right) = \Sigma \int_0^l \frac{M \times \frac{\partial M}{\partial P_k} \times dx}{EJ}$$

ولكن

$$\frac{\partial M}{\partial P_k} = \overline{M}_k$$

إذن يكون لدينا :

$$\frac{\partial W}{\partial P_k} = \Sigma \int_0^l \frac{\overline{M}_k \times M \times dx}{EJ}$$

ويمثل الطرف الأيمن من هذه المعادلة ، صيغة الازاحة Δ_{kp} (راجع صيغ الإزاحات المبينة فى البند ٦ – ٦) : ولذلك نحصل على ما يلى :

$$\frac{\partial W}{\partial P_k} = \Delta_{kp}$$

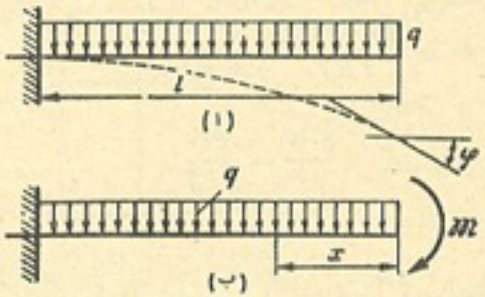
إن نظرية كاستيليانو لا تستخدم عملياً لإيجاد إزاحات (انحرافات) الإنشاءات الإطارية (الجمالونات) ، وتقتصر أهميتها على الناحية النظرية فقط . وإذا أريد استخدامها لحساب الإزاحات ، فسوف تتبع الخطوات التالية عند إجراء ذلك الحساب .

١ – يسلط على الإنشاء الحمل المناظر ، فى نفس اتجاه الإزاحة المطلوب إيجادها ؛

٢ – ثم توضع المعادلة الكاملة لطاقة الانفعال ، الناجمة عن التأثير الموحد للحمل المناظر المذكور ، والحمل الحقيقى الفعال ؛

٣ – وبأخذ تفاضل صيغة طاقة الانفعال ، معبراً عنه بالحمل المسلط فقط ، نحصل على صيغة لتحديد الإزاحة المطلوبة ، ويجب فى هذه الصيغة ، مساواة قيمة الحمل المسلط للصفر ، وذلك لأنها لا تدخل فى مجموعة الأحمال (أو مساواتها لقيمة الحمل المسلط الحقيقية ، إذا دخلت فى مجموعة الأحمال) .

مثال : يطلب إيجاد زاوية الدوران φ لطرف الكابول ، الناجمة عن تأثير الحمل الموزع بانتظام ، بشدة قدرها q على الكابول (شكل ٦ – ٣٦ ، أ) .



الشكل ٦ – ٣٦

الحل : نسلط العزم m على طرف الكابول (شكل ٦ – ٣٦ ، ب) . إن الصيغة الكاملة لعزم الانحناء فى المقطع x ، تكون على الشكل التالى :

$$M = -\left(q\frac{x^2}{2} + m\right)$$

والآن نحسب كمية طاقة الانفعال ، كما يلى :

$$W = \int_0^l \frac{M^2\,dx}{2\,EJ} = \int_0^l \frac{\left(q\frac{x^2}{2} + m\right)^2}{2\,EJ}\,dx$$

وبعد التكامل نحصل على :

$$W = \frac{1}{EJ}\left(\frac{q^2 l^5}{40} + \frac{q l^3 m}{6} + \frac{m^2 l}{2}\right)$$

ونأخذ تفاضل W بالنسبة لـ m ، فنحصل على المعادلة التالية :

$$\phi = \left(\frac{\partial W}{\partial m}\right)_{m=0} = \frac{1}{EJ}\left(\frac{q\,l^3}{6} + m \times l\right) = \frac{q l^3}{6\,EJ}$$

واذا كان الحمل المناظر للإزاحة المطلوبة ، واقعا ضمن مجموعة الأحمال المعلومة ، تنتفى الحاجة إلى تسليط حمل إضافى .

لنفرض على سبيل المثال ، أن المطلوب تحديد انحراف طرف العتبة الكابولية ، المحملة ، بحمل مركز واحد P ، مؤثر على طرف العتبة ايضاً . فى هذه الحالة ، نجد ما يلى :

$$M = -Px$$

$$W = \int_0^l \frac{P^2 x^2}{2\,EJ}\,dx = \frac{P^2 l^3}{6\,EJ}$$

$$\Delta = \frac{\partial W}{\partial P} = \frac{Pl^3}{3\,EJ}$$

البند ٦ — ١١ : تحديد الإزاحات (الانحرافات) بواسطة الأحمال المرنة

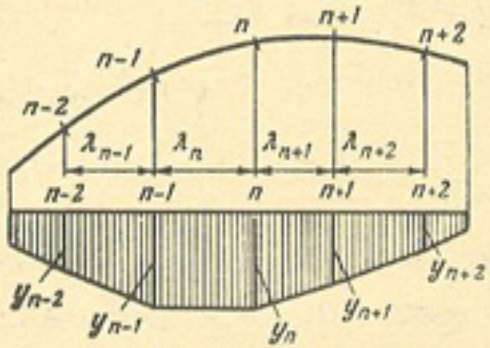
إن طريقة الأحمال المرنة ، هى إحدى طرق تحديد الإزاحات : وباستخدام هذه الطريقة ، تحسب الإزاحات (الانحرافات وزوايا الدوران) فى النقاط المنفردة للإنشاء . وكلما كان عدد هذه النقاط أكبر ، كلما أمكن رسم الخط المرن (الرسم البيانى للانحرافات) بدقة أكبر .

وإذا رسمنا إزاحات النقاط المبحوثة ، على هيئة إحداثيات رأسية ، ووصلنا قممها بمستقيمات ، نحصل عندئذ على الرسم البيانى للانحرافات ، ويكون على هيئة خط منكسر . أن هذا الرسم البيانى ، يعطى بالنسبة للإنشاءات المصمتة ، القيم المضبوطة للانحرافات فى النقاط المذكورة أعلاه فقط ، أما انحرافات النقاط الواقعة بين النقاط المذكورة ، فتكون قيمها تقريبية ، وذلك لأن الشكل المنحنى الحقيقى للخط المرن ، الواقع بين هذه النقاط ، يستبدل بمستقيمات . أما فى الإنشاءات التشابكية (الجمالونات) ، فنجد بأن القضبان لا تنحنى عند تأثير الحمل فى الوصلات ، ولذلك فإن الرسم البيانى للانحرافات ، المرسوم

لمثل هذه الجمالونات ، ينطبق تماماً مع الرسم البيانى الحقيقى ، الممثل بخط منكسر .

وإذا قمنا عند تخطيط مثل هذه الرسوم البيانية ، برسم إحداثياتها الرأسية بصورة عمودية على أحد المستقيمات ، الذى يعتبر بمثابة مسقط الجمالون المعين ، على الاتجاه العمودى على الانحراف المطلوب ، فسوف تكون هذه الرسوم البيانية ، من حيث شكلها الخارجى ، مشابهة للرسوم البيانية لعزوم الانحناء للعتبات المعرضة لتأثير الأحمال المركزة . والطريقة التى نبحثها الآن ، مبينة على أساس التشابه الخارجى لخط الانحرافات ، مع الرسم البيانى لعزوم الانحناء :

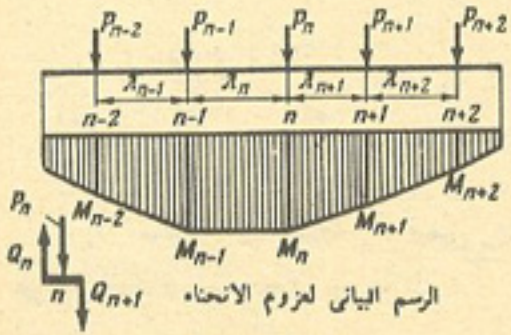
ويبين الشكل (٦ — ٣٧) قسماً من الإنشاء ، الذى خطط له الرسم البيانى للانحرافات الرأسية لصف كامل من نقاطه.



الرسم البيانى للانحرافات الرأسية

الشكل ٦ — ٣٧

لنبحث مقدماً الحالة التالية : نفرض بان لدينا الرسم البيانى لعزوم الانحناء ، وهو على شكل خط منكسر ، مبين أحد أقسامه فى الشكل (٦ — ٣٨ ، أ) . وتؤثر على العتبة فى نقاط انكسار الرسم البيانى للعزم M ، أحمال مركزة . نستخرج الصيغة التى تحدد هذه الأحمال . ولهذا الغرض ، نضع سلفاً معادلة قوتى القص Q_n و Q_{n+1} ، المناظرتين للقسمين λ_n و λ_{n+1} . وباستخدام صيغة أو نظرية جورافسكى ، نحصل على ما يلى :



الرسم البيانى لعزوم الانحناء

الشكل ٦ — ٣٨

$$Q_n = \frac{M_n - M_{n-1}}{\lambda_n}$$

$$Q_{n+1} = \frac{M_{n+1} - M_n}{\lambda_{n+1}}$$

والآن نقطع العتبة بمقطعين رأسيين ، إلى يمين ويسار النقطة n . ويبين الشكل (٦ — ٣٨ ، ب) قسم العتبة المفصول بالمقطعين المذكورين . وتؤثر على طرفى هذا القسم ، قوتا القص Q_n و Q_{n+1} (وقد أخذتا بعلامة موجبة) . نسلط كافة القوى والأحمال المؤثرة فى هذا القسم من العتبة ، على المحور الرأسى :

$$\Sigma Y = Q_n - P_n - Q_{n+1} = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$P_n = Q_n - Q_{n+1}$$

أى أن الحمل الخارجى المركز P_n ، المؤثر على العتبة فى النقطة n ، يساوى الفرق بين قوتى القص Q_n و Q_{n+1} . ويتضح بأن الحمل المؤثر فى النقطة $n - 1$ ، يحدد من الصيغة التالية :

$$P_{n-1} = Q_{n-1} - Q_n$$

والحمل المؤثر فى النقطة $n + 1$ ، يساوى ما يلى :

$$P_{n+1} = Q_{n+1} - Q_{n+2}$$

وإذا عوضنا فى صيغة P_n قيمتى Q_n و Q_{n+1} ، المعبر عنهما بواسطة عزوم الانحناء ، سنحصل على ما يلى :

$$P_n = \frac{M_n - M_{n-1}}{\lambda_n} - \frac{M_{n+1} - M_n}{\lambda_{n+1}} = -M_{n-1} \times \frac{1}{\lambda_n} + M_n\left(\frac{1}{\lambda_n} + \frac{1}{\lambda_{n+1}}\right) - M_{n+1} \times \frac{1}{\lambda_{n+1}} \qquad (6-23)$$

ولو استخدمنا الصيغة الاخيرة لحساب جميع الاحمال P_n المؤثرة على العتبة ، لكان الرسم البيانى لعزوم الانحناء ، الناجم عنها ، مطابقاً تماماً للرسم البيانى للإزاحات (الانحرافات) ، المرسوم للعتبة المبحوثة هنا .

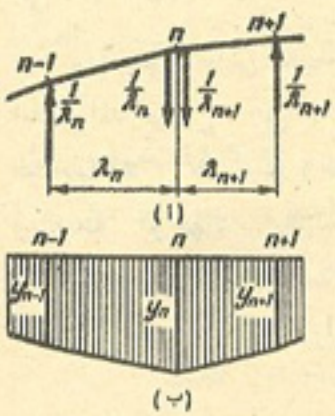
وبناء على تماثل الشكل الخارجى لخط الانحرافات (لاحظ الشكل ٦ — ٣٧) والرسم البيانى للعزم M (لاحظ الشكل ٦ — ٣٨ ، أ) ، نستبدل قيم M_{n-1} ، M_n و M_{n+1} فى صيغة P_n ، بقيم الانحرافات المناظرة لها وهى y_{n-1} ، y_n ، و y_{n+1} على التوالى . ونحصل نتيجة لذلك ، على صيغة لتحديد الأحمال « المرنة » W_n ، التى تحدث فى العتبة التخيلية عزوم انحناء ، ينطبق رسمها البيانى مع الرسم البيانى التقريبى لانحراف العتبة الحقيقية .

وهكذا سنحصل على الصيغة التالية ، لتحديد قيمة الأحمال « المرنة » W_n :

$$W_n = -y_{n-1} \times \frac{1}{\lambda_n} + y_n\left(\frac{1}{\lambda_n} + \frac{1}{\lambda_{n+1}}\right) - y_{n+1} \times \frac{1}{\lambda_{n+1}} \qquad (6-24)$$

وبتحليل هذه الصيغة ، نستنتج بأن استخدامها بالشكل الذى هى عليه ، لا يعنى أى شىء من الناحية العملية . وبالفعل ، نجد بأن قيم الأحمال المرنة ، المستخرجة من هذه الصيغة ، لتحديد الانحرافات فيما بعد ، تعتمد بالذات على انحرافات الإنشاء (العتبة) .

ولكن توجد إمكانية للتعبير عن قيمة الحمل المرن ، بواسطة الأحمال الخارجية . وفى هذه الحالة ، يكون من الملائم تماماً ، استخدام طريقة الأحمال المرنة . وللحصول على صيغة تحدد العلاقة بين الحمل المرن والحمل الخارجى ، نتبع الخطوات التالية :



الشكل ٦ — ٣٩

نسمى حالة الإنشاء ، التى يؤثر فيها الحمل المعين عليه ، بالحالة الأولى .

نسلط على الإنشاء المذكور زوجين من

الأحمال كل منهما يساوى وحدة ، مع اختلاف علامتيهما ، ونفرض بأن المركبتين الرأسيتين لهما ، هما $\frac{1}{\lambda_n}$ و $\frac{1}{\lambda_{n+1}}$. سنسمى حالة الإنشاء هذه (شكل ٦ — ٣٩ ، أ) بالحالة الثانية . أن الصيغة الموجودة فى الطرف الأيمن من المعادلة (6 — 24) تمثل شغل الأحمال الخارجية للحالة الثانية ، على امتداد الانحراف الناجم فى اتجاهها ، عن أحمال الحالة الأولى .

وبالفعل ، نجد بأن حاصل ضرب الحمل الرأسى $\frac{1}{\lambda_n}$ ، المؤثر فى النقطة $n - 1$ ، فى قيمة الانحراف y_{n-1} (شكل ٦ — ٣٩ ، أ ، ب) ، يمثل الشغل الذى ينجزه هذا الحمل ، على امتداد الانحراف فى الحالة الأولى : وسبب وجود العلامة السالبة أمام حاصل الضرب هذا ، يعود إلى أن الحمل $\frac{1}{\lambda_n}$ متجه إلى الأعلى ، فى الوقت الذى تنحرف فيه النقطة $n - 1$ إلى الأسفل : أن حاصل الضرب $y_n \left(\frac{1}{\lambda_n} + \frac{1}{\lambda_{n+1}} \right)$ يمثل شغل الحملين $\frac{1}{\lambda_n}$ و $\frac{1}{\lambda_{n+1}}$ فى الحالة الثانية ، المؤثرين فى النقطة n ، على امتداد الانحراف y_n ، فى الحالة الأولى . ويمثل الحد الأخير من الصيغة (6 — 24) ، الشغل الذى ينجزه الحمل $\frac{1}{\lambda_{n+1}}$ على امتداد الانحراف y_{n+1} ، وتدل العلامة السالبة ، على أن اتجاه الحمل $\frac{1}{\lambda_{n+1}}$ لا ينطبق مع اتجاه انحراف النقطة $n + 1$:

وبناء على أساس الصيغة (6 — 12) ، يمكن التعبير عن شغل مركبات زوجى الحمل المذكورين ، على امتداد انحرافات الإنشاء المناظرة لها ، بواسطة الإجهادات الداخلية $\overline{M}$ ، $\overline{N}$ ، $\overline{Q}$ (الناجمة عن تأثير وحدتى زوجى الأحمال المذكورتين) ، وبواسطة الإجهادات الداخلية M_p ، N_p ، Q_p ، الناجمة فى الإنشاء الحقيقى ، نتيجة لتأثير الأحمال الخارجية ، أى أن :

$$-\frac{1}{\lambda_n} \times y_{n-1} + \left(\frac{1}{\lambda_n} + \frac{1}{\lambda_{n+1}} \right) \times y_n - \frac{1}{\lambda_{n+1}} \times y_{n+1} =$$

$$= \Sigma \int_0^l \overline{M} \frac{M_p \times dx}{EJ} + \Sigma \int_0^l \overline{N} \frac{N_p \times dx}{EF} + \eta \Sigma \int_0^l \overline{Q} \frac{Q_p dx}{GF}$$

إذن يكون لدينا :

$$W_n = \Sigma \int_0^l \overline{M} \frac{M_p \times dx}{EJ} + \Sigma \int_0^l \overline{N} \frac{N_p \times dx}{EF} + \eta \Sigma \int_0^l \overline{Q} \frac{Q_p \times dx}{GF} \qquad (6 — 25)$$

وتسمى الصيغة الأخيرة بالصيغة العامة للحمل المرن ، المعبر عنه بواسطة الإجهادات الداخلية فى الإنشاء . وعند تحديد الانحرافات أو التشوهات فى العتبات والأطر ، تختصر صيغة الحمل المرن W_n ، وتصبح ذات حد واحد فقط ، يعتمد على عزم الانحناء وحده ، وبالنسبة للعقود المستوية (flat arches) ، تؤخذ القوة الطولية أيضاً . ولا يؤخذ تأثير قوى القص فى الاعتبار ، إلا فى الحالات الاستثنائية فقط . وبالنسبة للإنشاءات التشابكية (الجمالونات) ، تصبح الصيغة ذات حد واحد ، يعتمد على القوى الطولية فقط .

وعند حساب الأحمال المرنة ، فى مختلف النقاط ، يسلط زوج من وحدات الحمل على القطع (القضبان) المتجاورة للإنشاء بالتعاقب .

وبعد أن نقوم بإيجاد الاحمال المرنة ، المناظرة لكافة النقاط المعينة من الإنشاء ، يمكن الانتقال إلى حساب الإزاحات (deflections) أو الانحرافات الخطية . ولهذا الغرض ، يجب تسليط الأحمال المرنة على عتبة تخيلية ، وعندئذ ستكون الإحداثيات الرأسية للرسم البيانى للعزوم M^e ، الناشئة فى العتبة التخيلية ، نتيجة لتأثير هذه الأحمال ، مساوية للقيم الحقيقية للانحرافات (الإزاحات) المطلوبة . وتتلخص العلاقة بين العتبة التخيلية والإنشاء (العتبة الحقيقية) فيما يلى :

١ — إذا كانت النقطة المعنية فى الإنشاء الحقيقى ، غير قابلة للانحراف الخطى (للإزاحة الخطية) ، عندئذ يجب أن يكون العزم الناجم فى هذه النقطة من العتبة التخيلية ، نتيجة لتأثير الأحمال المرنة مساويا للصفر ، وبعكس ذلك ، إذا كانت المساند فى تلك النقطة من الإنشاء الحقيقى ، لا تمنع حدوث الانحراف الخطى ، عندئذ لا يكون العزم فى هذه النقطة من العتبة التخيلية ، مساوياً للصفر .

٢ — إذا كانت زاوية ميل مماس المنحنى المرن (منحنى المرونة) فى إحدى نقاط الانشاء الحقيقى ، متغيرة ، أى أن محور الإنشاء يدور تحت تأثير الحمل ، فهذا

يدل على وجود تأثير قوة القص الناجمة عن الأحمال المرنة ، فى هذا الموضع (أو تلك النقطة) من مقطع العتبة التخيلية .

وإذا كان الانشاء المعين ، على سبيل المثال ، عبارة عن عتبة مثبتة (مبيتة) فى الجدار من طرف واحد ($\phi_a = 0 \; ; \; y_a = 0$) ، وطرفها الثانى طليق ($\phi_b \neq 0 \; ; \; y_b \neq 0$) ، عندئذ يكون لدينا فى النقطة a من الرسم التخطيطى للعتبة التخيلية ، ما يلى :

$$M_a^c = 0$$

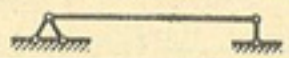
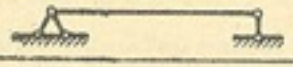
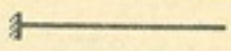
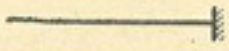
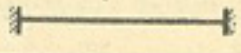
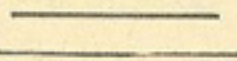
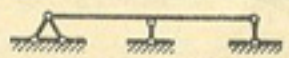
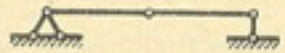
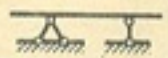
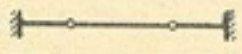
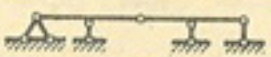
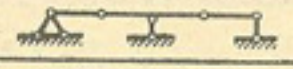
و

$$Q_a^c = 0$$

أما فى النقطة B ، فيجب تسليط القوتين Q_b^c و M_b^c .

ويبين الجدول (٦ — ٥) الرسوم التخطيطية لبعض الإنشاءات أو العتبات الحقيقية ، والرسوم التخطيطية المناظرة لها ، التابعة للعتبات التخيلية .

جدول ٦ — ٥

رقم	الانشاء الحقيقى	العتبة التخيلية (الاختيارية)
١		
٢		
٣		
٤		
٥		
٦		

وأخيرا نأتى إلى صياغة أسلوب تخطيط الرسوم البيانية للانحرافات (الإزاحات) الخطية للإنشاء الحقيقى (فى الاتجاه المعين) ، وذلك كما يلى :

١ — تخطط الرسوم البيانية الضرورية ، للإجهادات الداخلية M_p ، N_p ، Q_p ، الناجمة فى الإنشاء ، نتيجة لتأثير الأحمال المعنية .

٢ — تعين فى الإنشاء الحقيقى ، النقاط التى تشكل انحرافاتها الرسم البيانى للانحرافات الناجمة عن تأثير الأحمال الحقيقية .

٣ — تسلط فى النقاط المذكورة ، القوى المعينة ، أى مركبات أزواج وحدات الحمل ، وتكون اتجاهات هذه القوى موازية للانحراف الخطى المطلوب للإنشاء الحقيقى .

٤ — تخطط الرسوم البيانية التخيلية للإجهادات الداخلية $\overline{M}$ ، $\overline{N}$ ، $\overline{Q}$ ، الناجمة فى الإنشاء نتيجة لتأثير أزواج وحدات الحمل (لاحظ الشكل ٦ — ٣٩) .

٥ — وتحسب قيم الأحمال المرنة ، بطريقة ضرب الرسوم البيانية (بواسطة التكامل أو بطريقة فيريشاجين) .

٦ — يتم اختيار العتبة التخيلية ، طبقاً لطبيعة انحرافات (إزاحات) الإنشاء الحقيقى .

٧ — يخطط للعتبة التخيلية (من جهة الألياف المشدودة) الرسم البيانى للعزوم التخيلية ، الناجمة عن تأثير الأحمال المرنة . وفى هذه الحالة تتجه الأحمال المرنة الموجبة ، فى اتجاه تأثير المركبات المتوسطة لأزواج وحدات القوى .

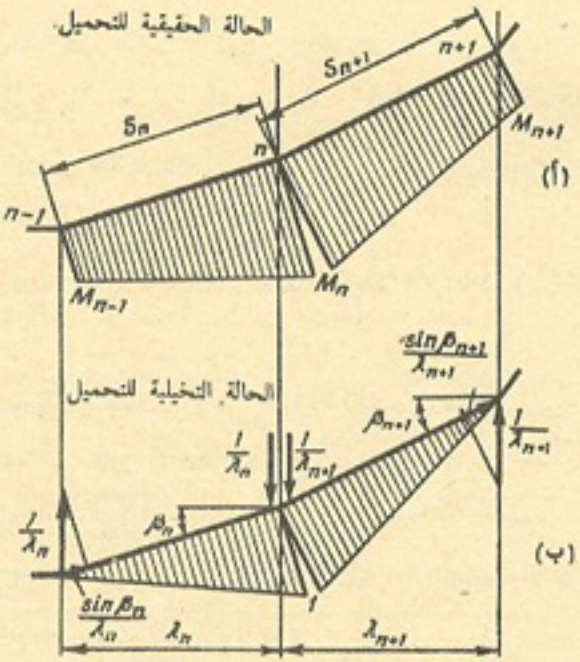
إن الرسم البيانى للعزوم ، الناتج بهذه الطريقة ، يمثل خط الانحرافات المطلوب للإنشاء الحقيقى ، من حيث القيمة والاتجاه .

إن مساند (مواضع تثبيت) مقاطع العتبة التخيلية ، التى تمنع حدوث الانحرافات الخطية فى اتجاه الأحمال المرنة ، تتحمل مباشرة الأحمال المرنة ، المؤثرة فى هذه المقاطع . وهذه الأحمال المرنة ، لا تؤثر على الرسم البيانى للعزوم ، فى العتبة التخيلية ، ولذلك يكون حسابها زائداً عن الحاجة ، أى لا ضرورة لحسابها .

البند ٦ – ١٢ : الصيغة التفصيلية للأحمال المرنة فى الإنشاءات المصمتة

عند تخطيط الرسم البيانى للانحرافات فى الإنشاء المصمت ، يقسم محور الإنشاء إلى أقسام صغيرة ، يمكن فى حدودها اعتبار الرسوم البيانية للإجهادات ، مستقيمة تماماً ، دون أى خطأ يذكر .

نفصل من الإنشاء المصمت ، قسمين أو قطعتين متجاورتين ، تلتقيان فى النقطة n (شكل ٦ – ٤٠ ، أ) . وقد تم تخطيط الرسمين البيانيين لعزوم انحناء



الشكل ٦ – ٤٠

هاتين القطعتين ، من جهة الألياف المشدودة . وتعتبر القوى الطولية فى حدود كل قطعة منهما ، ثابتة وموجبة .

ولتحديد الحمل المرن W_n ، نسلط على الإنشاء زوجين من وحدات القوى ،

التى تكون مركباتها الرأسية مساوية لـ $\frac{1}{\lambda_n}$ و $\frac{1}{\lambda_{n+1}}$ (شكل ٦–٤٠ ، ب) . وعند الاتجاه الرأسى للمركبتين أو القوتين $\frac{1}{\lambda_n}$ و $\frac{1}{\lambda_{n+1}}$ ، يكون الحمل المرن متجهاً فى الاتجاه الرأسى أيضاً .

ونختار اتجاهات تأثير أزواج وحدات القوى ، بالشكل الذى يجعل منطقة الشد ، تقع فى نفس جهة منطقة الشد الناجمة عن تأثير الأحمال المعلومة . وتحت تأثير القوى ، المؤلفة لأزواج القوى المذكورة ، تنشأ على طول القطع ، قوى طولية ثابتة ، تساوى ما يلى :

١) فى حدود القطعة المحصورة بين النقطتين $n - 1$ و n :

$$\overline{N}_n = -\frac{1}{\lambda_n} \times \sin \beta_n$$

حيث :

$$\lambda_n = S_n \times \cos \beta_n$$

ولذلك يكون لدينا :

$$\overline{N}_n = -\frac{\sin \beta_n}{S_n \cos \beta_n} = -\frac{\tan \beta_n}{S_n}$$

٢) فى حدود القطعة الواقعة بين النقطتين n و $n + 1$:

$$\overline{N}_{n+1} = \frac{1}{\lambda_{n+1}} \sin \beta_{n+1}$$

حيث :

$$\lambda_{n+1} = S_{n+1} \cos \beta_{n+1}$$

ولذلك يكون لدينا ما يلى :

$$\overline{N}_{n+1} = \frac{\sin \beta_{n+1}}{S_{n+1} \cos \beta_{n+1}} = \frac{\tan \beta_{n+1}}{S_{n+1}}$$

وبضرب الرسم البيانى الحقيقى لعزوم الانحناء (لاحظ الشكل ٦ — ٤٠ ، أ) فى الرسم البيانى للعزوم ، الناجم تبعاً لتأثير ازواج وحدات القوى فى الإنشاء المذكور (شكل ٦ — ٤٠ ، ب) ، وذلك بموجب طريقة فيريشاجين نحصل على صيغة للحمل المرن (تأخذ فى الاعتبار تأثير عزوم الانحناء فقط) ، وهى كما يلى :

$$W_n^M = \Sigma \int_0^S \overline{M} M \frac{dx}{EJ} = \frac{S_n}{6EJ_n} (M_{n-1} + 2M_n) + \frac{S_{n+1}}{6\,EJ_{n+1}} (2M_n + M_{n+1}) \qquad (6 — 26)$$

وللحصول على صيغة للحمل المرن ، تأخذ فى الاعتبار القوى الطولية ، نحسب التكامل التالى :

$$W_n^N = \Sigma \int_0^S \overline{N} N \frac{dx}{EF} = - \frac{\tan \beta_n}{S_n} \times \frac{N_n S_n}{EF_n} + \frac{\tan \beta_{n+1}}{S_{n+1}} \times \frac{N_{n+1} S_{n+1}}{EF_{n+1}} = - \frac{N_n}{EF_n} \tan \beta_n + \frac{N_{n+1}}{EF_{n+1}} \tan \beta_{n+1} =$$
$$= - \epsilon_n \tan \beta_n + \epsilon_{n+1} \tan \beta_{n+1}$$

حيث ϵ_n و ϵ_{n+1} — تمثلان الانحرافين الطوليين للقطعتين S_n و S_{n+1} ، الناجمين عن تأثير القوتين N_n و N_{n+1} فى الإنشاء .

إن الصيغة المبسطة التامة للحمل المرن ، التى تأخذ فى الاعتبار تأثير عزوم الانحناء والقوى الطولية ، تكون على الشكل التالى :

$$W_n = \frac{S_n}{6\,EJ_n} (M_{n-1} + 2M_n) + \frac{S_{n+1}}{6\,EJ_{n+1}} (2M_n + M_{n+1}) - \frac{N_n}{EF_n} \tan \beta_n + \frac{N_{n+1}}{EF_{n+1}} \tan \beta_{n+1} \qquad (6 — 27)$$

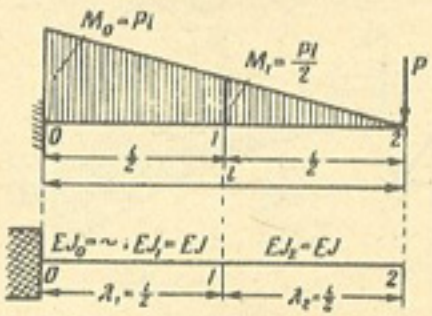
ونلاحظ بأن تحديد الحمل المرن بواسطة الصيغة المبسطة التى حصلنا عليها الآن ، يأخذ وقتاً أقل من الوقت اللازم لحساب الحمل المرن بواسطة الصيغة العامة ، وذلك لأنه فى هذه الحالة تنتفى الحاجة إلى إجراء عدد من العمليات الحسابية المهمة ، مثلا لا يطلب تسليط مركبات أزواج وحدات القوى وتخطيط الرسوم البيانية الناجمة عنها ، وضرب هذه الرسوم فى الرسوم البيانية للإنشاء الحقيقى (الناجمة عن تأثير الحمل الخارجى المعين عليه) .

وعندما تكون قيمة الحمل المرن ، المحسوب من الصيغة المبسطة ، موجبة ، يجب توجيهه فى اتجاه تأثير القوى المتوسطة لأزواج وحدات القوى .

وإذا كان الرسم البيانى الحقيقى لعزوم الانحناء ، الناجمة فى الإنشاء نتيجة لتأثير الحمل المعين ، فى كلتا القطعتين S_n و S_{n+1} ، واقعاً فى نفس الجهة ، وبالإضافة إلى ذلك ، إذا تم حساب الحمل المرن بدون أخذ تأثير القوى الطولية فى الاعتبار ، عندئذ يجب توجيه الحمل المرن W_n ، فى الإتجاه الذى يقع فيه الرسم البيانى الحقيقى لعزوم الانحناء .

مثال : يطلب تخطيط الرسم البيانى للانحرافات ، فى العتبة الكابولية المعرضة لتأثير الحمل المركز P ، المؤثر على الطرف الطليق للعتبة المذكورة (شكل ٦ — ٤١) .

الحل : نقسم باع العتبة الكابولية إلى قسمين متساويين ، ونعين النقاط 0 ، 1 ، 2 . نخطط الرسم البيانى للعزوم ، من جهة الألياف المشدودة (شكل ٦ — ٤١) .



الشكل ٦ — ٤١

ثم نحسب الأحمال المرنة المؤثرة فى النقطتين 0 و 1 ، باستخدام الصيغة المبسطة (26—6) . وليست هناك حاجة لحساب الحمل المرن المؤثر فى النقطة 2 ، وذلك لأنه لا يؤثر على الرسوم البيانية التخيلية ، لقوى القص والعزوم فى العتبة التخيلية .

إن قيمة الحمل المرن المؤثر فى النقطة 0 (باعتبار الطرف المبين للعتبة ، بمثابة قضيب لانهائى الجسوءة) تساوى ما يلى :

$$W_0 = \frac{\lambda_0}{6EJ_0} (M_{-1} + 2M_0) + \frac{\lambda_1}{6EJ_1} (2M_0 + M_1) =$$

$$= \frac{\lambda_0}{6}\,(M_{-1} + 2M_0) + \frac{l}{12EJ}\left(2Pl + \frac{Pl}{2}\right) = \frac{5\,Pl^2}{24\,EJ}$$

وقيمة الحمل المرن ، المؤثر فى النقطة 1 ، تساوى ما يلى :

$$W_1 = \frac{\lambda_1}{6\,EJ_1}\,(M_0 + 2\,M_1) + \frac{\lambda_2}{6\,E\,J_2}\,(2\,M_1 + M_2) =$$

$$= \frac{l}{12\,EJ}\left(Pl + 2\times\frac{Pl}{2}\right) + \frac{l}{12\,EJ}\left(2\times\frac{Pl}{2} + 0\right) = \frac{Pl^2}{4\,EJ}$$

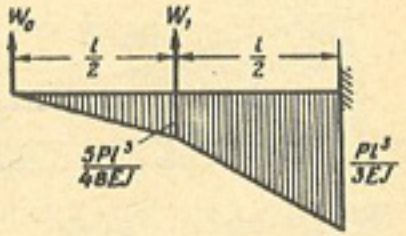
نحمل العتبة التخيلية ، المثبتة من طرفها الأيمن (لاحظ الشكل ٦ – ٤٢) بالحملين المرنين W_0 و W_1 ، المؤثرين فى النقطتين 0 و 1 على الترتيب . ثم نخطط الرسم البيانى للعزوم ، الناجم عن تأثيرهما ، على أن نضع إحداثياته الرأسية من جهة الألياف المشدودة .

وستكون الأحمال المرنة متجهة إلى الأعلى ، أى فى اتجاه الرسم البيانى الحقيقى لعزوم الانحناء . وقيم العزوم فى النقاط 0 ، 1 و 2 من العتبة التخيلية ، ستساوى ما يلى على الترتيب :

$$M_0^C = 0$$

$$M_1^C = W_0\lambda_1 = \frac{5\,Pl^3}{48\,EJ}$$

$$M_2^C = W_0 \times l + W_1 \times \frac{l}{2} + W_2 \times 0 = \frac{Pl^3}{3EJ}$$



الشكل ٦ – ٤٢

ويبين الشكل (٦ – ٤٢) الرسم البيانى للعزوم ، الناجمة عن تأثير الأحمال المرنة على العتبة التخيلية ، ويمثل هذا الرسم البيانى فى نفس الوقت منحنى الانحرافات المطلوب ، الناجم عن تأثير الأحمال الحقيقية . ونشير هنا إلى أن الانحرافات الرأسية للنقاط 0 ، 1 و 2 تمثل القيم المضبوطة لانحرافات العتبة فى هذه النقاط . إن الإحداثيات الرأسية للمنحنى المرن (الخط المرن) فى القطعتين أو القسمين 1 — 0 و 2 — 1 ، تختلف قليلا عن الانحرافات الفعلية للعتبة .

وبتقسيم محور العتبة إلى عدد أكبر من الأقسام ، يمكن الحصول على منحنى رن ، أكثر دقة .

البند ٦ – ١٣ : الصيغة التفصيلية للأحمال المرنة فى الجمالونات

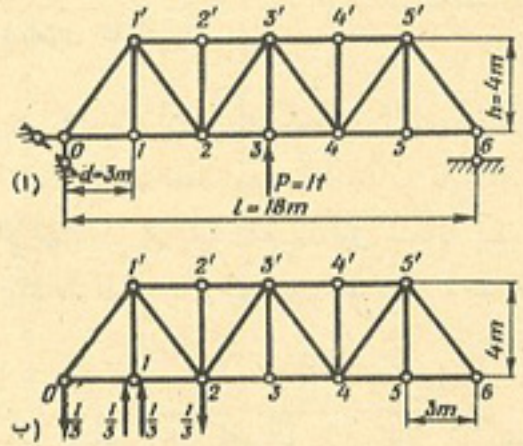
إن الصيغة العامة للأحمال المرنة (23 — 6) ، تأخذ الشكل التالى ، عند تحديد الانحرافات (الإزاحات) فى الجمالونات :

$$W_n = \Sigma\,\overline{N} \times \frac{N_p \times l}{EF} = \Sigma\,\overline{N} \times \Delta l_p \qquad (6-28)$$

حيث $\overline{N}$ – الإجهادات الطولية الناشئة فى الجمالون ، نتيجة لتأثير أزواج وحدات القوى ، المسلطة على قضيبين ملتقيين فى الوصلة n ، التى تحدد قيمة الحمل المرن بالنسبة لها ؛

Δl_p – التغير فى طول القضيب ، الناجم عن تأثير الحمل المعين على الجمالون .

وسوف نبحث نظام تحديد انحرافات الجمالونات ، بطريقة الأحمال المرنة ، بدراسة المثال التالى : لنفرض بأن المطلوب رسم خط انحرافات الوتر السفلى للجمالون المبين فى الشكل (٦ – ٤٣ ، أ) ، بطريقة الأحمال المرنة . ويؤثر على الجمالون



الشكل ٦ — ٤٣

فى الوصلة 3 ، الحمل $P = 1$ ، المتجه إلى الأعلى . هذا مع العلم بأن مساحة المقاطع العرضية لكافة قضبان الجمالون متساوية .

لرسم خط الانحرافات (الرسم البيانى للانحرافات) للوتر السفلى للجمالون ، نحسب الأحمال المرنة ، المؤثرة فى الوصلات 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 . ولهذا الغرض نسلط أزواج وحدات القوى بالتتالى ، على كل قضيبين متجاورين من قضبان الوتر السفلى .

وإذا كان المطلوب تخطيط الرسم البيانى لانحرافات الوتر العلوى ، لسلطنا أزواج وحدات القوى ، فى وصلات الوتر العلوى للجمالون على الترتيب .

ولو أردنا تخطيط الرسم البيانى لانحرافات النقاط التابعة للخط المنكسر 6 — 5′ — 4 — 3′ — 2 — 1′ — 0 ، ولكان من الضرورى حساب الأحمال المرنة ، المؤثرة فى الوصلات 1′ ، 2 ، 3′ ، 4 و 5′ على الترتيب .

والآن نحسب الحمل المرن W_1 ، الذى يمثل زاوية دوران القضيب 1 — 0 ، حول القضيب 2 — 1 . ولهذا الغرض ، نسلط فى القضيبين 1 — 0 و 2 — 1 ، زوجين من وحدات القوى ، مؤلفين من القوى التى تساوى $\frac{1}{3} = \frac{1}{4}$ (شكل ٦ — ٤٣ ، ب) ونحسب الإجهادات الطولية ، الناشئة فى قضبان الجمالون ، نتيجة لتأثير أزواج القوى المذكورة .

ومن السهل أن نلاحظ بأن أزواج وحدات القوى هذه ، تؤدى إلى نشوء الإجهادات فى القضبان التالية فقط وهى : 1 — 0 ، 1′ — 0 ، 2 — 1′ ، 2 — 1 و 1′ — 1 ، أما الإجهادات فى بقية القضبان وفى المساند أيضا ، فتكون مساوية للصفر . إن الإجهادات الموجودة فى القضبان المذكورة ، مدرجة أدناه فى الجدول (٦ — ٦) .

أما الإجهادات الناشئة فى قضبان الجمالون ، نتيجة لتعرضه إلى تأثير الحمل المعطى الذى يساوى طنا واحداً $P = 1$ ton ، فقد أدرجت فى

الجدول (٦ — ٧) ، الذى يحتوى أيضا على أطوال القضبان ومساحات مقاطعها العرضية . والآن نحسب قيمة الحمل المرن W_1 باستخدام الجدولين (٦ — ٦) و (٦ — ٧) ، وذلك كما يلى :

$$W_1 = \Sigma\, \overline{N} N_P \frac{l}{EF} = \frac{1}{EF}(\overline{N}_{01} N_{01} l_{01} + \overline{N}_{12} N_{12} l_{12} + \overline{N}_{01'} N_{01'} l_{01'} +$$

$$+ \overline{N}_{1'2} N_{1'2} l_{1'2} + \overline{N}_{11'} N_{11'} l_{11'}) = \frac{1}{EF}\left[-\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{8}\right)\times 3 + \right.$$

$$\left. + \left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{3}{8}\right)\times 3 + \frac{5}{12}\times\frac{5}{8}\times 5 + \frac{5}{12}\left(-\frac{5}{8}\right)\times 5 + \left(-\frac{2}{3}\right)\times 0\times 4\right] =$$

$$= + \frac{9}{16\,EF}$$

ونظراً لتماثل الجمالون ، يكون الحمل المرن W_3 مساويا للحمل W_1 ، أى أن :

$$W_3 = \pm \frac{9}{16\,EF}$$

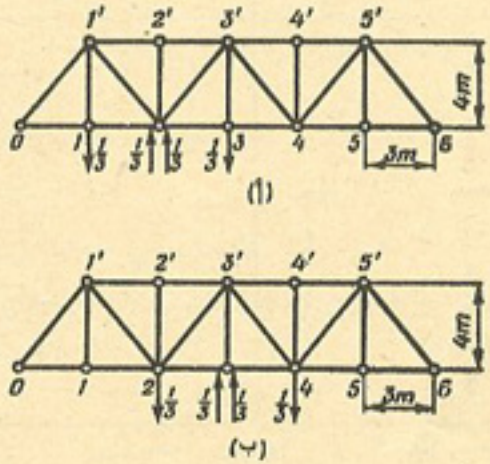
جدول ٦ — ٦

رقم القضيب	الإجهاد الكلى فى القضيب
0 — 1	$-\frac{1}{4}$
1 — 2	$-\frac{1}{4}$
0 — 1′	$+\frac{5}{12}$
1′ — 2	$+\frac{5}{12}$
1 — 1′	$-\frac{2}{3}$

جدول ٦ — ٧

رقم القضيب	طول القضيب (م)	مساحة المقطع العرضى (م٢)	الإجهاد الناشئ فى القضيب (طن)	رقم القضيب	طول القضيب (م)	مساحة المقطع العرضى (م٢)	الإجهاد الناشئ فى القضيب (طن)
0—1 ; 5—6	3	F	$-\frac{3}{8}$	2′—3′; 3′—4′	3	F	$+\frac{3}{4}$
1—2 ; 4—5	3	F	$-\frac{3}{8}$	2—3′; 3′—4	5	F	$+\frac{5}{8}$
0—1′; 5′—6	5	F	$+\frac{5}{8}$	2—3 ; 3—4	3	F	$-\frac{9}{8}$
1′—2; 4—5′	5	F	$-\frac{5}{8}$	3—3′	4	F	-1
				1—1′; 5—5′	4	F	0
1′—2′;4′—5′	3	F	$+\frac{3}{4}$	2—2′; 4—4′	4	F	0

ثم نحسب الحمل المرن للوصلة 2 ، ولهذا الغرض نسلط أزواج وحدات القوى ، فى القضيبين 2 — 1 و 3 — 2 (شكل ٦ — ٤٤ ، أ) .



الشكل ٦ — ٤٤

إن هذه الأزواج من القوى ، تؤدى إلى ظهور الإجهادات فى القضبان التالية فقط ، وهى 2′ — 1′ ، 3′ — 2′ ، 2 — 1′ ، 3′ — 2 ، 1′ — 1 و 3′ — 3 .

وقد أدرجت قيم هذه الإجهادات فى الجدول (٦ — ٨) .

ونقوم بحساب قيمة الحمل المرن هنا W_2 ، على هيئة جدول ، ولهذا الغرض نضع الجدول (٦ — ٩) ، على أساس الجدولين (٦ — ٧) و (٦ — ٨) .

ويجمع معطيات العمود الأخير من الجدول (٦ — ٩) ونحصل على قيمة الحمل المرن W_2 ، وتساوى :

$$W_2 = -\frac{5}{24\,EF}$$

ونظراً لتماثل الجمالون ، يكون الحمل المرن W_4 ، مساويا للحمل W_2 ، أى أن :

$$W_4 = -\frac{5}{24\,EF}$$

وتدل العلامة أو القيمة السالبة للحمل المرن W_2 ، على أن اتجاه زاوية الدوران المتبادلة للقضيبين 2 — 1 و 3 — 2 ، يكون فى عكس اتجاه تأثير أزواج

جدول ٦ — ٨

رقم القضيب	الإجهاد الناجم فيه	رقم القضيب	الإجهاد الناجم فيه	رقم القضيب	الإجهاد الناجم فيه
1′ — 2	$-\frac{5}{12}$	2′ — 3′	$+\frac{1}{4}$	1 — 1′	$+\frac{1}{3}$
1′ — 2′	$+\frac{1}{4}$	2 — 3′	$-\frac{5}{12}$	3 — 3′	$+\frac{1}{3}$

جدول ٦ — ٩

رقم القضيب	$\frac{l}{EF}$	الإجهاد $\overline{N}$ (الناجم عن أزواج وحدات القوى)	الإجهاد N_p (الناجم عن تأثير الحمل الخارجي المعطى)	$\frac{\overline{N}\,N_p\,l}{EF}$
1′ — 2	$\frac{5}{EF}$	$-\frac{5}{12}$	$-\frac{5}{8}$	$+\frac{125}{96\,EF}$
1′ — 2′	$\frac{3}{EF}$	$+\frac{1}{4}$	$+\frac{3}{4}$	$+\frac{9}{16\,EF}$
2′ — 3′	$\frac{3}{EF}$	$+\frac{1}{4}$	$+\frac{3}{4}$	$+\frac{9}{16\,EF}$
2 — 3′	$\frac{5}{EF}$	$-\frac{5}{12}$	$+\frac{5}{8}$	$-\frac{125}{96\,EF}$
3 — 3′	$\frac{4}{EF}$	$+\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{4}{3\,EF}$

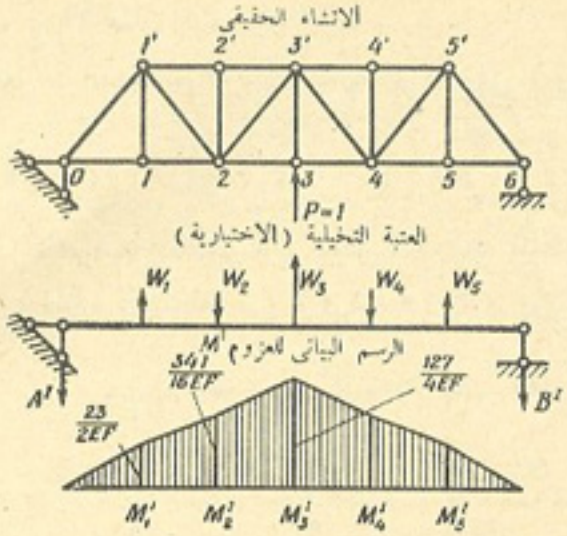
وحدات الحمل ، أى أن دوران القضيب 3 — 2 حول القضيب 2 — 1 ، يتم بعكس اتجاه عقرب الساعة ، وطبقا لذلك يكون دوران القضيب 2 — 1 حول القضيب 3 — 2 ، فى اتجاه عقرب الساعة .

ولتحديد الحمل المرن W_3 ، نسلط أزواج وحدات القوى فى القضيبين 3 — 2 و 4 — 3 (شكل ٦ — ٤٤ ، ب) ، ونجرى الحساب بالطريقة المذكورة أعلاه ، وندرج النتائج فى الجدول (٦ — ١٠) .

وبجمع معطيات العمود الأخير من الجدول (٦ — ١٠) نحصل على قيمة W_3 :

$$W_3 = \frac{167}{24\,EF}$$

إن الأحمال المرنة الناتجة W_1 ، W_3 و W_5 ، موجبة العلامة ، إذن تكون متجهة إلى الأعلى ، أى فى اتجاه تأثير القوى المتوسطة ، التى تؤلف أزواج وحدات القوى ، أما الأحمال المرنة السالبة W_2 و W_4 ، فتكون متجهة إلى الأسفل .



الشكل ٦ — ٤٥

إن الإنشاء التخيلى ، المناظر للحالة المبحوثة أعلاه (شكل ٦ — ٤٥ ، أ) هو عبارة عن عتبة أفقية ، محمولة على مسندين . ويبين الشكل (٦ — ٤٥ ، ب)

جدول ٦ — ١٠

رقم القضيب	$\frac{l}{EF}$	الإجهاد $\overline{N}$ (الناجم عن أزواج وحدات القوى)	الإجهاد N_p (الناجم عن تأثير الحمل الخارجي المعطى)	$\frac{\overline{N}\,N_p\,l}{EF}$
2 — 3′	$\frac{5}{EF}$	$+\frac{5}{12}$	$+\frac{5}{8}$	$+\frac{125}{96\,EF}$
4 — 3′	$\frac{5}{EF}$	$+\frac{5}{12}$	$+\frac{5}{8}$	$+\frac{125}{96\,EF}$
2 — 3	$\frac{3}{EF}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{9}{8}$	$+\frac{27}{32\,EF}$
3 — 4	$\frac{3}{EF}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{9}{8}$	$+\frac{27}{32\,EF}$
3 — 3′	$\frac{4}{EF}$	$-\frac{2}{3}$	-1	$+\frac{8}{3\,EF}$

العتبة التخيلية ، مع الأحمال المرنة المؤثرة عليها .

إن ردود فعل مساند العتبة التخيلية متجهة إلى الأسفل ، وتساوى ما يلى :

$$A' = B' = \frac{1}{2} \times \frac{1}{EF}\left(\frac{9}{16} - \frac{5}{24} + \frac{167}{24} - \frac{5}{24} + \frac{9}{16}\right) = \frac{23}{6\,EF}$$

ولرسم خط الانحراف المطلوب للوتر السفلى للجمالون المذكور ، نحسب قيم العزوم التخيلية ، المؤثرة فى النقاط 1 ، 2 ، 3 ، 4 و 5 ، من العتبة التخيلية :

$$M'_1 = y_1 = M'_5 = y_5 = -\frac{23}{6\,EF} \times 3 = -\frac{23}{2\,EF}$$

$$M'_2 = y_2 = M'_4 = y_4 = -\frac{23}{6\,EF} \times 6 + \frac{9}{16\,EF} \times 3 = -\frac{341}{16\,FF}$$

$$M'_3 = y_3 = -\frac{23}{6\,FF} \times 9 + \frac{9}{16\,FF} \times 6 - \frac{5}{24\,EF} \times 3 = -\frac{127}{4\,EF}$$

ونستخدم هذه المعطيات لتخطيط الرسم البيانى للعزوم التخيلية ، من جهة الألياف المشدودة للعتبة التخيلية (شكل ٦ — ٤٥ ، ج) وهو الرسم البيانى الذى يمثل الرسم البيانى لانحرافات الانشاء الحقيقى من حيث القيمة والاتجاه . وسوف تكون انحرافات وصلات الوتر السفلى للجمالون ، الواقعة تحت تأثير الأحمال الفعلية ، متجهة إلى الأعلى .

ولمراجعة الرسم البيانى للانحرافات ، الذى حصلنا عليه الآن ، نوجد من صيغة الانحرافات ، الانحراف الرأسى للوصلة 3 ، الناجم عن تأثير الحمل المعين ، وهو $P = 1$ (طن واحد) ، على الجمالون المذكور .

إذن الإزاحة المطلوبة تساوى ما يلى :

$$\Delta_{pp} = \frac{\bar{N}\,N_p}{EF} = \frac{N_p^2\,l}{EF}$$

وذلك لأنه فى هذه الحالة ، عند تأثير الحمل $P = 1$ ، يكون الإجهاد $\bar{N}$ مساويا عدديا للإجهاد N_p .

وتؤخذ قيم المقادير الداخلة فى الصيغة الأخيرة ، من الجدول (٦ — ٧) .

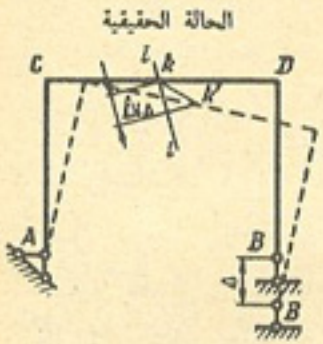
وبالنتيجة نحصل على ما يلى :

$$\Delta_{pp} = \delta_{pp} = \frac{1}{EF}\left[\left(\frac{3}{8}\right)^2 \times 3 \times 4 + \left(\frac{5}{8}\right)^2 \times 5 \times 6 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times 3 \times 4 + \left(\frac{9}{8}\right)^2 \times 3 \times 2 + 1^2 \times 4\right] = \frac{1}{EF} \times \frac{108 + 750 + 432 + 486 + 256}{64} = \frac{127}{4EF}$$

والمقدار الناتج δ_{pp} يطابق إزاحة الوصلة 3 التى وجدت بمساعدة الأحمال المرنة .

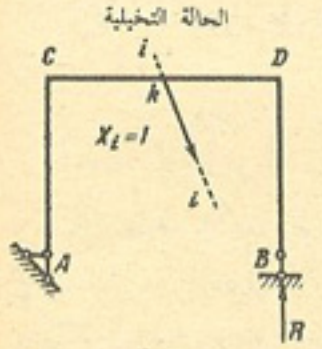
البند ٦ — ١٤ : انحرافات الإنشاءات المحددة إستاتيكيا ، الناجمة عن إزاحة المساند

عند إزاحة مساند الإنشاء المحدد إستاتيكيا ، فى اتجاهات ردود الفعل المناظرة لها ، لا تظهر فى ذلك أية إجهادات داخلية .



الشكل ٦ — ٤٦

وسوف نبحث على سبيل المثال ، الإطار المبين فى الشكل (٦ — ٤٦) . نفرض بأنه نتيجة لتحسات التربة تحت الأساس (soil erosion) أو لأى سبب آخر ، أزيح المسند المفصلى المتحرك للإطار ، الممثل تخطيطيا بالقضيب العمودى B ، إزاحة رأسية ، أى فى اتجاه القضيب الساند ، قدرها Δ . أن إزاحة المسند هذه ، لا تؤدى حدوث إجهادات داخلية فى الإنشاء . نحدد إزاحة النقطة k من الإنشاء ، فى الاتجاه $i - i$ ، أى الإزاحة $\Delta_{i\Delta}$. ولهذا الغرض نفرض بأننا سلطنا الحمل $X_i = 1$ على الإطار التخيلى ، فى اتجاه الإزاحة المطلوبة (شكل ٦ — ٤٧) . ونرمز إلى رد فعل المسند ، الناشئ فى الإطار التخيلى نتيجة لتأثير الحمل $X_i = 1$ فى هذا القضيب الساند ، الذى ينزاح



الشكل ٦ — ٤٧

فى حالة التحميل الحقيقى للإطار بمقدار Δ ، بالرمز R .

واستناداً إلى نظرية الشغل المتبادل ، للحالتين المبينتين فى الشكلين (٦–٤٦) و (٦ – ٤٧) ، الذى يكون الإطار فى إحداهما (الحالة الحقيقية) غير محمل (أى كأنه واقع تحت تأثير حمل الصفر) ، يمكن وضع المعادلة التالية :

$$X_1 \Delta_{1\Delta} - R\Delta = 0$$

أو

$$1 \times \Delta_{1\Delta} - R\Delta = 0$$

ومنها ينتج أن :

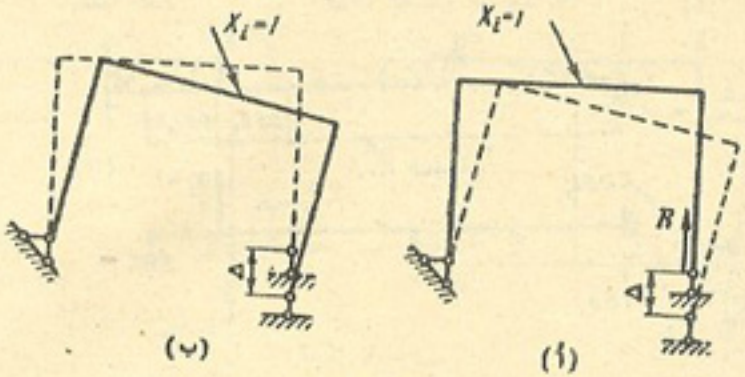
$$\Delta_{1\Delta} = R\Delta$$

أى أن الإزاحة $\Delta_{1\Delta}$ الحاصلة فى أية نقطة من نقاط الإنشاء المذكور المحدد إستاتيكيا ، الناجمة عن انحراف (هبوط) المسند بمقدار Δ ، تساوى حاصل ضرب الإزاحة Δ فى رد فعل المسند (الذى يهبط فى حالة التحميل الحقيقية بمقدار Δ) الناجم عن تأثير وحدة الحمل ، المسلطة فى اتجاه الإزاحة المطلوبة . وتكون هذه الإزاحة موجبة ، عندما يكون رد فعل المسند متجها فى عكس اتجاه الإزاحة Δ ، وسالبة عندما ينطبق اتجاه رد فعل المسند مع اتجاه Δ .

ويمكن الحصول على نفس النتيجة ، بوضع معادلة الشغل التالية :

$$\frac{1}{2} X_1\delta_{11} + X_1 \Delta_{1\Delta} - R\Delta = \frac{1}{2} X_1\delta_{11}$$

إن الطرف الأيسر لهذه المعادلة ، يمثل شغل كافة القوى ومن ضمنها ردود فعل المساند ، المؤثرة فى الإنشاء المذكور المحدد إستاتيكيا (شكل ٦ – ٤٨ ، أ) وهو الشغل الذى تنجزه القوى المذكور ، فى الحالة التى تبدأ فيها إزاحة المسند B ، بعد وصول الحمل $X_1 = 1$ إلى قيمته القصوى . أما الطرف الأيمن للمعادلة ،



الشكل ٦ – ٤٨

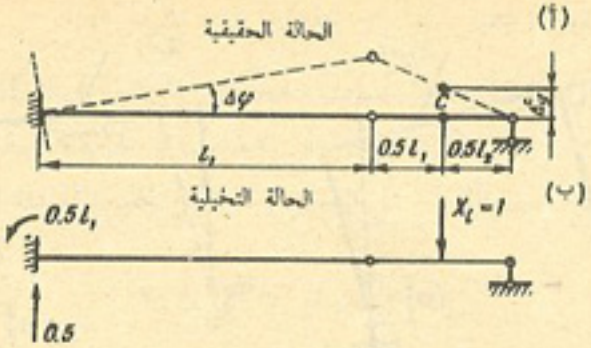
فيمثل الشغل الذى تنجزه القوى المذكورة ، فى الحالة التى تبدأ فيها أولا إزاحة المسند B ، وبعدها فقط ، يبدأ تأثير الحمل المتدرج الزيادة $X_1 = 1$ ، على الإنشاء المذكور (شكل ٦ – ٤٨ ، ب) . والطرف الأيسر للمعادلة يساوى طرفها الأيمن ، لأن طاقة الانفعال (الإزاحات) النهائية للإنشاء فى كلتا الحالتين ستكون متساوية ، وهذا يساعدنا على أن نثبت بأن طاقة الانفعال المتركة فى الإنشاء ، فى الحالة الأولى (المساوية لمجموع حدود الطرف الأيسر للمعادلة) ، ستساوى طاقة الانفعال (المساوية للطرف الأيمن للمعادلة) المتركة فى الحالة الثانية .

ونحصل من المعادلة التى وجدناها أخيراً (باعتبار أن $X_1 = 1$) على المعادلة التالية :

$$\Delta_{1\Delta} = R\Delta$$

وقد وصلنا إلى نفس النتيجة أعلاه ، على أساس نظرية الشغل المتبادل .

نأتى الآن إلى بحث العتبة المتصلة بمفصلات ، المبينة فى الشكل (٦–٤٩ ، أ) ، التى دار مسندها الأيسر (نهايتها المبينة فى الجدار) ، بزاوية Δ_φ . ودار طرفها الأيسر أيضا بزاوية Δ_φ . نحدد الإزاحة الرأسية Δ_y للنقطة C من العتبة المذكورة . ولهذا الغرض نسلط على العتبة التخيلية ، وحدة الحمل $X_1 = 1$ ،



الشكل ٦ – ٤٩

فى اتجاه الإزاحة المطلوبة (شكل ٦ – ٤٩ ، ب) . وعلى أساس نظرية الشغل المتبادل للحالتين المبينتين فى الشكل (٦ – ٤٩) ، يمكن وضع المعادلة التالية :

$$X_1 \times \Delta_y + 0.5\, l_1 \times \Delta_\varphi = 0$$

أو

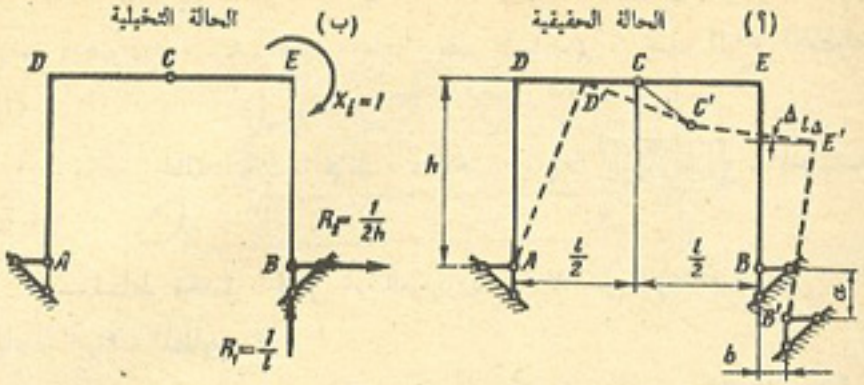
$$1.\, \Delta_y + 0.5\, l_1 \times \Delta_\varphi = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$\Delta_y = -\, 0.5\, l_1 \times \Delta_\varphi$$

وتدل العلامة السالبة ، على أن النقطة C ، أزيحت (انحرفت) فى عكس اتجاه الحمل $X_1 = 1$ ، أى إلى الأعلى .

ونبحث الآن حالة أكثر عموما ، عندما تحدث فى نفس الوقت ، إزاحات (انحرافات) فى اتجاهات عدة أربطة من أربطة المساند ، فى الإنشاء المحدد إستاتيكيا وكمثال معين بالتحديد ، نبحث الإطار المبين فى الشكل (٦–٥٠ ، أ) . وتمثل الخطوط المنقطة ، الوضع الجديد للإطار ، الناجم عن انحراف المسند الأيمن ، فى الاتجاهين الرأسى والأفقى بمقدار a و b على التوالى .



الشكل ٦ – ٥٠

نحدد زاوية دوران الوصلة E من الإطار المذكور . ولهذا الغرض ، عند حل المسألة باستخدام نظرية الشغل المتبادل ، نسلط على العتبة التخيلية (شكل ٦ – ٥٠ ، ب) وحدة العزم X_1 ، فى اتجاه الإزاحة الزاوية (زاوية الدوران) المطلوبة . وبتأثير هذا العزم ، ينشأ عند المسند الأيمن ، ردا الفعل R_1 و R_2 ، المساويان للمقدارين $\frac{1}{l}$ و $\frac{1}{2h}$ على التوالى .

نضع معادلة الشغل التالية ، للحالتين – الحالة الحقيقية (شكل ٦–٥٠ ، أ) والحالة التخيلية (شكل ٦ – ٥٠ ، ب) :

$$X_1\, \Delta_{1\Delta} - R_1 a + R_2 b = 0$$

وبما أن $X_1 = 1$

إذن ينتج لدينا ما يلى :

$$\Delta_{1\Delta} = R_1 a - R_2 b$$

وبتعويض قيمتى ردى الفعل R_1 و R_2 نحصل على ما يلى :

$$\Delta_{1\Delta} = \frac{a}{l} - \frac{b}{2h}$$

وهكذا لتحديد الانحرافات الناجمة فى الإنشاء المحدد إستاتيكيا ، نتيجة لإزاحة (هبوط) مسانده (فى اتجاه أربطة المساند) ، يجب اتباع الخطوات التالية :

١ ــ نختار الحالة التخيلية للإنشاء ، باعتبار رباط المسند المزاح (المنحرف) ثابتا ،

٢ ــ نسلط وحدة الحمل أو العزم $X_i = 1$ على الإنشاء التخيلى ، فى اتجاه الانحراف المطلوب ،

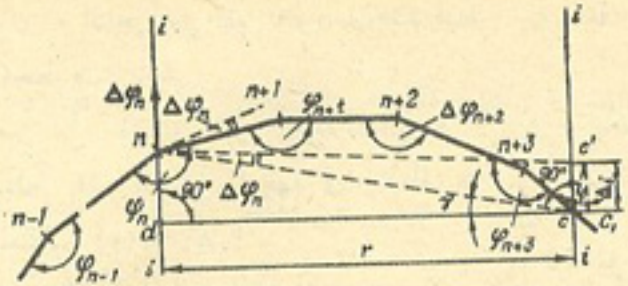
٣ ــ نحدد ردود الفعل فى أربطة مساند الإنشاء التخيلى (الحالة التخيلية) ، التى تنحرف أو تنزاح فى الإنشاء الحقيقى (الحالة الحقيقية) ،

٤ ــ نضع معادلة شغل القوى (الأحمال) للحالة التخيلية ، المنجز على امتداد الانحرافات فى الحالة الحقيقية ، ونجعله مساويا للصفر ،

٥ ــ نحل المعادلة الموضوعة ، ونوجد منها قيمة الانحراف المطلوب .

البند ٦ ــ ١٥ : انحرافات (تشوهات) السلسلة الكينماتية ، الناجمة عن تغير الزوايا المحصورة بين حلقاتها

سوف نصطلح فى هذه الحالة ، على إطلاق اسم السلسلة الكينماتية (kinematic chain) ، على أى إنشاء مؤلف من عدة قطع أو حلقات مستقيمة منفردة (أو قد يتألف من وصل منحنية) ، ويكون على شكل خط منكسر . نستخرج المعادلة التى تحدد انحراف إحدى نقاط السلسلة ، مثل النقطة C ، فى الاتجاه $i - i$ ، وهو الانحراف الناجم عن تغير الزاوية المحصورة بين أى حلقتين (أو قطعتين) متجاورتين من السلسلة ، مثل الحلقتين n ، $n - 1$ و $n + 1$ ، n (شكل ٦ ــ ٥١) ، بمقدار يساوى Δ_{φ_n} . وإذا بقى القسم الأيسر من السلسلة (إلى يسار الوصلة n) ثابتا ، فإن تغير الزاوية φ_n (بمقدار Δ_{φ_n}) يؤدى إلى إزاحة النقطة C إلى موضع آخر C . وعندئذ نجد بأن الزاوية



الشكل ٦ ــ ٥١

$C'nC$ ستساوى Δ_{φ_n} ، وسيكون المستقيم CC' ، عموديا على المستقيم nC ، وذلك نظراً لضآلة المقدار Δ_{φ_n} .

نرمز إلى مسقط الانحراف CC' على الاتجاه $i - i$ ، بالرمز Δ_i ، وإلى زاوية ميل المستقيم nC مع الخط Cd (العمودى على $i - i$) بالرمز γ (شكل ٦ ــ ٥١) . وببحث المثلثين $CC'C_1$ و CnC' ، نجد ما يلى ببساطة :

$$C'C_1 = \Delta_i = C'C \cos\gamma = nC \times \Delta_{\varphi_n} \times \cos\gamma$$

ولكن بما أن

$$nC \times \cos\gamma = Cd = r$$

إذن نجد بأن $\Delta_i = \Delta_{\varphi_n} \times r$ ، أى أن إنحراف أية نقطة من نقاط السلسلة ، وهو الانحراف Δ_i ، الناجم عن تغير الزاوية φ_n بمقدار Δ_{φ_n} ، يساوى حاصل ضرب Δ_{φ_n} فى القسم r ، الذى يمثل مسقط المستقيم nC على المحور العمودى على اتجاه الانحراف المطلوب Δ_i .

وإذا عبرنا عن المقدار Δ_{φ_n} ، بكمية موجهة ، مؤثرة فى النقطة n من السلسلة ، ووجهناها بموازاة الانحراف Δ_i ، عندئذ سيكون الانحراف Δ_i مساويا عدديا ، لعزم هذه الكمية الموجهة ، حول النقطة C .

وهكذا لتحديد الانحراف Δ_i ، لأية نقطة من نقاط السلسلة ، فى

الاتجاه $i - i$ ، الناجم عن تغير زاوية واحدة فقط φ_n بمقدار $\Delta\varphi_n$ ، يجب اتباع الخطوات التالية :

١ – نعبر عن مقدار تغير الزاوية ، أى عن $\Delta\varphi_n$ ، بكمية موجهة ؛

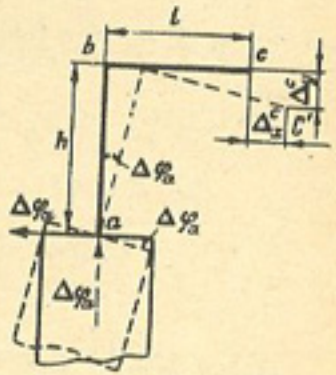
٢ – نسلط هذه الكمية الموجهة فى النقطة n من السلسلة ، فى اتجاه الانحراف المطلوب إيجاده Δ_i ؛

٣ – نحدد القيمة المطلقة للانحراف Δ_i ، بحساب عزم هذه الكمية الموجهة ، حول النقطة التى يراد حساب انحرافها .

وعند تغير عدة زوايا من السلسلة ، يمكن إيجاد الانحراف Δ_i من الصيغة التالية :

$$\Delta_i = \Delta\varphi_1 \times r_1 + \Delta\varphi_2 \times r_2 + \dots + \Delta\varphi_m \times r_m = \sum_1^m \Delta\varphi \times r \qquad (6-29)$$

مثال : يطلب تحديد الانحرافين الأفقى والرأسى للنقطة C من الإطار المبين فى الشكل (٦ – ٥٢) ، الناجمين عن دوران الإطار بأكمله حول النقطة a ، فى اتجاه عقرب الساعة ، بزاوية قدرها $\Delta\varphi_a$.



الشكل ٦ – ٥٢

الحل : لتحديد Δ_x^c ، نسلط فى النقطة a ، الكمية الموجهة $\Delta\varphi_a$ فى الاتجاه الأفقى ، ونحدد عزمها حول النقطة C ، ونتيجة لذلك نحصل على الانحراف المطلوب ، كما يلى :

$$\Delta_x^c = \Delta\varphi_a \, h$$

وبنفس الطريقة نحدد الانحراف الرأسى أيضاً للنقطة C :

$$\Delta_y^c = \Delta\varphi_a \, l$$

إن الانحراف الكلى للنقطة C ، الذى يساوى القسم CC' ، يحدد من الصيغة التالية :

$$CC' = \sqrt{(\Delta_x^c)^2 + (\Delta_y^c)^2} = \Delta\varphi_a \sqrt{h^2 + l^2}$$

ويمكن حل هذا المثال ، بالطريقة المبحوثة فى البند السابق .

البند ٦ – ١٦ : تحديد انحرافات الإنشاءات الإطارية المجسمة

يمكن أن تنشأ فى كل مقطع عرضى من مقاطع الإنشاء الإطارى المستوى ، ثلاثة إجهادات داخلية هى : M ، N و Q . وبناء على ذلك ، تتألف صيغة الانحرافات الخاصة بالأطر المستوية ، من ثلاثة حدود ، يأخذ كل منها فى الاعتبار الانحراف الناجم عن عزوم الانحناء M أو عن القوى الطولية N ، أو عن قوى القص Q .

ويمكن أن تنشأ فى كل مقطع عرضى من مقاطع الإنشاء الإطارى المجسم ، بصورة عامة ، ستة إجهادات داخلية ، وهى : عزما الانحناء M_y و M_z ، حول المحورين الرئيسيين y و z للمقطع العرضى ، عزم الالتواء M_t (twisting moment) ، حول المحور الطولى x للقضيب ، القوة الطولية N_x وقوتا القص Q_y و Q_z ، الموازيتان للمحورين الرئيسيين y و z . ولذلك تحتوى صيغة الانحرافات الخاصة بالإنشاء الإطارى المجسم ، على ستة حدود ، يأخذ كل منها فى الاعتبار ، إجهاداً داخلياً واحداً .

والآن نضع صيغة الانحرافات الخاصة بالأطر أو الإنشاءات الإطارية المجسمة ، بدون استنتاج ، وذلك على نمط الصيغة (6 – 16) ، المستخرجة فى البند (٦ – ٦) ، الخاصة بالإنشاءات المستوية ، أى كما يلى :

$$\Delta_{mn} = \Sigma \int_0^l \overline{M}_{ym} \frac{M_{yn}dx}{EJ_y} + \Sigma \int_0^l \overline{M}_{zm} \frac{M_{zn}dx}{EJ_z} + \Sigma \int_0^l \overline{M}_{tm} \frac{M_{tn}dx}{GJ_t} + \Sigma \int_0^l \overline{N}_{xm} \frac{N_{xn}dx}{EF} + \Sigma \int_0^l \overline{Q}_{ym} \frac{Q_{yn}dx}{GF}\eta_y + \Sigma \int_0^l \overline{Q}_{zm} \frac{Q_{zn}dx}{GF}\eta_z \qquad (6-30)$$

إن المقدارين $\overline{M}_{ym}$ و $\overline{M}_{zm}$ الموجودين فى الصيغة (6 – 30) ، يمثلان

على التوالى قيمتى عزمى الانحناء M_y و M_z فى المقاطع العرضية للقضبان فى الحالة التخيلية ، أى عندما تؤثر على الإنشاء (الإطار) وحدة حمل واحدة (وفى حالة الانحراف الخطى ، عند تأثير حمل مركز ، وفى حالة الانحراف الزاوى ، عند تأثير عزم مركز) ، ينطبق اتجاهها مع اتجاه الانحراف المطلوب . ويمثل المقدار $\overline{M}_m$ ، قيمة عزم الإلتواء M_t فى الحالة التخيلية ، أما المقادير $\overline{N}_{xm}$ ، $\overline{Q}_{ym}$ و Q_{zm} ، فتمثل قيم القوة الطولية N_x وقوتى القص Q_y و Q_z على التوالى ، فى الحالة التخيلية . وتعبر المقادير التالية : M_{ym} ، M_{zm} ، M_{tm} ، N_{xm} ، Q_{ym} و Q_{zm} ، عن الإجهادات الداخلية الناشئة فى المقاطع العرضية للقضبان ، عند تأثير الحمل المعين على الإنشاء (الإطار) .

ويمكن تحديد المعاملين η_y و η_z ، المعتمدين على شكل المقطع العرضى للقضيب ، طبقاً للتعليمات الواردة فى البند (٦ — ٢) .

إن قيمة معامل الشكل الهندسى J_t ، الداخل فى صيغة الجسوءة GJ_t ، فى حالة الالتواء ، يمكن أن تؤخذ مساوية لما يلى : للشكل المربع $J_t = 0.143\, a^4$ ، للمستطيل المطوّل (elongated rectangular) $J_t = \frac{b^3}{3}\,(a - 0.63\, b)$ ، عندما تكون $a > b$ ، للمقاطع شكل — T و I وغيرها من المقاطع المؤلفة من المستطيلات المطولة :

$$J_t = \frac{1}{3}\ \Sigma d^3 l$$

حيث l — طول المستطيل ،

d — عرض المستطيل .

وللمقطع الدائرى المصمت :

$$J_t = J_p = \frac{\pi\, d^4}{32} = \frac{\pi\, r^4}{2}$$

وللمقطع الحلق :

$$J_t = \frac{\pi}{32}\,(D^4 - d^4) = \frac{\pi}{2}\,(R^4 - r^4)$$

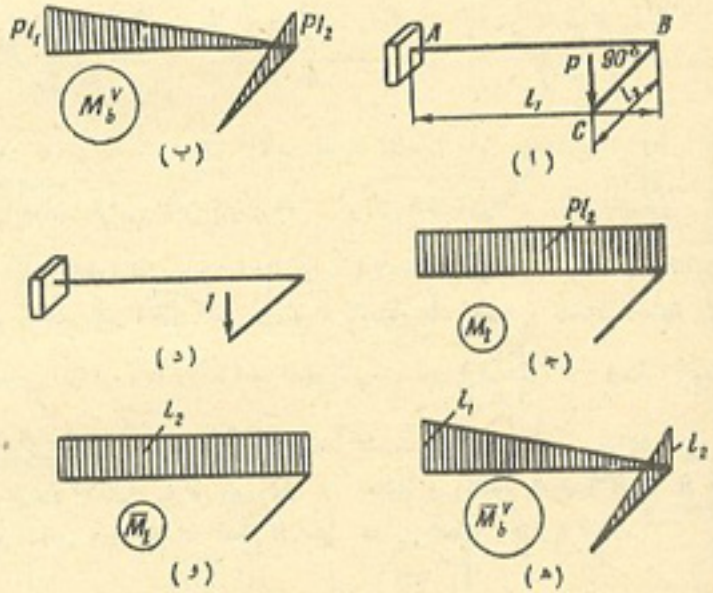
حيث D و R تمثلان القطر ونصف القطر الخارجيين للحلقة ، d و r تمثلان القطر ونصف القطر الداخليين .

وعندما تكون أبعاد المقاطع العرضية لكل قضيب من قضبان الإنشاء (الإطار) ثابتة على طوله . يمكن إخراج المقادير

$$\eta_z \text{ و } \eta_y \text{ ، } GF \text{ ، } EF \text{ ، } GJ_t \text{ ، } EJ_z \text{ ، } EJ_y$$

من داخل التكامل ، ووضعها أمام علامة التكامل ، أى خارج التكامل ، فى الصيغة (30 — 6) .

إن تحديد الانحرافات من الصيغة (30 — 6) يتم بنفس النظام أو الترتيب المتبع عند تحديد انحرافات الإنشاءات الإطارية المستوية (راجع البند ٦ — ٦) . وعند حساب الأطر والعتبات المجسمة . تؤخذ فى الاعتبار عادة ، الحدود الثلاثة الأولى من الصيغة (30 — 6) ، أما تأثير القوى الطولية وقوى القص على الانحراف ، فلا يؤخذ فى الاعتبار . وعند تحديد انحرافات الأطر المجسمة ، لا يؤخذ فى



الشكل ٦ — ٥٣

الاعتبار عادة ، إلا تأثير القوى الطولية فقط ، كما هى الحالة بالنسبة للجمالونات المستوية أيضاً .

مثال ١ : يطلب تحديد الانحراف الرأسى للطرف الطليق C من العتبة المرفقية ، ذات المقطع العرضى الدائرى ، الذى قطره d ، المبينة فى الشكل (٦ – ٥٣ ، أ) ، وهو الانحراف الناجم عن تأثير الحمل الرأسى P على العتبة المذكورة . هذا مع العلم بأن $G = 0.4\ E$.

الحل : يبين الشكل (٦ – ٥٣ ، ب) الرسم البيانى M_b^V لعزوم الانحناء فى المقاطع العرضية للعتبة ، المؤثرة فى المستويات الرأسية (أى عزوم الانحناء المأخوذة حول المحاور الأفقية للمقاطع العرضية للعتبة) ، والناجمة عن التأثير المذكور ، أما الشكل (٦ – ٥٣ ، ج) فيمثل الرسم البيانى لعزوم الالتواء M_t . ولا تنشأ فى المستويات الأفقية ، أى عزوم للانحناء ، نتيجة لتأثير الحمل المذكور . ولتحديد الانحراف الرأسى Δ للنقطة C ، نسلط على العتبة فى هذه النقطة بالذات ، وحدة حمل رأسية واحدة (شكل ٦ – ٥٣ ، د) . الرسمان البيانيان للعزمين $\overline{M}_b^V$ و $\overline{M}_t$ ، الناجمين عن تأثير هذه الوحدة ، مبينان فى الشكل (٦ – ٥٣ ، هـ ، و) .

ومن الصيغة (30 — 6) ، باستخدام طريقة فيريشاجين لضرب الرسوم البيانية ، نحصل على ما يلى :

$$\Delta = \frac{P l_1 \times \frac{l_1}{2} \times \frac{2}{3}\ l_1}{E J} + \frac{P l_2 \times \frac{l_2}{2} \times \frac{2}{3}\ l_2}{E J} + \frac{P l_2 \times l_1 \times l_2}{G J_p}$$

أن كل حد من حدود الطرف الأيمن للصيغة الأخيرة التى حصلنا عليها الآن ، يحدد إحدى مركبات الانحراف الرأسى الكلى للنقطة C . ويمثل الحد الأول ، الذى يساوى $\frac{P l_1^3}{3\ E J}$ ، الانحراف الرأسى للنقطة B من العتبة المذكورة (لاحظ الشكل ٦ – ٥٣ ، أ) ، الناجم عن انحناء القطعة AB تحت تأثير الحمل المعين . ونتيجة لانحناء هذه القطعة ، تنحرف النقطة C فى الاتجاه الرأسى ، بنفس المقدار تماماً . أما الحد الثانى الذى يساوى $\frac{P l_2^3}{3\ E J}$ ، فيمثل الانحراف الرأسى للنقطة C ، الناجم عن انحناء القطعة BC من العتبة .

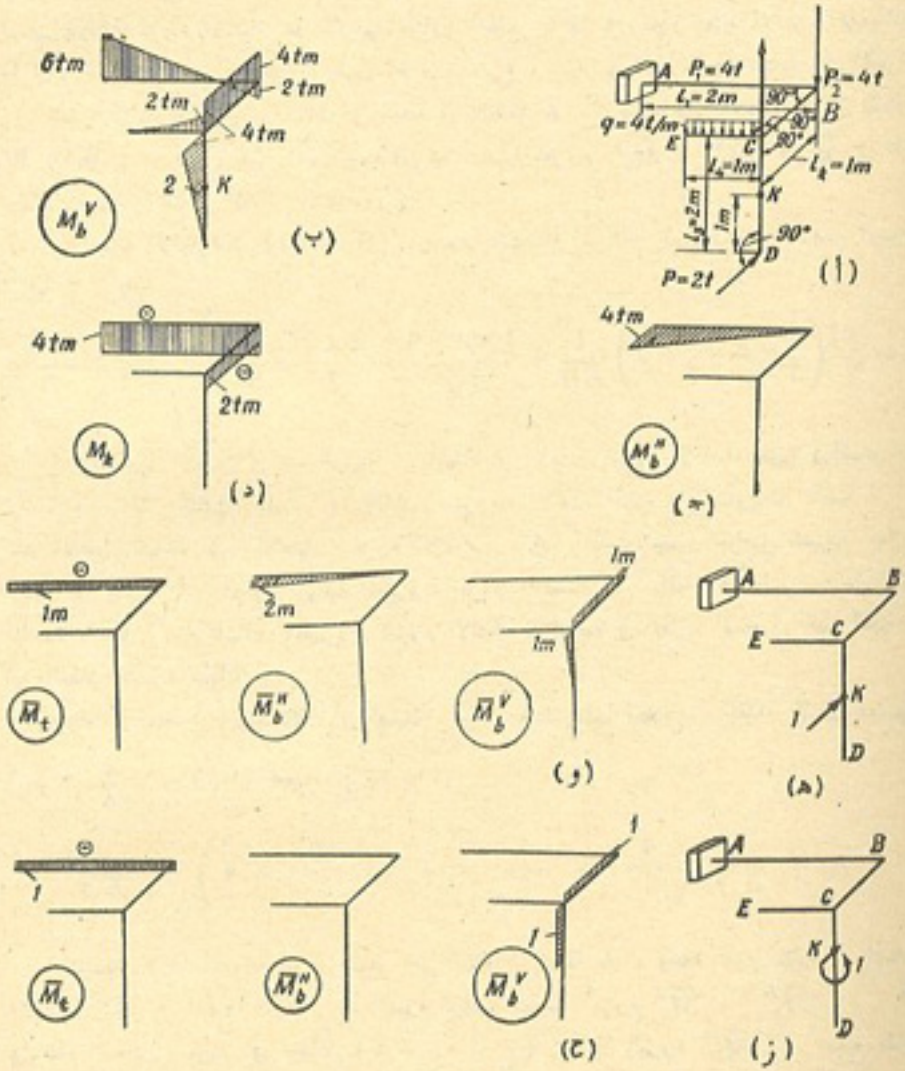
وتؤدى عزوم الالتواء $M_t = P\ l_2$ ، الناشئة فى المقاطع العرضية للقطعة AB ، نتيجة لتأثير الحمل المعين ، إلى دوران المقطع B حول محور القطعة ، بزاوية قدرها :

$$\varphi = \frac{M_t\ l_1}{G\ J_p} = \frac{P l_2\ l_1}{G J_p}$$

ونتيجة لهذا الدوران تنحرف النقطة C ، فى الاتجاه الرأسى بمقدار $\varphi\ l_2 = \frac{P l_1\ l_2^2}{G J_p}$ ، وهذا المقدار يمثل مركبة انحراف النقطة C ، المحسوبة من الحد الأخير لصيغة الانحراف Δ ، التى حصلنا عليها .

وبتعويض المقادير $J = \frac{\pi d^4}{64}$ ، $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$ ، $G = 0.4\ E$ ، فى صيغة الانحراف Δ ، نحصل على الصيغة النهائية التالية :

$$\Delta = \frac{64\ P}{\pi d^4 E} \left(\frac{l_1^3}{3} + \frac{l_2^3}{3} + \frac{l_1\ l_2^2}{0.8} \right)$$



الشكل ٦ – ٥٤

مثال ٢ : يطلب تحديد الانحراف الافقى Δ للنقطة K من محور العتبة المرفقية ، ذات المقطع العرضى الدائرى الذى قطره d ، المثبتة من طرف واحد والمبينة فى الشكل (٦ – ٥٤ ، أ) ، فى الاتجاه الموازى لمحور القطعة BC ، وتحديد زاوية الدوران للمقطع العرضى K ، فى المستوى BCD .

الحل : يبين الشكل (٦ – ٥٤ ، ب ، ج ، د) الرسوم البيانية لعزوم الانحناء M_b^V (المؤثرة فى المستويات الرأسية) و M_b^H (المؤثرة فى المستويات الأفقية) . ويبين كذلك الرسم البيانى لعزوم الالتواء M_t ، الناجمة فى العتبة نتيجة لتأثير الحمل المعين . وقد خططت الرسوم البيانية لعزوم الانحناء ، من جهة الألياف المشدودة لكل قطعة من قطع العتبة . وقد وضعت علامات عزوم الالتواء على الرسم البيانى الخاص بها ، ويعتبر عزم الالتواء موجباً ، إذا كان هذا العزم ، عند النظر إلى طرف القسم المقطوع ، يدور فى اتجاه عقرب الساعة .

لتحديد الانحراف Δ ، نسلط على العتبة فى النقطة K ، وحدة الحمل الافقية بموازاة القطعة BC (شكل ٦ – ٥٤ ، هـ) . أن الرسوم البيانية التخيلية للعزوم $\overline{M}_b^V$ ، $\overline{M}_b^H$ ، $\overline{M}_t$ فى هذا المقطع ، مبينة فى الشكل (٦ – ٥٤ ، و) .

ومن صيغة الانحرافات (30 — 6) ، نجد باستخدام طريقة فيريشاجين لضرب الرسوم البيانية ، ما يلى :

$$\Delta = \frac{1\times1}{2}\left(\frac{2}{3}\times4+\frac{1}{3}\times2\right)\frac{1}{EJ}+\frac{1\times1\times4}{EJ}+\frac{2\times2}{2}\times\frac{2}{3}\times4\times\frac{1}{EJ}+\frac{1\times2\times4}{EJ_p}$$

إن الحدين الأوليين فى هذه الصيغة ، يأخذان فى الاعتبار عزوم الانحناء المؤثرة فى المستويات الرأسية ، والحد الثالث يأخذ فى الاعتبار عزوم الانحناء المؤثرة فى المستويات الأفقية ، أما الحد الأخير فيأخذ فى الاعتبار عزوم الالتواء . وقد اخذت جميع حواصل الضرب بعلامة موجبة ، وذلك لأن الرسوم البيانية المضروبة لعزوم الانحناء ، واقعة فى نفس جهات العتبة الواحدة ، أما الرسوم البيانية المضروبة لعزوم الالتواء ، الواقعة فى نفس اقسام أو قطع العتبة ، فقد أخذت بعلامات متماثلة .

وبعد أن نعوض فى المعادلة أو الصيغة التى حصلنا عليها أعلاه ، المقدار $J_p = 2J$ (حيث $J = \frac{\pi d^4}{64}$) ، نحصل على ما يلى :

$$\Delta = \frac{1}{EJ}\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{3}+4+\frac{16}{3}+4\right) = \frac{15}{EJ}$$

ولتحديد زاوية الدوران φ ، نسلط على العتبة فى النقطة K ، وحدة العزم المؤثرة فى المستوى BCD (شكل ٦ – ٥٤ ، ز) . إن الرسوم البيانية التخيلية للعزوم $\overline{M}_b^V$ ، $\overline{M}_b^H$ ، $\overline{M}_t$ فى هذه الحالة ، مبينة فى الشكل (٦ – ٥٤ ، ح) . (إن العزوم $\overline{M}_b^H$ فى جميع مقاطع العتبة ، تساوى صفراً) .

ومن الصيغة (30 — 6) ، نجد ما يلى :

$$\varphi = \frac{2+4}{2}\times1\times1\times\frac{1}{EJ}+\frac{4\times1\times1}{EJ}+\frac{4\times2\times1}{EJ_p} = \frac{1}{EJ}(3+4+4) = \frac{11}{EJ}$$

وبما أننا قد عبرنا عن الإجهادات والأحمال فى الرسوم البيانية ، بالأطنان والأمتار ، إذن يجب أن تكون وحدة قياس المقدار E ، فى الصيغ التى حصلنا عليها اعلاه ، هى طن / م^2 ، ووحدة قياس المقدار J هى م^4 . وبنتيجة الحساب تكون وحدة قياس الانحراف Δ هى المتر ، ووحدة قياس الزاوية φ هى الزوايا القطرية . وكلتا القيمتين ذات علامة موجبة ، إذن نجد أن اتجاهى الانحرافين Δ و φ ينطبقان مع اتجاهى وحدة الحمل (شكل ٦ – ٥٤ ، هـ) ووحدة العزم (شكل ٦ – ٥٤ ، ز) .

الفصل السابع

حساب الانشاءات البسيطة غير المحددة استاتيكيًّا ، بطريقة القوى

البند ٧ – ١ : الإنشاءات غير المحددة استاتيكياً

لقد اطلع القارئ من دراسة مقاومة المواد ، على حساب الإنشاءات ، التى لا يمكن تحديد الإجهادات الداخلية فيها ، إلا بوضع المعادلات الاستاتيكية فقط . وللقيام بحساب هذه الإنشاءات ، يجب وضع معادلات إضافية – معادلات التشوهات (الانحرافات) . إن مثل هذه الإنشاءات تسمى بالإنشاءات غير المحددة استاتيكيًّا .

إن الخاصية المميزة للإنشاءات غير المحددة استاتيكيًّا (خلافا للإنشاءات المحددة استاتيكيًّا) تتمثل فى أن توزيع الإجهادات فيها ، لا يعتمد على الأحمال الخارجية فقط ، بل يعتمد كذلك على النسب الموجودة بين أبعاد المقاطع العرضية لقطعها المنفردة . وإذا كانت قطع الإنشاء مصنوعة من مواد مختلفة ، عندئذ يعتمد توزيع الإجهادات على معاملات مرونة تلك المواد أيضًا . والميزة الأخرى للإنشاءات غير المحددة استاتيكيًّا ، هى أن انحراف المساند والمؤثرات الحرارية ودقة تجميع القطع الإنشائية (الإنشاءات) تؤدى إلى ظهور إجهادات إضافية فى مثل هذه الإنشاءات ، الأمر الذى لا يمكن حدوثه فى الإنشاءات المحددة استاتيكيًّا .

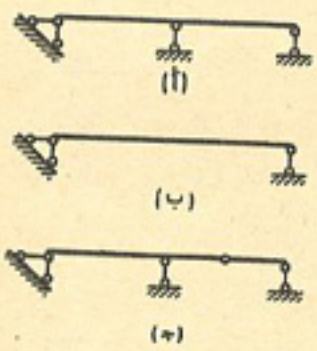
وتعتبر الإنشاءات غير المحددة استاتيكيًّا ، نوعا مهما من أنواع الإنشاءات الإطارية المستقرة هندسيًّا ، وتستخدم على نطاق واسع فى مجالات عديدة من

الفروع الهندسية والإنشائية الحديثة .

ويبدأ حساب الإنشاءات غير المحددة استاتيكيًّا ، بتحليل رسومها التخطيطية . وهذا التحليل ضرورى قبل كل شئ ، لتحديد درجة عدم التحديد الاستاتيكى (أى لإيجاد عدد القوى الإضافية المجهولة) .

إن درجة عدم التحديد الاستاتيكى ، تساوى عدد الأربطة الإضافية أو الزائدة* ، التى تؤدى إزالتها (رفعها) إلى تحويل الإنشاء غير المحدد استاتيكيًّا ، إلى إنشاء محدد استاتيكيًّا ومستقر هندسيًّا . أن الإنشاء المستقر هندسيًّا ، هو ذلك الإنشاء الذى لا يمكن أن يتغير شكله ، إلا نتيجة لتشوه (انحراف) قطعه .

ولا يحتوى الإنشاء المحدد إستاتيكيًّا ، على أى رباط زائد عن الحاجة ، إذ أن إزالة أى رباط واحد من أربطته ، تؤدى إلى تحويله إلى إنشاء غير مستقر هندسيًّا ، أى إلى إنشاء ذى درجة معينة من الحركة .

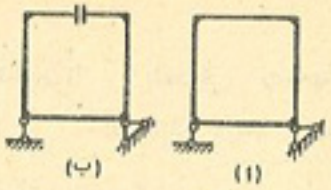


الشكل ٧ – ١

إن العتبة المبينة الشكل (٧ – ١ ، أ) ، هى عبارة عن إنشاء غير محدد استاتيكيًّا من الدرجة الأولى ، وذلك لأن أحد قضبانه الساندة ، يمثل رباطاً زائداً (فائضاً) عن الحاجة ، يربط الإنشاء مع الأرض (الأساس) . وإذا أزلنا أحد قضبانها الساندة (شكل ٧ – ١ ، ب) أو أضفنا إليها مفصلة أخرى (شكل ٧ – ١ ، ج) ، لحصلنا على عتبة محددة استاتيكيًّا ومستقرة هندسيًّا .

إن الإطار المغلق ، المبين فى الشكل (٧ – ٢ ، أ) يمثل إنشاءا غير محدد

* يقصد بالرباط فى علم الميكانيكا الإنشائية ، كل عائق أو مانع ، يحول دون التغير المتبادل لموضع نقاط أو مقاطع الإنشاء . ويجب أن نفهم بأن « الرباط الزائد » يقصد به « الرباط الفائض عن الحاجة » ولا يقصد به « الرباط غير الضرورى »



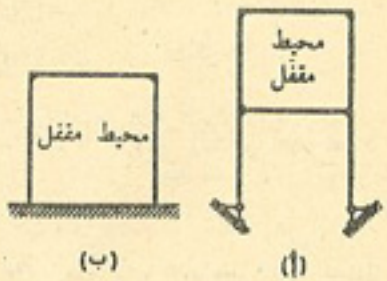
الشكل ٧ – ٢

استاتيكيا من الدرجة الثالثة ، وذلك لأن تحويله إلى إنشاء محدد استاتيكيًّا يتطلب ، على سبيل المثال ، قطع أحد قضبانه ، كما مبين فى الشكل (٧ – ٢ ، ب) ، وبذلك نزيل ثلاثة أربطة داخلية زائدة عن الحاجة . إن ردود فعل هذه الأربطة الداخلية هى : القوة الطولية ، قوة القص وعزم الانحناء ، المؤثرة فى موضع القطع . ولا يمكن إيجاد قيم ردود الفعل هذه ، بواسطة المعادلات الإستاتيكية . أن أى إطار مقفل آخر ، ذى وصلات جاسئة ، فى نفس المستوى ، يعتبر كذلك إنشاء غير محدد إستاتيكيًّا ، من الدرجة الثالثة .

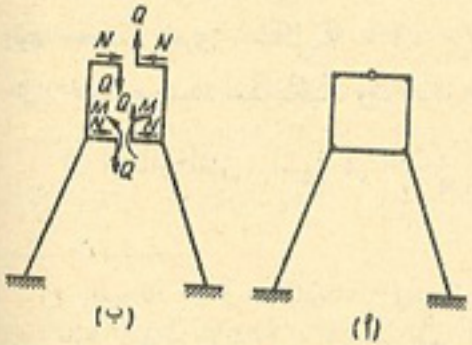
إن المحيط (contour) المؤلف من عدد من القطع أو القضبان (المستقيمة أو المنحنية) ، المربوطة مع بعضها بوصلات جاسئة (بدون مفصلات) ، التى تشكل حلقة مقفلة ، يسمى بالمحيط المقفل .

ومن أمثلة الإنشاءات ذات المحيط الواحد المقفل ، هو الإنشاء المبين فى الشكل (٧ – ٣ ، أ) . ويعتبر الإطار الجاسىء غير المتصل بمفصلات (شكل ٧ – ٣ ، ب) ، محيطاً مقفلاً أيضاً ، وهو محدد من الأسفل بالأساس ، الذى يمكن اعتباره بمثابة قضيب لا نهائى الجسوءة .

وفى الإنشاء الإطارى المبين فى الشكل (٧ – ٤ ، أ) ، نجد أن المحيط



الشكل ٧ – ٣



الشكل ٧ – ٤

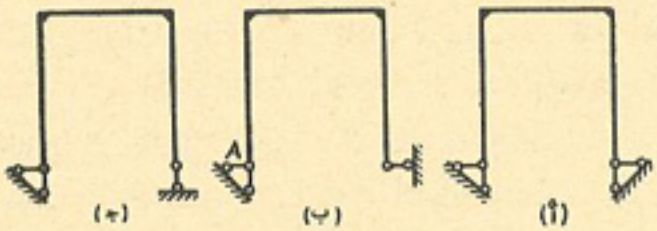
العلوى مزود بمفصلة واحدة ، ويؤثر فى المقطع الذى يمر فى هذه المفصلة ، إجهادان داخليان فقط ، هما N و Q (شكل ٧ – ٤ ، ب) . إن هذا المحيط غير محدد إستاتيكيًّا من الدرجة الثانية . وإذا أخذنا الإنشاء بأكمله فى الاعتبار ، فسوف نجد بأنه غير محدد إستاتيكيًّا من الدرجة الخامسة ، وذلك لأن المحيط السفلى مقفل ، وبالتالى يكون غير محدد استاتيكيا من الدرجة الثالثة . ويمكن تمثيل الإنشاء الخالى (المحرر) من الأربطة الداخلية الزائدة ، على هيئة عمودين مثبتين من القاعدة تثبيتاً جاسئاً ، مع كابولين أفقيين من الأعلى ، كما مبين فى الشكل (٧ – ٤ ، ب) .

ولتوضيح درجة عدم التحديد الاستاتيكى لهذا الإنشاء ، يمكن اتباع أسلوب آخر يختلف قليلا عما سبق . إن المحيط العلوى للإطار ، المتصل بمفصلة داخلية واحدة ، غير محدد استاتيكيًّا من الدوجة الثانية (أى يحتوى على رباطين زائدين عن الحاجة) . وبالإضافة إلى ذلك ، نجد أن لكل طرف مبيت من الإنشاء المذكور ، ثلاث مركبات لرد فعل المسند (قوتان وعزم واحد) ، أى أن الإطار مربوط بستة أربطة خارجية ، كما أن عدد معادلات التوازن الاستاتيكى ، التى يمكن وضعها للإنشاء المستوى ، هو ثلاث معادلات فقط . إذن يصبح لدينا ثلاثة أربطة زائدة ، ومجموع الأربطة الزائدة الكلى ، هو خمسة أربطة ، أى أن الإنشاء غير محدد إستاتيكيًّا من الدرجة الخامسة .

ومن الضرورى الإشارة إلى أن إزالة أو رفع الأربطة الزائدة ، لتحويل الإنشاء الواحد من إنشاء غير محدد استاتيكيًّا ، إلى إنشاء محدد إستاتيكيًّا ، يمكن أن يتم بطرق مختلفة ، ولكن عدد الأربطة المرفوعة يبقى ثابتاً فى جميع الحالات . وعلى سبيل المثال ، نجد أن تحويل الإنشاءين غير المحددين إستاتيكيًّا ، المبينين فى الشكل (٧ – ١ ، ب ، ج) إلى إنشاءين محددين إستاتيكيًّا ، قد تم برفع المسند المتوسط من الإنشاء الأول ، وبإضافة مفصلة متوسطة إلى الإنشاء الثانى ، أى بإزالة الرباط الذى يمنع الدوران المتبادل لأقسام العتبة ، الواقعة فى كلتا جهتى المفصلة المضافة .

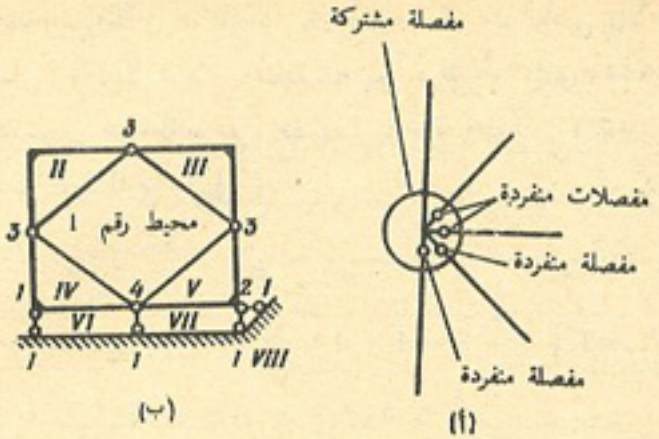
إن إضافة مفصلة إلى وصلة الإطار ، التى يلتقى فيها قضيبان من قضبانه ، أو وضعها فى أى موضع من محور القضيب الواحد ، يؤدى إلى تعطيل (إزالة) رباط واحد ، ويخفض درجة عدم التحديد الاستاتيكى للإنشاء ، بمقدار درجة واحدة . وسوف نسمى مثل هذه المفصلة بالمفصلة البسيطة .

وعند إزالة أو رفع أربطة الإنشاء ، يجب التأكد من كون الإنشاء الناجم ، مستقرًا هندسيًا . وبناء على ذلك ، كنا سنخطىء لو رفعنا من الإطار المبين فى الشكل (٧ — ٥ ، أ) ، المحتوى على رباط زائد عند المسند ، القضيب الرأسى (شكل ٧ — ٥ ، ب) ، وذلك لأن القضبان الساندة الثلاثة الباقية ، كانت ستتقاطع فى النقطة A ، وفى النتيجة لا يمكن أن تعرقل أو تمنع دوران الإطار المذكور ، حول هذه النقطة بالذات . إن الطريقة الصحيحة لرفع القضيب الزائد ، مبينة فى الشكل (٧ — ٥ ، ج) . أما بالنسبة للإنشاءات



الشكل ٧ — ٥

ذات الشكل الداخلى المعقد ، فيمكن اتباع الطريقة العامة التالية ، لتحديد درجة عدم التحديد الإستاتيكى . وهذه الطريقة مبنية على أساس تصورنا ، بأن كل مفصلة مضافة إلى الوصلة التى يلتقى فيها K من القضبان ، تخفض درجة عدم التحديد الإستاتيكى بعدد من الدرجات يساوى $K - 1$ ، وذلك لأن هذه المفصلة ، تعوض عن عدد من المفصلات البسيطة ، قدره $K - 1$ (شكل ٧ — ٦ ، أ) . ولذلك ، لتحديد درجة عدم التحديد الإستاتيكى للإنشاء ، يجب أخذ عدد يساوى ثلاثة أضعاف عدد المحيطات المقفلة للإنشاء (بفرض أن كافة المفصلات ، بما فيها مفصلات المساند ، قد استبدلت



الشكل ٧ — ٦

بوصلات أو اربطة جاسئة) ، ثم يطرح من هذا العدد ، عدد الوصلات البسيطة المضافة إلى الإنشاء ، على أن نعتبر هنا ، بأن كل مفصلة عامة واحدة ، تعادل عدداً من المفصلات البسيطة ، قدره $K - 1$. والآن نضع القاعدة المذكورة هنا ، على هيئة صيغة رياضية ، فنحصل على ما يلى :

$$n = 3m - H \qquad (7 - 1)$$

حيث : n — درجة عدم التحديد الإستاتيكى للإنشاء ؛

m — عدد المحيطات المقفلة للإنشاء ، بفرض عدم وجود وصلات مفصلية ؛

H — عدد المفصلات البسيطة .

وفى هذه الحالة ، تعتبر المفصلة التى توصل بين قضيبين فقط ، بمثابة مفصلة واحدة (مفصلة بسيطة) ، والمفصلة التى توصل بين ثلاثة قضبان ، بمثابة مفصلتين بسيطتين (مفصلة مزدوجة) وإلى آخره .

وعلى سبيل المثال ، يحتوى الإنشاء المبين فى الشكل (٧ — ٦ ، ب) على ٨ محيطات مرقمة بالأرقام الرومانية ، وقد وضع بالقرب من كل مفصلة ،

عدد المفصلات البسيطة ، المناظر لها . ويعتبر القضيبان الرأسى والأفقى معاً ، فى كل زاوية من زوايا الإنشاء ، بمثابة قضيب مرفقى أو زاوى (knee bar) ، وذلك لأن القضيبين مربوطان مع بعضهما بوصلة جاسئة (لا توجد بينهما ، مفصلة) . إذن يكون لدينا ما يلى :

$$m = 8$$

$$H = 3 + 3 + 3 + 4 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 20$$

$$n = 3 \times 8 - 20 = 4$$

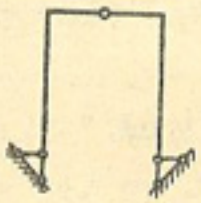
أى أن الإنشاء غير محدد إستاتيكيًّا من الدرجة الرابعة .

وإذا أزلنا رباطاً من أربطة الإنشاء المحدد استاتيكيًّا ، فإن الإنشاء ، يتحول كما ذكرنا سابقاً ، إلى إنشاء غير مستقر هندسيًّا . إذن يحتوى الإنشاء المحدد استاتيكيًّا ، على عدد من الأربطة ، يعتبر أقل عـــدد ضرورى لتأمين استقراره الهندسى ، أما الأربطة الزائدة عن الحاجة (ما فوق العدد المذكور) ، فتؤدى إلى جعل الإنشاء غير محدد إستاتيكيًّا . ويمكن أن نزيل من أى إنشاء غير محدد إستاتيكيًّا ، رباطاً واحداً على الأقل ، بدون أن يختل استقراره الهندسى ، ولكن إزالة أو رفع بعض الأربطة ، قد يؤدى ، إلى تحويل الإنشاء غير المحدد إستاتيكيًّا ، إلى إنشاء غير مستقر هندسيًّا . إن هذه الأربطة تعتبر ضرورية للغاية بالنسبة للإنشاء غير المحدد إستاتيكيًّا . ويمكن دائماً تحديد الإجهادات الناشئة فيها ، باستخدام المعادلات الإستاتيكية وحدها . ومن أمثلة الأربطة الضرورية للغاية ، هى القضبان الرأسية الساندة للإطار ، المبينة فى الشكل (٧ — ٥ ، أ) . إن رفع أى قضيب من هذه القضبان ، يجعل الإطار غير مستقر هندسيًّا .

إن الأربطة التى لا يؤدى رفعها إلى تحويل الانشاء غير المحدد إستاتيكيًّا ، إلى إنشاء غير مستقر هندسيًّا ، تسمى بالأربطة العادية أو الاختيارية . ولا يمكن إيجاد الإجهادات الناشئة فيها ، باستخدام المعادلات الإستاتيكية

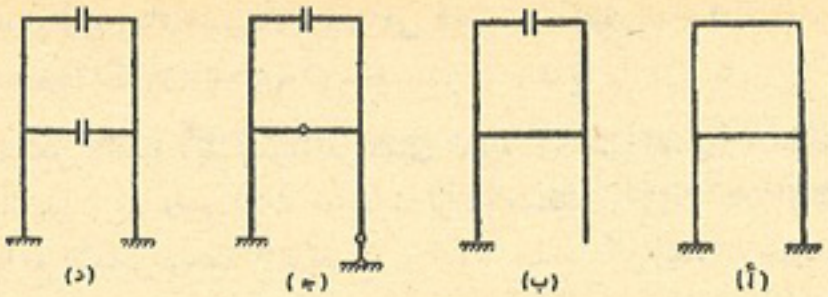
وحدها . ومن أمثلة هذه الأربطة ، هى القضبان الأفقية الساندة للإطار ، المبينة ، فى الشكل (٧ — ٥ ، أ) .

ويمكن بالنسبة لأية مجموعة من القوى الواقعة فى نفس المستوى ، الموجودة فى حالة توازن ، وضع ثلاث معادلات توازن مستقلة . وإذا كان الإنشاء مربوطاً مع الأساس بواسطة ثلاثة قضبان ساندة ، عندئذ يمكن إيجاد الإجهادات الناشئة فيها ، من معادلات التوازن ، بغض النظر عن كون الإنشاء المذكور محدد إستاتيكيًّا أم غير محدد إستاتيكيًّا . ولهذا السبب يسمى الإنشاء المستوى غير المحدد إستاتيكيًّا ، المحتوى على ثلاثة قضبان ساندة (لاحظ مثلا الشكل ٧ — ٢ ، أ) ، يسمى بالإنشاء غير المحدد الاستاتيكيا من الداخل ، وهو محدد إستاتيكيًّا من الخارج ، وذلك لأن جميع ردود فعل المساند ، التى تعتبر بالنسبة للإنشاء بمثابة قوى خارجية ، يمكن تحديدها من المعادلات الاستاتيكية . وتكون كافة القضبان الساندة لهذا الإنشاء ، ضرورية للغاية . ويمكن اعتبار الإنشاء المستوى غير المحدد إستاتيكيًّا ، المحتوى على أكثر من ثلاثة قضبان ساندة ، بمثابة إنشاء غير محدد إستاتيكيًّا من الداخل أو من الخارج أو من الداخل والخارج فى نفس الوقت ، وذلك تبعاً لمواقع الأربطة التى تعتبر زائدة عن الحاجة فى هذا الإنشاء . وعلى سبيل المثال ، يمكن اعتبار الإطار غير المحدد إستاتيكيًّا من الدرجة الأولى ، المبين فى الشكل (٧—٥ ، أ) ، بمثابة إطار غير محدد إستاتيكيًّا من الخارج ، إذا اعتبرنا الرباط الزائد ، هو القضيب الأفقى الساند الأيمن ، أى إذا حولناه إلى إنشاء (إطار) محدد إستاتيكيًّا ، برفع القضيب المذكور (شكل ٧—٥ ، ج) .



الشكل ٧ — ٧

أما إذا اعتبرنا الرباط الزائد ، هو الرباط الذى يمنع دوران أحد أقسام الإطار حول القسم الآخر ، أى تحويل الإطار إلى إنشاء محدد إستاتيكيًّا ، بوضع مفصلة فى العارضة (شكل ٧ — ٧) ، عندئذ يجب اعتبار الإطار ، بمثابة إطار غير محدد إستاتيكيًّا من الداخل . أن الإطار غير المحدد استاتيكيا من الدرجة السادسة ، المبين فى الشكل (٧ — ٨ ، أ) يمكن أن يعتبر كما يلى : (أ) بمثابة إطار غير محدد إستاتيكيًّا من الخارج ، من الدرجة الثالثة ،



الشكل ٧ – ٨

وغير محدد إستاتيكيًّا من الداخل ، من الدرجة الثالثة ، إذا حولناه إلى الإطار (الإنشاء) المحدد إستاتيكيًّا ، المبين فى الشكل (٧–٨، ب) ، أى برفع ثلاثة أربطة خارجية (طرف مبيّت واحد) وثلاثة أربطة داخلية ، (ب) بمثابة إطار غير محدد إستاتيكيًّا من الخارج ، من الدرجة الثانية وغير محدد إستاتيكيًّا من الداخل ، من الدرجة الرابعة ، إذا حولناه إلى الإطار (الإنشاء) المحدد إستاتيكيًّا ، المبين فى الشكل (٧ – ٨ ، جـ) ، (جـ) بمثابة إطار غير محدد إستاتيكيًّا من الداخل ، من الدرجة السادسة ، إذا حولناه إلى الإطار (الإنشاء) المحدد إستاتيكيًّا (وبعبارة أدق إذا حولناه إلى إنشاءين محددين إستاتيكيًّا) ، المبين فى الشكل (٧ – ٨ ، د). ولا يمكن اعتبار هذا الإطار ، بمثابة إطار غير محدد إستاتيكيًّا من الخارج فقط ، وذلك لأنه يحتوى على ستة أربطة زائدة عن الحاجة ولا يمكن رفع أكثر من ثلاثة أربطة ساندة من هذا الإطار (وإلا أصبح الإطار غير مستقر هندسيًّا) : ولهذا السبب لا يمكن تحويل هذا الإطار إلى إطار غير محدد إستاتيكيًّا ، بدون رفع (إزالة) الأربطة الداخلية :

البند ٧ – ٢ : المعادلات القانونية المستنتجة من طريقة القوى

ذكرنا فى البند السابق بأن تحديد الإجهادات فى الإنشاء غير المحدد إستاتيكيًّا ، يرتبط بضرورة وضع معادلات إضافية – معادلات انفعالات (انحرافات) الإنشاء. ولهذا الغرض يجب قبل كل شىء ، تحويل الإنشاء المعطى ، غير المحدد إستاتيكيًّا

من الدرجة n ، إلى إنشاء محدد إستاتيكيًّا ، وذلك برفع (إزالة) الأربطة الزائدة عن الحاجة فيه : إن الإنشاء المحدد إستاتيكيًّا ، الذى نحصل عليه بهذه الطريقة ، يسمى بالإنشاء الرئيسى .

إن رفع بعض الأربطة أيًّا كانت لا يغير الإجهادات الداخلية الناجمة فى فى الإنشاء ، وانحرافاته أو انفعالاته ، إذا سلطنا عليه قوى وعزوم إضافية ، تمثل ردود فعل الأربطة المرفوعة . ولهذا السبب إذا تعرض الإنشاء الرئيسى ، بالإضافة إلى الحمل المعين لتأثير ردود فعل الأربطة المرفوعة فسوف تكون انفعالاته وانحرافاته والإجهادات الداخلية الناشئة فيه ، مشابهة لما هى عليه فى الإنشاء المعطى ، أى يصبح هذان الإنشاءان ، متكافئين تماماً .

وفى الإنشاء المعطى ، لا يمكن حدوث أية انحرافات فى اتجاهات الأربطة الجاسئة الموجودة فيه (ومن ضمنها تلك الأربطة التى رفعت عند التحول إلى الإنشاء الرئيسى) . ولهذا السبب يجب أن تكون الانحرافات الناجمة فى الإنشاء الرئيسى فى اتجاهات الأربطة المرفوعة ، مساوية للصفر . إذن يجب أن تكون قيم ردود فعل الأربطة المرفوعة ، هى القيم التى تكون عندها الانحرافات فى اتجاهات الأربطة المذكورة ، مساوية للصفر .

إن الشرط الذى يجعل الانحرافات فى اتجاه أى رباط من الأربطة المرفوعة التى عددها n ، يمكن أن يكتب بالشكل التالى ، استناداً إلى قانون تراكب القوى :

$$\Delta_i = \Delta_{i1} + \Delta_{i2} + \dots + \Delta_{in-1} + \Delta_{in} + \Delta_{ip} = 0 \qquad (7-2)$$

وهنا تشير الرموز الدليلية الأولى ، إلى اتجاه الانحراف (وفى نفس الوقت إلى رقم الرباط المرفوع) ، أما الرموز الدليلية الثانية ، فتشير إلى أسباب الانحراف . وهكذا يجب أن يقرأ الحد Δ_{ik} كما يلى « الانحراف فى اتجاه الرباط i ، الناجم عن رد فعل الرباط k » : والحد Δ_{ip} يعنى الانحراف فى اتجاه الرباط i ، الناجم عن تأثير الحمل المعلوم .

والآن بعد أن نرمز إلى قيمة رد فعل الرباط k (على هيئة قوة أو عزم) بالرمز X_k ونعبر عن الانحراف Δ_{ik} بواسطة وحدات الانحراف باستخدام

المعادلة $\Delta_{ik} = X_k \delta_{ik}$ ، نكتب الشرط أو الصيغة (2 — 7) بالشكل التالى :

$$\Delta_i = X_1 \delta_{i1} - X_2 \delta_{i2} + \dots + X_{n-1} \delta_{i,n-1} + X_n \delta_{in} + \Delta_{ip} = 0 \quad (7-3)$$

وهكذا نجد بأن شرط تكافؤ الإنشائين الرئيسى والمعطى سابقاً ، يفسر رياضياً بمجموعة من المعادلات الخطية يبلغ عددها n ، وترتب كما يلى :

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + \dots \dots + X_n \delta_{1n} + \Delta_1 = 0 \\ X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + \dots \dots + X_n \delta_{2n} + \Delta_{2p} = 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ X_1 \delta_{n1} + X_2 \delta_{n2} + \dots \dots + X_n \delta_{nn} + \Delta_{np} = 0 \end{array}\right\} \quad (7-4)$$

الاضلاع القطرية

الضلع القطرى الاساسى

إن المعادلات رقم (4 — 7) ، هى نفس معادلات التشوهات (الانحرافات) ، التى نستطيع بواسطتها معرفة درجة عدم التحديد الإستاتيكى للإنشاء المعطى. وتعبر المعادلة الأولى من هذه المعادلات ، عن مساواة الانحرافات الحاصلة فى الإنشاء الرئيسى ، فى اتجاه الرباط المرفوع الأول (فى اتجاه القوة أو العزم X_1) للصفر ، وتعبر المعادلة الثانية عن مساواة الانحرافات المذكورة ، فى اتجاه الرباط المرفوع الثانى ، للصفر وهلم جرا .

وتسمى المعادلات (4 — 7) بالمعادلات القانونية المستنتجة من طريقة القوى . وتدل هذه التسمية أولا على أن هذه المعادلات تكتب طبقاً لمبدأ (قانون) معين ، وثانياً تدل على أن المجاهيل الموجودة فى المعادلات ، هى القوى التى تمثل ردود فعل الأربطة المرفوعة . وعدد المعادلات يساوى عدد الأربطة المرفوعة ، أى يساوى درجة عدم التحديد الإستاتيكى للإنشاء المعلوم .

وتجدر الإشارة إلى أن شكل المعادلات القانونية ، أى عدد الحدود فى كل

منها والعدد الكلى لهذه المعادلات ، لا يحدد إلا بدرجة عدم التحديد الإستاتيكى للإنشاء ، ولا يعتمد على خواص الانشاء المميزة .

إن المعاملات (العوامل) الملحقة بمجاهيل مجموعة المعادلات القانونية رقم (4 — 7) ، تمثل انحرافات الإنشاء الرئيسى (البسيط) الناجمة عن تأثير وحدات القوى أو العزوم ، فى اتجاهات الأربطة المرفوعة . وتعتمد القيم العددية لهذه المعاملات على الرسم التخطيطى للإنشاء وأبعاده ومادته .

إن معامل مجموعة المعادلات القانونية δ_{ik} ، يمثل الانحراف فى اتجاه i ، الناجم عن تأثير وحدة القوة (وحدة الحمل أو العزم) ، فى اتجاه k . إن وحدات الإزاحة δ_{ii} ، الموضوعة على امتداد القطر الرئيسى لمجموعة المعادلات القانونية ، التى لها دليلان رمزيان متماثلان ، تسمى بوحدات الإزاحة الرئيسية وذلك لتمييزها عن الإزاحات الثانوية δ_{ik} ، الخارجة عن هذا القطر ، والتى لها دلائل رمزية مختلفة . إن الإزاحات الثانوية ، الموضوعة حول القطر الرئيسى بالتماثل ، تساوى بعضها البعض ، وذلك طبقاً لنظرية الانحرافات المتبادلة (نظرية ماكسويل) ، وخاصة كما يلى :

$$\delta_{ik} = \delta_{ki}^{*}$$

وهذه الحالة تقلل عدد العمليات الحسابية عند تحديد معاملات المعادلات القانونية . ويتم حساب وتحديد المعاملات بطريقة تحديد الانحرافات فى الإنشاء الرئيسى ، فى اتجاهات المجاهيل X ، الناجمة عن تأثير وحدات القوى أو العزوم ،

---

* إن مقياس وحدة الانحراف δ_{ik} ، هو مقياس النسبة بين الانحراف فى اتجاه القوة i والقوة k . وطبقاً لذلك نجد بأن مقياس* وحدة الانحراف الخطى الناجم عن تأثير وحدة القوة ، هو سم/ كجم $\left(\frac{\text{م}}{\text{طن}} \text{ وهلم جرا}\right)$ ، والناجم عن تأثير وحدة العزم هو $\frac{\text{سم}}{\text{كجم سم}} = \frac{1}{\text{كجم}}$. ومقياس وحدة الانحراف الزاوى (الإزاحة الزاوية) ، الناجم عن وحدة القوة هو $\frac{1}{\text{كجم}}$ ، والناجم عن وحدة العزم هو $\frac{1}{\text{كجم سم}}$.

المسلطة فى اتجاهات هذه المجاهيل . وأفضل شىء هو تحديد هذه المعاملات من صيغة الانحرافات بالطرق المشروحة فى الفصل السادس .

ولحساب الانحرافات ينصح بتخطيط الرسوم البيانية التخيلية لعزوم الانحناء $\overline{M}_i$ فى الإنشاء الرئيسى (أى الرسوم البيانية الناجمة عن تأثير القوة $X_i = 1$) ، على أن يوضع على كل منها الرقم المناظر للقوة المجهولة (الرباط المرفوع) . ويجب أن يخطط على انفراد ، الرسم البيانى للتحميل الحقيقى (الرسم البيانى للعزم M_p) . وتحسب وحدة الانحراف (وحدة الإزاحة) δ_{ik} بضرب وحدة الرسم البيانى للعزم $\overline{M}_i$ فى الرسم البيانى للعزم $\overline{M}_k$ ، أما الانحراف الناجم عن تأثير الحمل Δ_{ip} ، فيحسب بضرب وحدة الرسم البيانى (التخيلى) للعزم $\overline{M}_i$ فى الرسم البيانى للتحميل الحقيقى M_p* .

والانحرافات الرئيسية تكون فى الحقيقة موجبة ، أما الانحرافات الثانوية والانحرافات الناجمة عن تأثير الحمل ، فيمكن أن تكون إما موجبة أو سالبة .

وبعد حساب وتحديد كافة وحدات الانحراف ، التى تمثل معاملات المجاهيل فى مجموعة المعادلات القانونية ، وكذلك الحدود التى تمثل الانحرافات الناجمة عن تأثير الأحمال ، نقوم بحل المعادلات ، ونحدد بالنتيجة قيم المجاهيل : ثم نخطط الرسوم البيانية لعزوم الانحناء فى الإنشاء الرئيسى ، الناجمة عن تأثير كل قوة من القوى المستخرجة ، أى عن تأثير القوى X_1 ، X_2 ، ... ، X_i ، ... ، X_n. ويمكن لهذا الغرض استخدام الرسوم البيانية التخيلية (وحدات الرسوم البيانية) المخططة سابقاً ، التى يجب الآن ضرب جميع إحداثياتها الرأسية ، فى القيم المستخرجة المناظرة للمجاهيل .

ونحصل على الرسم البيانى النهائى (الكلى) لعزوم الانحناء فى الإنشاء غير المحدد إستاتيكياً المعلوم ، بجمع الإحداثيات الرأسية المارة فى النقاط المميزة (على

---

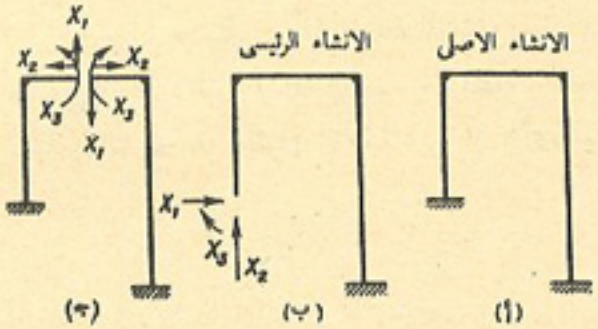
* يهمل تأثير القوى الطولية وقوى القص . وعند حساب تأثير هذه القوى ، يجب كذلك ضرب الرسم البيانى لقوى القص Q فى الرسم البيانى للقوى الطولية N .

امتداد الإنشاء المبحوث بأكمله) للرسوم البيانية الناجمة عن تأثير كافة القوى X ، والإحداثيات الرأسية للرسم البيانى للتحميل الحقيقى .

ويمكن تخطيط الرسم البيانى النهائى لعزوم الانحناء ، بالطريقة التالية : نسلط على الإنشاء الرئيسى القوى (الإجهادات) المجهولة المستخرجة والحمل المعلوم ، ثم نخطط الرسم البيانى النهائى لعزوم الانحناء ، الناجم عن التأثير الموحد للقوى (الإجهادات) المذكورة ، بالطرق العادية المعروفة .

ولحساب نفس الإنشاء الواحد ، يمكن استخدام إنشاءات رئيسية (بسيطة) مختلفة . ويجب أن نختار من هذه الإنشاءات ، الإنشاء الأكثر ملاءمة من الناحية العملية . وفى هذه الحالة يجب أن نحاول جعل أكبر عدد ممكن من الانحرافات الثانوية δ_{ik} مساويا أو متحولا إلى الصفر ، وجعل شكل الرسوم البيانية لعزوم الانحناء ، للإنشاء الرئيسى أبسط ما يمكن .

وسوف نبحث ، على سبيل المثال ، عدة أوجه للإنشاء الرئيسى (البسيط) ، التى يمكن بواسطتها حساب الإطار المبين فى الشكل (٧ — ٩ ، أ) . وإذا رفعنا ثلاثة من الأربطة التى تمنع حدوث الانحرافين الأفقى والرأسى وكذلك تمنع دوران مقطع المسند الأيسر للإطار ، عندئذ سيصبح شكل الإنشاء الرئيسى كما هو مبين فى الشكل (٧ — ٩ ، ب) . وستمثل المجاهيل X_1 ، X_2 و X_3 فى هذه الحالة ، ردود فعل الأربطة المرفوعة ، وتعبر المعادلات القانونية عن حالة عدم وجود انحرافات فى اتجاهات هذه الأربطة .



الشكل ٧ — ٩

ويمكن اعتبار الإنشاء المبين فى الشكل (٧ – ٩ ، ج) بمثابة إنشاء رئيسى ، حصلنا عليه بقطع القضيب العلوى للإطار (عارضة الإطار) . ونتيجة لهذا القطع ، فإن هذا الإطار فقد ثلاثة أربطة لا تمنع انحراف ودوران أى مقطع من مقاطع الإطار ، بل تمنع الانحرافين الأفقى والرأسى ودوران المقاطع العرضية المتجاورة فى موضع القطع ، حول بعضها البعض . وبناء على ذلك ، سيكون كل مجهول من المجاهيل X_1 ، X_2 و X_3 مؤلفا من قوتين أو عزمين وليس من قوة واحدة أو عزم واحد . وتكون القوتان المذكورتان متعاكستين فى الاتجاه ، أى سيكون كل مجهول عبارة عن مجهول « جماعى » .

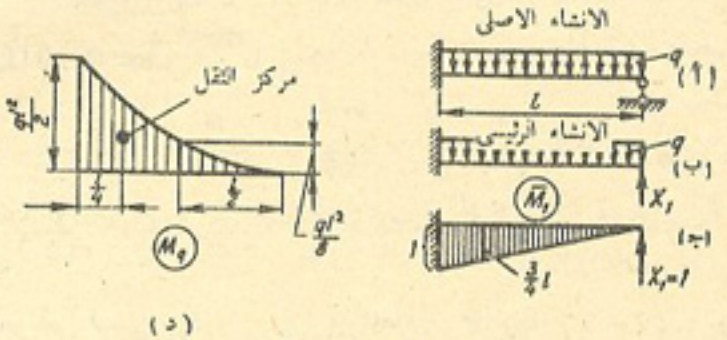
ويبقى شكل مجموعة المعادلات القانونية كما هو عليه ، بغض النظر عن نوع الإنشاء الرئيسى المختار .

وفى حالة الإنشاء الرئيسى المبين فى الشكل (٧ – ٩ ، ب) تعبر المعادلات القانونية عن مساواة انحرافات الطرف الأيسر للإطار ، للصفر . أما فى حالة الإنشاء الرئيسى المبين فى الشكل (٧ – ٩ ، ج) فنجد بأن المعادلات القانونية تعبر عن عدم وجود انحرافات متبادلة للمقاطع العرضية المتجاورة فى موضع القطع ، وفى نفس الوقت لا تنفى إمكانية حدوث الانحرافات الأفقية والرأسية المشتركة لهذه المقاطع ، وكذلك دورانها المشترك .

وبناء على ذلك ، نجد مثلا بأن δ_{12} تمثل بالنسبة للإنشاء الرئيسى المبين فى الشكل (٧ – ٩ ، ب) ، الانحراف الأفقى لطرف الإطار الأيسر ، الناجم عن تأثير وحدة الحمل الرأسى $X_2 = 1$. أما بالنسبة للإنشاء المبين فى الشكل (٧ – ٩ ، ج) فنجد أن δ_{12} تمثل تغير المسافة الرأسية بين المقاطع المتجاورة فى موضع القطع ، وهو التغير الناجم عن القوى الأفقية $X_2 = 1$ (أى عن القوة الأفقية الجماعية) .

البند ٧ – ٣ : حساب أبسط الإنشاءات غير المحددة إستاتيكيا

لإيضاح تتابع عملية حساب الإنشاءات غير المحددة إستاتيكيًا ، سوف نبحث العتبة غير المحددة إستاتيكيًا ، المبينة فى الشكل (٧ – ١٠ ، أ) .



الشكل ٧ – ١٠

نعتبر العتبة ذات الطرف الأيسر الثابت ، المبينة فى الشكل (٧ – ١٠ ، ب) بمثابة إنشاء رئيسى . وقد حصلنا عليها من الإنشاء المعلوم ، برفع رباط واحد فقط ، وهو المسند المفصلى المتحرك الأيمن بالذات . وبالتالى تكون العتبة المعلومة ، غير محددة إستاتيكيًا من الدرجة الأولى .

نسلط على الإنشاء الرئيسى ، رد الفعل المجهول لحد الآن X_1 التابع للمسند الأيمن ، والحمل المعلوم q (شكل ٧ – ١٠ ، ب) .

ونكتب المعادلة القانونية ، المعبرة عن شرط تكافؤ الإنشاء الرئيسى والإنشاء المعلوم ، وهى :

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1q} = 0 \qquad (7-5)$$

ويتضح من هذه المعادلة بأنه لا يوجد أى انحراف فى اتجاه المسند المرفوع .

ولتحديد قيمة X_1 يجب حساب المعامل δ_{11} ، والحد الخاص بالأحمال Δ_{1q} .

ويمثل المعامل δ_{11}، الانحراف الحاصل فى الإنشاء الرئيسى فى اتجاه X_1 ، الناجم عن تأثير وحدة الحمل $X_1 = 1$ (شكل ٧ – ١٠، ج)، ونحدده بضرب وحدة الرسم البيانى للعزم $\overline{M}_1$ ، الناجم عن تأثير وحدة الحمل $X_1 = 1$، فى الرسم البيانى للعزم $\overline{M}_1$ (شكل ٧ – ١٠ ، ج) . ولحساب قيمة Δ_{1q} (الانحراف فى اتجاه X_1 ، الناجم عن الحمل المعلوم) ، يجب ضرب نفس وحدة الرسم البيانى للعزم $\overline{M}_1$ فى الرسم البيانى لعزوم الانحناء $\overline{M}_q$ الناجم عن تأثير الأحمال (شكل ٧ – ١٠ ، د) .

وبهذا الشكل نحصل على ما يلى :

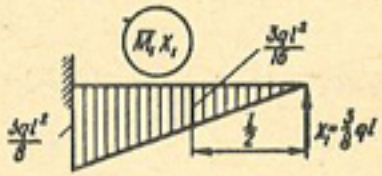
$$\delta_{11} = l \times \frac{l}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{l}{EJ} = \frac{l^3}{3EJ}$$

$$\Delta_{1q} = -\frac{1}{3} \times \frac{ql^2}{2} \times l \times \frac{3}{4} \times \frac{l}{EJ} = -\frac{ql^4}{8EJ}$$

وبتعويض قيمتى δ_{11} و Δ_{1q} فى المعادلة القانونية (5 – 7) ، وحل هذه المعادلة لاستخراج قيمة X_1 ، نحصل على ما يلى :

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1q}}{\delta_{11}} = \frac{3}{8} ql$$

وللحصول على الرسم البيانى النهائى لعزوم الانحناء فى العتبة غير المحددة إستاتيكيًا المعلومة ، نضاعف قيمة كافة الإحداثيات الرأسية لوحدة الرسم البيانى للعزم $\overline{M}_1$ بمقدار X_1 من المرات (شكل ٧ – ١١) ، ونضعها مع الإحداثيات الرأسية للرسم البيانى للتحميل M_q (شكل ٧ – ١٠ ، د).



الشكل ٧ – ١١

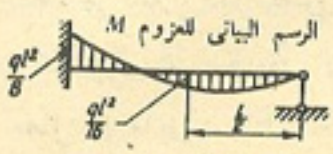
وعلى سبيل المثال ، نجد أن الإحداثى الرأسى للرسم البيانى النهائى للعزوم M ، فى وسط باع العتبة ، يساوى ما يلى :

$$M = \overline{M}_1 X_1 + M_q = \frac{3}{16} ql^2 - \frac{ql^2}{8} = \frac{ql^2}{16}$$

أما فى طرف العتبة المبيت (الثابت) فنجد بأن الإحداثى الرأسى للرسم البيانى النهائى للعزوم M ، يساوى ما يلى :

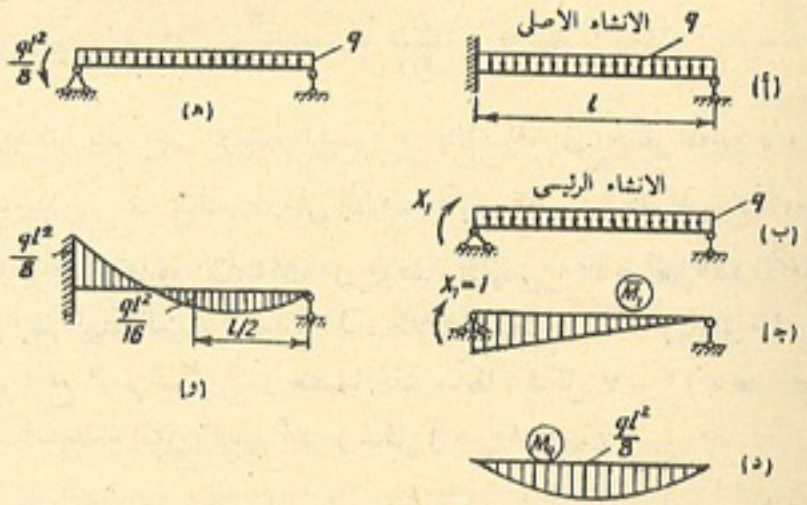
$$M = \overline{M}_1 X_1 + M_q = \frac{3}{8} ql^2 - \frac{ql^2}{2} = -\frac{ql^2}{8}$$

والرسم البيانى النهائى لعزوم الانحناء ، مبين فى الشكل (٧ – ١٢) . وهنا نلاحظ بأنه لتحديد موضع نقطة انحناء الرسم البيانى للعزوم M ، وحساب الإحداثى الرأسى المناظر ، يكون من الأفضل أولا تخطيط الرسم البيانى لقوى القص Q . إن القيمة الصفرية للإحداثى الرأسى للرسم البيانى لقوى القص Q ، تناظر كما هو معروف ، نقطة انحناء الرسم البيانى لعزوم الانحناء M .



الشكل ٧ – ١٢

ويمكن حساب نفس هذه العتبة (شكل ٧ – ١٠ ، أ وشكل ٧ – ١٣ ، أ) باستخدام إنشاء رئيسى آخر أيضا ، مثل الإنشاء الرئيسى الناجم عن الإنشاء المعلوم بعد رفع أربطة الطرف الأيسر ، التى تمنع دوران المقطع العرضى لمسند العتبة الأيسر .



الشكل ٧ – ١٣

ومثل هذا الإنشاء الرئيسى مبين فى الشكل (٧ – ١٣ ، ب) . إن وحدة الرسم البيانى للعزم $\overline{M}_1$ فى الإنشاء الرئيسى ، الناجمة عن تأثير العزم المجهول $X_1 = 1$ ، المسلط على الطرف الأيسر للعتبة (فى اتجاه الرباط المرفوع) ، مبينة فى الشكل (٧ – ١٣ ، جـ) ، أما الرسم البيانى لعزوم الانحناء M_q فى الإنشاء الرئيسى ، الناجم عن تأثير الحمل المعلوم ، فهو مبين فى الشكل (٧ – ١٣ ، د) .

وبضرب الرسم البيانى $\overline{M}_1$ (شكل ٧ – ١٣ ، جـ) فى الرسم البيانى M_1 ، نحصل على ما يلى :

$$\delta_{11} = 1 \times l \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3\,E\,J} = \frac{l}{3\,E\,J}$$

وبضرب الرسم البيانى $\overline{M}_1$ (شكل ٧ – ١٣ ، جـ) فى الرسم البيانى M_q (شكل ٧ – ١٣ ، د) نحصل على ما يلى :

$$\Delta_{1q} = \frac{ql^2}{8} \times l \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2\,E\,J} = \frac{ql^3}{24\,E\,J}$$

ونحصل من المعادلة القانونية (5 – 7) على ما يلى :

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1q}}{\delta_{11}} = -\frac{ql^2}{8}$$

وهكذا يؤثر على الإنشاء الرئيسى ، بالإضافة إلى الحمل المعلوم q ، العزم $X_1 = \frac{-ql^2}{8}$ ، المسلط على الطرف الأيسر للعتبة (شكل ٧ – ١٣ ، هـ) . إن الرسم البيانى لعزوم الانحناء M فى الإنشاء الرئيسى ، الناجم عن هذه الأحمال ، يمثل الرسم البيانى لعزوم الانحناء M ، للإنشاء المعلوم أيضاً . وينطبق هذا الرسم البيانى ، مع الرسم البيانى الذى حصلنا عليه سابقا (شكل ٧ – ١٢) عند حساب العتبة باستخدام إنشاء رئيسى آخر (شكل ٦ – ١٠ ، ب) :

وعلى أساس هذا المثال المبحوث ، يمكن وضع النظام التالى لحساب الإنشاءات غير المحددة إستاتيكياً :

١ – يختار الإنشاء الرئيسى المحدد إستاتيكيا ، بطريقة رفع الأربطة الزائدة من الإنشاء المعلوم .

٢ – يعوض عن تأثير الأربطة المرفوعة ، بتسليط إجهادات مجهولة على الإنشاء الرئيسى (قوى أو عزوم) .

٣ – توضع المعادلات القانونية (4 – 7) ، التى يتضح منها بأن الانحرافات الكلية فى الإنشاء الرئيسى ، فى اتجاهات الإجهادات أو القوى المجهولة ، الناجمة عن تأثير هذه الإجهادات والأحمال بالذات ، تساوى صفرا .

٤ – يعرض الإنشاء الرئيسى لتأثير وحدات القوى التالية على التوالى : $X_1 = 1$ ، $X_2 = 1$ ، ... ، $X_n = 1$ ، ثم تخطط وحدات الرسوم البيانية $\overline{M}_i$ الناجمة عن كل وحدة من وحدات القوى المذكورة على انفراد . ويخطط ، بالإضافة إلى ذلك ، الرسم البيانى لعزوم الانحناء M_p* الناجم عن تأثير الأحمال الحقيقية .

٥ – وبضرب وحدات الرسوم البيانية فى بعضها البعض ، يتم حساب كافة المعاملات δ_{ik} الملحقة بمجموعة المعادلات القانونية .

٦ – وبضرب وحدات الرسوم البيانية (الرسوم البيانية التخيلية) فى الرسم البيانى للتحميل الحقيقى ، نحصل على الحدود Δ_{ip} التابعة لمجموعة المعادلات القانونية .

٧ – تحل مجموعة المعادلات القانونية ، ونحصل منها على قيم القوى المجهولة X_1 ، X_2 ، ... ، X_n .

٨ – وللحصول على الرسم البيانى النهائى لعزوم الانحناء ، تضرب الإحداثيات الرأسية لكل وحدة رسم بيانى من الرسوم البيانية ، فى القيمة المستخرجة المناظرة للقوة المجهولة ، وتجمع كافة النتائج مع بعضها (فى نقاط منفردة من محاور الإنشاء) ، وتضاف إليها الإحداثيات الرأسية للرسم البيانى للتحميل الحقيقى الناجم عن

---

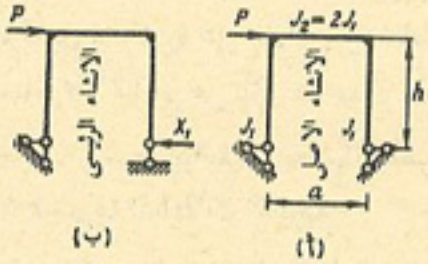
* سنبحث حالة حساب الإنشاءات ، التى يمكن فيها إهمال تأثير القوى الطولية وقوى القص . أما إذا لم نستطع إهمال تأثير هذه القوى ، عندئذ نخطط بنفس الطريقة ، وحدات الرسوم البيانية لقوى القص $\overline{Q}_i$ ولقوى الطولية $\overline{N}_i$ ، والرسوم البيانية لقوى القص Q_p ولقوى الطولية N_p ، الناجمة عن التحميل الحقيقى .

تأثير العزوم*. أو تسلط على الإنشاء الرئيسى ، الإجهادات المجهولة المستخرجة والحمل المعلوم، ثم يخطط الرسم البيانى لعزوم الانحناء ، الناجم عن تأثيرها المشترك، وسيكون بمثابة الرسم البيانى النهائى للإنشاء المعلوم .

وسوف نبحث فيما يلى عدداً من أمثلة حساب أبسط الإنشاءات غير المحددة إستاتيكياً .

مثال ١ : يطلب تخطيط الرسم البيانى لعزوم الانحناء للاطار المبين فى الشكل (٧ – ١٤ ، أ)

هذا مع العلم بأن عزم القصور الذاتى لعارضة الإطار ، هو ضعف عزم القصور الذاتى للضلع القائم فيه .



الشكل ٧ – ١٤

الحل : إن هذا الإطار غير محدد إستاتيكيا من الدرجة الأولى . ونحصل منه على الإنشاء الرئيسى ، برفع أو إزالة القضيب الساند الأفقى الأيمن. (شكل ٧ – ١٤ ، ب) . أن وحدة الرسم البيانى (الرسم البيانى التخيلى) والرسم البيانى للتحميل الحقيقى لمثل هذا الإنشاء ، قد خططا سابقا (لاحظ الشكل ٦ – ٢٩ ، ب ، جـ) . والآن نكتب المعادلات القانونية التالية :

$$X_1\delta_{11} + \Delta_{1P} = 0$$

ثم نوجد المعامل δ_{11} من المعادلة التالية :

$$\delta_{11} = 2 \times \frac{h^2}{2} \times \frac{2}{3}\, h \times \frac{1}{E J_1} + \frac{h\, a\, h}{2\, E J_1} = \frac{h^2}{6\, E J_1}\,(4h + 3a)$$

---

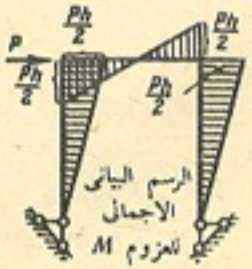
* ينصح بتخطيط الرسوم البيانية الجديدة ، الناجمة عن تأثير كل قوة من القوى المجهولة ، وعدم استخدام وحدات الرسوم البيانية السابقة بتغيير مقاييسها ، لأن ذلك يؤدى إلى الوقوع فى الخطأ .

وقد تم سابقا حساب الحد الخاص بالتحميل (راجع البند ٦ – ٩ ، مثال ٢) :

$$\Delta_{1P} = -\frac{Ph^2}{E J_1}\left(\frac{h}{3} + \frac{a}{4}\right) = -\frac{P\,h^2}{12\,E J_1}\,(4h + 3a)$$

إذن يكون لدينا :

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{P}{2}$$

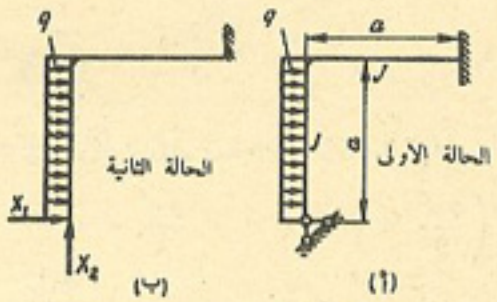


الشكل ٧ – ١٥

وبمضاعفة الإحداثيات الرأسية لوحدة الرسم البيانى بمقدار $\frac{P}{2}$ من المرات ، وجمعها مع الرسم البيانى للتحميل ، نحصل على الرسم البيانى النهائى لعزوم الانحناء ، المبين فى الشكل (٧ – ١٥) .

مثال ٢ : يطلب تخطيط الرسم البيانى لعزوم الانحناء ، للإنشاء المبين فى الشكل (٧ – ١٦ ، أ) .

الحل : إن هذا الإنشاء غير محدد إستاتيكيا من الدرجة الثانية . ونعتبر العتبة المرفقية المثبتة (المبيتة) من طرفها الأيمن (شكل ٧ – ١٦ ، ب) بمثابة الإنشاء الرئيسى .

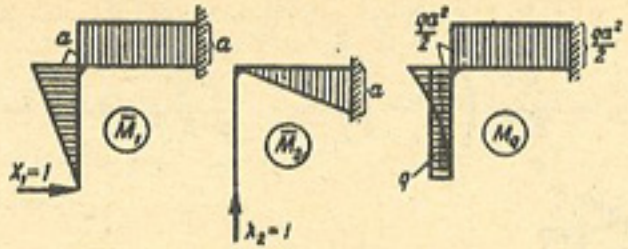


الشكل ٧ – ١٦

والآن نكتب المعادلات القانونية (4 — 7) :

$$X_1\,\delta_{11} + X_2\,\delta_{12} + \Delta_{1q} = 0$$
$$X_1\,\delta_{21} + X_2\,\delta_{22} + \Delta_{2q} = 0$$

ويبين الشكل (٧ – ١٧) وحدات الرسوم البيانية والرسم البيانى لعزوم الانحناء ، الناجم عن تأثير الأحمال الحقيقية ، فى الإنشاء الرئيسى .



الشكل ٧ – ١٧

وبضرب الرسم البيانى لـ $\overline{M}_1$ فى الرسم البيانى $\overline{M}_1$ (أى نضرب الرسم البيانى فى نفسه) نحصل على ما يلى :

$$\delta_{11} = \frac{1}{E\mathcal{J}}\left(\frac{a^2}{2} \times \frac{2}{3}\, a - a^2 \times a\right) = \frac{4\, a^3}{3\, E\mathcal{J}}$$

وبضرب الرسم البيانى لـ $\overline{M}_1$ فى الرسم البيانى لـ $\overline{M}_2$ ، نحصل على ما يلى :

$$\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{1}{E\mathcal{J}}\, a \times a \times \frac{a}{2} = -\frac{a^3}{2\, E\mathcal{J}}$$

وبضرب الرسم البيانى لـ $\overline{M}_2$ فى الرسم البيانى لـ $\overline{M}_2$ (أى نضربه فى نفسه) نحصل على ما يلى :

$$\delta_{22} = \frac{1}{E\mathcal{J}} \times \frac{a^2}{2} \times \frac{2}{3}\, a = \frac{a^3}{3\, E\mathcal{J}}$$

وبضرب الرسمين البيانيين لـ $\overline{M}_1$ و $\overline{M}_2$ على التوالى فى الرسم البيانى لـ M_q ، نحصل على ما يلى :

$$\Delta_{1q} = \frac{1}{E\mathcal{J}}\left(\frac{q\, a^2}{2} \times \frac{a}{3} \times \frac{3}{4}\, a + \frac{q\, a^2}{2} \times a \times a\right) = \frac{5\, q\, a^4}{8\, E\mathcal{J}}$$

$$\Delta_{2q} = -\frac{1}{E\mathcal{J}} \times \frac{q\, a^2}{2} \times a \times \frac{a}{2} = -\frac{qa^4}{4\, E\mathcal{J}}$$

وبتعويض قيم الانحرافات التى حصلنا عليها ، فى المعادلات القانونية ، وتقسيمها على عامل الضرب المشترك $\frac{a^3}{E\mathcal{J}}$ ، نحصل على ما يلى :

$$\frac{4}{3}\, X_1 - \frac{1}{2}\, X_2 + \frac{5}{8}\, qa = 0$$

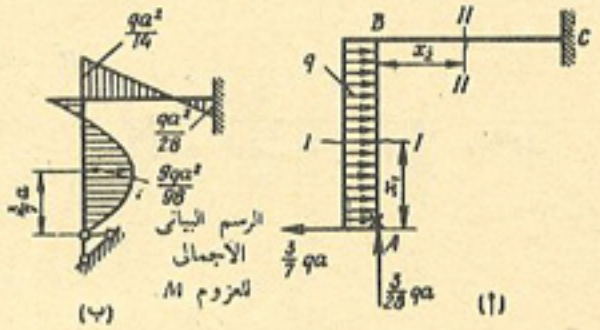
$$-\frac{1}{2}\, X_1 + \frac{1}{3}\, X_2 - \frac{1}{4}\, qa = 0$$

وبحل هاتين المعادلتين نحصل على ما يلى :

$$X_1 = -\frac{3}{7}\, qa$$

$$X_2 = \frac{3}{28}\, qa$$

ولتخطيط الرسم البيانى النهائى لعزوم الانحناء ، نسلط القوى (الإجهادات) المستخرجة على الإنشاء الرئيسى ، ونوجه القوة X_1 من اليمين إلى اليسار ، وذلك لأنه نتيجة لحل المعادلات القانونية ، حصلنا على قيمة سالبة للقوة X_1 (شكل ٧ – ١٨ ، أ) .



الشكل ٧ – ١٨

ونضع الآن معادلات عزوم الانحناء ، لكل قسم من أقسام الإطار على انفراد .

نعتبر الطرف السفلى للضلع القائم للإطار ، بمثابة الطرف الأيسر ونضع عليه علامة تصالبية X .

المقطع $I - I$:

$$M^I = \frac{3}{7}\, q\, a x_1 - \frac{q\, x_1^2}{2}$$

عند $x_1 = 0$ نجد بأن $M^I = 0$

وعند $x_1 = \frac{a}{2}$ نجد بأن $M^I = \frac{3}{7}\, qa\, \frac{a}{2} - \frac{qa^2}{8} = \frac{5}{56}\, qa^2$

وعند $x_1 = a$ نجد بأن $M^I = \frac{3}{7}\, qaa - \frac{qa^2}{2} = -\frac{qa^2}{14}$

والآن نحدد قيمة M^I_{max} . ولهذا الغرض نجعل المشتقة الأولى للمقدار M^I ، بالنسبة لـ x_1 ، مساوية للصفر ، كما يلى :

$$\frac{dM^I}{dx_1} = \frac{3}{7}qa - qx_1 = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$x_1 = x_0 = \frac{3}{7}a$$

و

$$M^I_{max} = \frac{3}{7}qa \times \frac{3}{7}a - \frac{q}{2} \times \frac{9}{49} \times a^2 = \frac{9}{98}qa^2$$

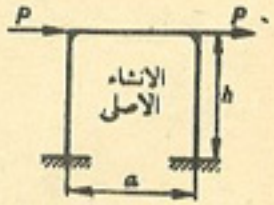
المقطع $II - II$:

$$M^{II} = \frac{3}{28}qax_2 + \frac{3}{7}qa^2 - \frac{qa^2}{2}$$

عند $x_2 = 0$ نجد بأن $M^{II} = -\frac{qa^2}{14}$

وعند $x_2 = a$ نجد بأن $M^{II} = \frac{3}{28}qaa + \frac{3}{7}qa^2 - \frac{qa^2}{2} = \frac{qa^2}{28}$

ويبين الشكل (٧ – ١٨ ، ب) الرسم البيانى النهائى لعزوم الانحناء .

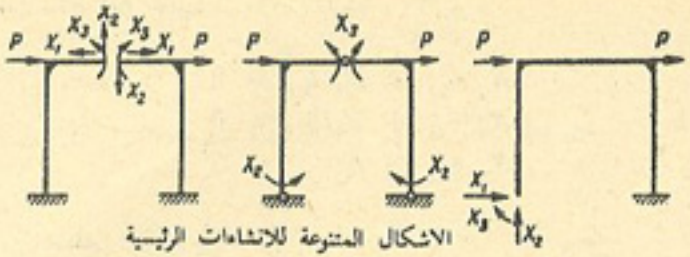


الشكل ٧ – ١٩

مثال ٣ : يطلب تخطيط الرسم البيانى لعزم الانحناء ، للإطار المبين فى الشكل (٧ – ١٩) .

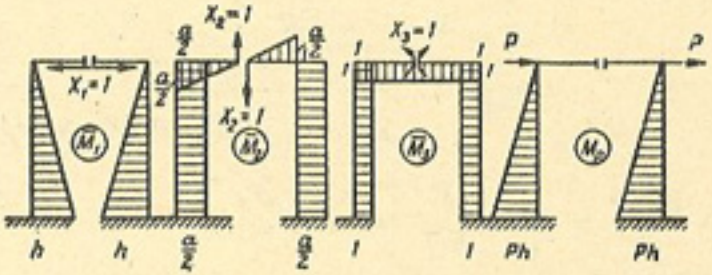
الحل : إن هذا الإطار غير محدد إستاتيكيا من الدرجة الثالثة . والآن نقارن الإنشاءات الرئيسية الثلاثة المبينة فى الشكل (٧ – ٢٠) . إن كل إنشاء من هذه الإنشاءات محدد إستاتيكيا ومستقر هندسياً . ومن الضرورى أن نعلم أن أى إنشاء منها يجعلنا نستخدم أقل عدد ممكن من العمليات الحسابية . ومن وجهة النظر هذه ، ستكون أفضل الإنشاءات ، هى الإنشاءات المتماثلة التصميم ، وذلك لأننا عندئذ سنخطط الرسوم البيانية لنصفها فقط ، ثم نضربها فى بعضها . ولهذا السبب يخرج من المقارنة حالا ، الإنشاء غير المتماثل ، المبين فى الشكل (٧ – ٢٠ ، أ) .

وكلا الإنشاءين المبينين فى الشكل (٧ – ٢٠ ، ب ، ج) متماثلان ، ولكن من الأسهل تخطيط الرسم البيانى للإنشاء الأخير ، ولهذا السبب سنقوم بإجراء الحسابات بالنسبة إليه بالذات .



الشكل ٧ – ٢٠

إن الرسوم البيانية للإنشاء الرئيسى المختار ، مبينة فى الشكل (٧ – ٢١) .



الشكل ٧ – ٢١

والآن نكتب المعادلات القانونية (4 — 7) المعبرة عن شرط عدم وجود انحرافات متبادلة للمقاطع ، فى المقطع المستحدث فى وسط عارضة الإطار :

$$X_1\,\delta_{11} + X_2\,\delta_{12} + X_3\,\delta_{13} + \Delta_{1P} = 0$$
$$X_1\,\delta_{21} + X_2\,\delta_{22} + X_3\,\delta_{23} + \Delta_{2P} = 0$$
$$X_1\,\delta_{31} + X_2\,\delta_{32} + X_3\,\delta_{33} + \Delta_{3P} = 0$$

ونلاحظ قبل كل شىء بأنه يمكن تصنيف جميع الرسوم البيانية (لاحظ الشكل ٧ – ٢١) إلى نوعين : الرسوم البيانية المتماثلة $\overline{M}_1$ ، $\overline{M}_3$ والرسوم البيانية اللامتماثلة $\overline{M}_2$ ، M_p . وفى الرسوم البيانية الأخيرة ، تكون الإحداثيات الرأسية للأقسام اليسرى واليمنى ، متساوية فى القيمة ، ولكنها تقع فى جهات مختلفة من الإطار . ومن السهل أن نلاحظ بأن جميع الانحرافات ، التى عند تحديدها تضرب الرسوم البيانية المتماثلة فى الرسوم البيانية اللامتماثلة ، تساوى صفراً .

وفى هذا المثال ، تكون الانحرافات التالية ، مساوية للصفر ، وهى δ_{12} ، δ_{21} ، δ_{23} ، δ_{32} ، Δ_{1P} و Δ_{3P} .

وهذا السبب يكون شكل مجموعة المعادلات القانونية ، كما يلى :

$$X_1\,\delta_{11} + X_3\,\delta_{13} = 0$$
$$X_1\,\delta_{31} + X_3\,\delta_{33} = 0$$
$$X_2\,\delta_{22} + \Delta_{2p} = 0$$

ونحصل من المعادلتين الأوليين على ما يلى :

$$X_3 = 0 \quad , \quad X_1 = 0$$

وبعد حل المعادلة الثالثة ، نحصل على ما يلى :

$$X_2 = -\frac{\Delta_{2p}}{\delta_{22}}$$

والآن نحسب الانحرافين Δ_{2p} و δ_{22} كما يلى :

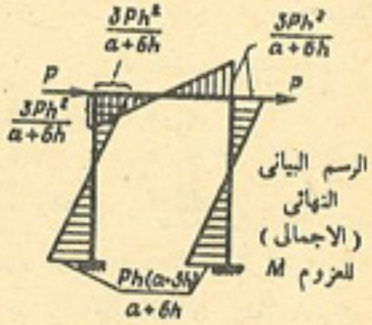
$$\Delta_{2p} = -\frac{2Ph^2}{2} \times \frac{a}{2} \times \frac{1}{EJ} = -\frac{Ph^2 a}{2EJ}$$

$$\delta_{22} = \left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \times h \times \frac{a}{2}\right]\frac{2}{EJ} = \frac{a^2}{12EJ}(a + 6h)$$

إذن يكون لدينا ما يلى :

$$X_2 = \frac{6Ph^2}{a(a + 6h)}$$

وبقى علينا أن نضرب الرسم البيانى لـ $\overline{M}_2$ فى X_2 ، ونجمع النتيجة مع الرسم البيانى للتحميل الحقيقى . ويبين الشكل (٧ – ٢٢) الرسم البيانى النهائى لعزوم الانحناء .

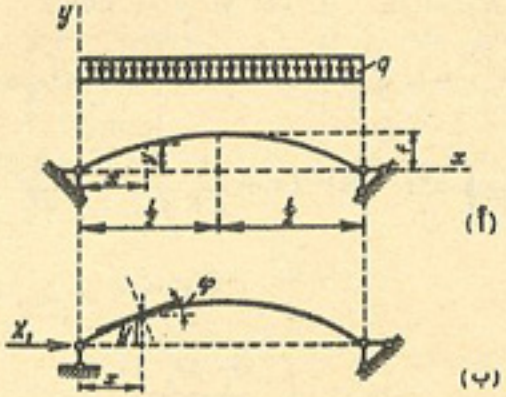


الشكل ٧ – ٢٢

مثال ٤ : يطلب تحديد القوة الدفعية للعقد المتصل بمفصلتين ، المبين فى الشكل (٧ – ٢٣ ، أ) . مع العلم بأن محور العقد مخطط على شكل قطع مكافىء ، معادلته كما يلى :

$$y = \frac{4f}{l^2}(l - x)\,x$$

والعقد من النوع المستوى وذلك لأن $\frac{f}{l} < \frac{1}{5}$ (أى نسبة سهم انحنائه إلى طول باعه أقل من $\frac{1}{5}$) . وجسؤته EJ ثابتة المقدار .



الشكل ٧ – ٢٣

الحل : نعتبر القوة المجهولة هنا هى القوة الدفعية للعقد ، أى المركبة الأفقية لرد فعل المسند الأيسر (شكل ٧ – ٢٣ ، ب) . ثم نكتب المعادلة القانونية :

$$X_1\,\delta_{11} + \Delta_{1p} = 0 \qquad (7-6)$$

ونظراً لتقوس العقد ، لا يمكن حساب تكامل مور بطريقة فيريشاجين ، ويجب فى هذه الحالة حساب التكامل بالطرق العادية للتكامل .

وعند حساب العقد المستوى ، لا تصبح هذه المسألة معقدة ، وذلك لأنه يمكن بخطأ طفيف أن نعتبر بأن $ds = dx$ و $\cos\varphi = 1$ وأخذ التكامل فى الحدود الواقعة بين $x = 0$ و $x = l$. وهنا نجد بأن φ تمثل الزاوية المحصورة بين المماس المار فى النقطة الاختيارية لمحور العقد ، وبين المحور السينى . وبالإضافة إلى ذلك ، عند تحديد الانحراف الناجم فى العقد المستوى نتيجة لتأثير القوة الأفقية ، يجب أخذ تأثير القوة الطولية فى الاعتبار أيضاً .

ولذلك نوجد الانحراف δ_{11} من الصيغة التالية :

$$\delta_{11} = \int_0^s \frac{\overline{M}_1^2\,ds}{EJ} + \int_0^s \frac{\overline{N}_1^2\,ds}{EF}$$

حيث :

$$\overline{M}_1 = -1 \times y = -\frac{4f}{l^2}(l-x)\,x$$

$$\overline{N}_1 = -1 \times \cos\varphi = -\cos\varphi$$

وبالتعويض عن ds بواسطة dx ، واتخاذ $\cos\varphi$ مساويا للواحد ، نحصل على ما يلى :

$$\delta_{11} = \frac{16 f^2}{E J l^4}\int_0^l x^2 (l-x)^2\,dx + \frac{1}{EF}\int_0^l dx = \frac{8}{15}\,\frac{f^2 l}{EJ} + \frac{l}{EF}$$

ونحسب الانحراف Δ_{1p} من الصيغة التالية :

$$\Delta_{1p} = \int_0^s \frac{\overline{M}_1\, M_p\, ds}{E J}$$

حيث :

$$M_p = \frac{q\,l}{2}\,x - q\,\frac{x^2}{2} = q\,\frac{x}{2}\,(l-x)$$

إذن :

$$\Delta_{1p} = \int_0^s -\frac{1}{EJ}\,\frac{4f}{l^2}\,(l-x)\,x \times \frac{q\,x}{2}\,(l-x)\,ds \approx$$

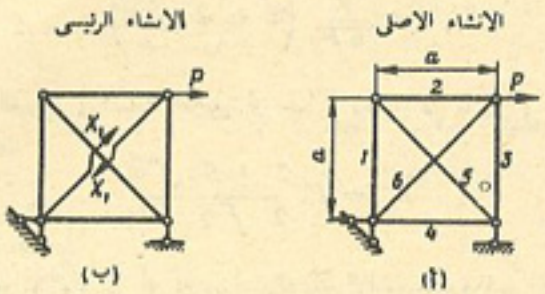
$$\approx -\frac{2qf}{l^2 EJ}\int_0^l (l-x)^2 x^2\,dx = -\frac{2qf}{l^2 EJ}\int_0^l (l^2x^2 - 2lx^3 + x^4)\,dx =$$

$$= -\frac{2qf}{l^2 EJ}\left(l^2 \times \frac{l^3}{3} - 2l \times \frac{l^4}{4} + \frac{l^5}{5}\right) = -\frac{q f l^3}{15 EJ}$$

وبحل المعادلة القانونية (6 — 7) نحصل على الإجهاد المجهول X_1 ، كما يلى :

$$X_1 = \frac{q l^2}{8f + \frac{15}{f} \times \frac{J}{F}}$$

مثال ٥ : يطلب حساب الإجهادات الناشئة فى قطع الإنشاء التشابكى (الجمالون) المبين فى الشكل (٧ — ٢٤ ، أ) . مع العلم بأن مساحات المقاطع العرضية لجميع قطع الإنشاء متساوية . ولا توجد وصلة مشتركة بين القضيبين 5 و 6 .



الشكل ٧ — ٢٤

الحل : إن هذا الإنشاء غير محدد إستاتيكيا من الدرجة الأولى . ونحصل منه على الإنشاء الرئيسى ، بقطع القضيب 6 (شكل ٧ — ٢٤ ، ب) .
ونكتب المعادلة القانونية التالية :

$$X_1\,\delta_{11} + \Delta_{1p} = 0$$

ويمكن تحديد الانحرافين δ_{11} و Δ_{1p} من صيغة الانحراف الخاصة بالإنشاءات التشابكية أو الجمالونية ، كما يلى :

$$\delta_{11} = \Sigma\,\frac{\overline{N}_i^2\, l}{EF} = \frac{1}{EF}\,\Sigma\, N_i^2\, l$$

و

$$\Delta_{1p} = \Sigma\,\frac{\overline{N}_i\, N_p\, l}{EF} = \frac{1}{EF}\,\Sigma\,\overline{N}_i\, N_p l$$

حيث $\overline{N}_i$ — الإجهادات الناشئة فى القضبان ، نتيجة لتأثير الحمل $X_1 = 1$ ؛
N_p — الإجهادات الناشئة فى القضبان نتيجة لتأثير الحمل الخارجى P ، المؤثر فى الإنشاء الرئيسى .

ولحساب قيم الانحرافين Δ_{1p} و δ_{11} نضع الجدول (٧ — ١) ، الذى لا يحتوى على مساحات المقاطع العرضية للقضبان ، وذلك لأنها متساوية بالنسبة لجميع القضبان .

وبناء على أساس الجدول (٧ – ١) نجد أن الانحرافين Δ_{1P} و δ_{11} يساويان ما يلي :

$$\Delta_{1P} = -\frac{P\,a}{E\,F\,\sqrt{2}}\left(3 + 2\sqrt{2}\right)$$

$$\delta_{11} = \frac{a}{E\,F}\left(2 + 2\sqrt{2}\right)$$

وبتعويض هاتين القيمتين فى المعادلة القانونية ثم حلها ، نحصل على ما يلي :

$$X_1 = P\,\frac{3 + 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2} + 4}$$

ويمكن الآن تحديد الإجهاد فى أى قضيب من قضبان الإنشاء المعلوم غير المحدد إستاتيكيا ، من الصيغة التالية :

$$N_i = N_{iP} + \overline{N}_i\,X_1$$

جدول ٧ – ١

رقم القضيب	l	$\overline{N}_i$	N_P	$\overline{N}_i\,N_P l$	$\overline{N}_i^2 l$
1	a	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	P	$-\frac{P\,a}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{2}$
2	a	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	P	$-\frac{P\,a}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{2}$
3	a	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	$\frac{a}{2}$
4	a	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	P	$-\frac{P\,a}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{2}$
5	$a\sqrt{2}$	1	$-P\sqrt{2}$	$-2\,P\,a$	$a\sqrt{2}$
6	$a\sqrt{2}$	1	0	0	$a\sqrt{2}$
المجموع				$-\frac{P\,a}{\sqrt{2}}(3 + 2\sqrt{2})$	$a(2 + 2\sqrt{2})$

إن الحد الأول من هذه الصيغة يعطى قيمة الإجهاد الناشىء فى قضيب الإنشاء الرئيسى ، نتيجة لتعرضه لتأثير الحمل الخارجى P ، أما الحد الثانى فيعطى قيمة الإجهاد فى ذلك القضيب ، نتيجة

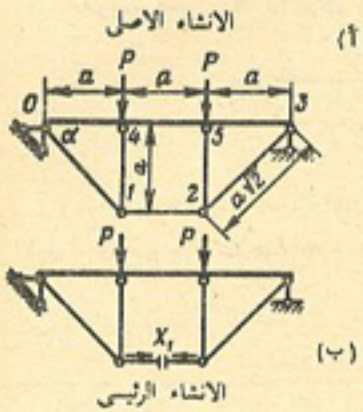
لتعرض الإنشاء الرئيسى لتأثير القوة المجهولة الزائدة عن الحاجة X_1 . وقد وضعت هذه الصيغة على أساس مبدأ تراكب القوى .

ونجد ، على سبيل المثال ، بأن الإجهاد الناشىء فى القضيب رقم 2 يساوى ما يلي :

$$N_2 = N_{2P} + \overline{N}_2\,X_1 = P + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)P\,\frac{3 + 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2} + 4} = P\,\frac{1 + 2\sqrt{2}}{4\,(1 + \sqrt{2})}$$

مثال ٦ : يطلب حساب الإجهادات الناشئة فى الإنشاء الجمالونى (العتبة الجمالونية) ، المبين فى الشكل (٧ – ٢٥ ، أ) .

ويمتاز الإنشاء المبحوث باحتوائه على عتبة رئيسية تغطى الباع ، معرضة فى الغالب للانحناء ، وعلى إنشاء ثانوى يدعم هذه العتبة ، وقطع أو قضبان هذا الإنشاء تسلك نفس سلوك قطع الجمالون ، أى تكون معرضة للانضغاط أو الشد . هذا مع العلم بأن مساحات المقاطع العرضية لهذه القضبان ، متساوية تماماً .

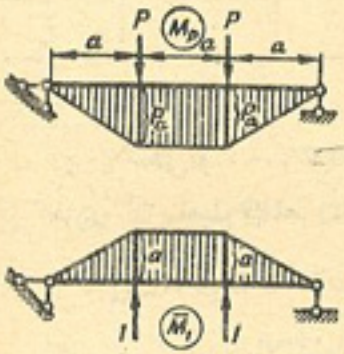


الشكل ٧ – ٢٥

الحل : نحصل على الإنشاء الرئيسى بقطع القضيب 2 — 1 ، كما مبين فى الشكل (٧ – ٢٥ ، ب) . والآن نكتب المعادلة القانونية التالية :

$$X_1\,\delta_{11} + \Delta_{1P} = 0$$

ولحساب المعاملات نخطط الرسوم البيانية لعزوم الانحناء M_P و $\overline{M}_1$ (شكل ٧ – ٢٦) للعتبة الرئيسية ، وبالإضافة إلى ذلك ، نحسب قيم القوى (الإجهادات) الطولية فى قضبان الإنشاء الثانوى (الإضافى). وهنا نجد بأنه عند تعرض القضيب (الشدادة) 2 — 1 لتأثير وحدة الإجهاد $X_1 = 1$ ، تنشأ فى الإضلاع أو القضبان القائمة إجهادات انضغاط طولية مساوية للوحدة ، تنتقل إلى العتبة . والآن نضع الجدول العادى (٧ – ٢) بالنسبة للقضبان الداخلة فى تركيب الإنشاء الثانوى أو الاضافى .



الشكل ٧ – ٢٦

ثم نحسب قيم الإزاحات كما يلي :

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ}\left(\frac{a^2}{2} \times \frac{2}{3}\, a \times 2 + a^2\, a\right) + \frac{1}{EF}\, a\,(3 + 4\sqrt{2}) =$$

$$= \frac{5\, a^3}{3\, E\, J} + \frac{a}{EF}\,(3 + 4\sqrt{2})\ ;$$

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{EJ}\left[\frac{Pa^2}{2}\left(-\frac{2}{3}\right) a \times 2 - P\, a^2\, a\right] = -\frac{5\, P\, a^3}{3\, E\, J}$$

وبتعويض قيمتى δ_{11} و Δ_{1P} فى المعادلة القانونية وحلها ، نحصل على ما يلى :

$$X_1 = \frac{P}{1 + \frac{3}{5} \times \frac{E\, J\,(3 + 4\sqrt{2})}{E\, F a^2}}$$

ويتم تحديد عزوم الانحناء والقوى الطولية فى الإنشاء ، بجمع الإجهادات الناجمة عن تأثير الأحمال ، مع وحدات الإجهادات ، المضاعفة بمقدار X_1 من المرات .

جدول ٧ — ٢

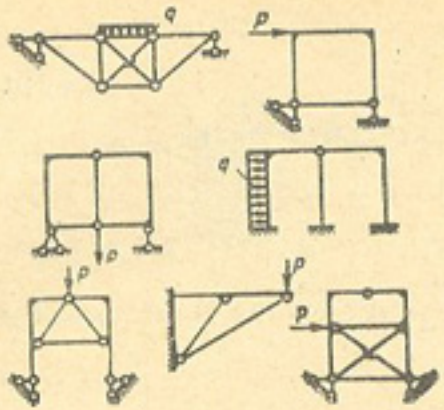
رقم القضيب	l	$\overline{N}_i$	N_P	$\overline{N}_i\, N_P\, l$	$\overline{N}_i^2\, l$
0 — 1	$a\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0	0	$2\,a\sqrt{2}$
1 — 2	a	1	0	0	a
2 — 3	$a\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0	0	$2\,a\sqrt{2}$
1 — 4	a	— 1	0	0	a
2 — 5	a	— 1	0	0	a
المجموع	—	—	—	0	$a\,(3 + 4\sqrt{2})$

ويبين شكل (٧ — ٢٧) الإنشاءات غير المحددة استاتيكيا ، التى نقترح على القارئ أن يبحث النقاط التالية فيها :

١ — إيضاح درجة عدم التحديد الإستاتيكى فيها ،

٢ — تعيين أنواع الإنشاءات الرئيسية واختيار أحسنها ،

٣ — وضع المعادلات القانونية المناظرة ،



الشكل ٧ — ٢٧

٤ — تخطيط الرسوم البيانية لوحدات الإجهاد (الرسوم البيانية التخيلية) ،

٥ — حساب وحدة انحراف واحدة δ لكل نوع من أنواع الإنشاءات .

البند ٧ — ٤ : حساب الإجهادات الناجمة عن تغير درجة الحرارة فى الانشاءات غير المحددة استاتيكيًا

عند حساب الاجهادات الناجمة عن تغير درجة الحرارة فى أى إنشاء غير محدد استاتيكيًا ، يكون شكل المعادلات القانونية المستنتجة من طريقة القوى ، كما يلى :

$$\left.\begin{array}{l} X_1\,\delta_{11} + X_2\,\delta_{12} + X_3\,\delta_{13} + \dots + X_n\,\delta_{1n} + \Delta_{1t} = 0 \\ X_1\,\delta_{21} + X_2\,\delta_{22} + X_3\,\delta_{23} + \dots + X_n\,\delta_{2n} + \Delta_{2t} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_1\,\delta_{n1} + X_2\,\delta_{n2} + X_3\,\delta_{n3} + \dots + X_n\,\delta_{nn} + \Delta_{nt} = 0 \end{array}\right\} \quad (7 - 7)$$

حيث δ_{11} ، δ_{12} ، ... ، δ_{nn} — يكون لها نفس القيم التى كانت لها فى حالة

حساب الإجهادات الناجمة عن تأثير الأحمال الخارجية ؛

Δ_{1t} ، Δ_{2t} ، ... ، Δ_{nt} — تمثل الانحرافات الناجمة عن تغير درجة الحرارة فى الإنشاء الرئيسى ، فى اتجاهات الإجهادات المجهولة الزائدة X_1 ، X_2 ، ... ، X_n .

وتحدد هذه الانحرافات من الصيغة (19 — 6) أو من الصيغة (20 — 6)* (راجع البند ٦ — ٧) :

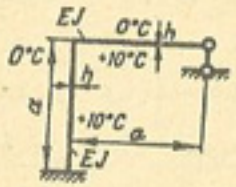
$$\Delta_{mt} = \Sigma\, \alpha\, \frac{t_1 - t_2}{h} \int_0^l \overline{M}_m\, dx + \Sigma\, \alpha\, \frac{t_1 + t_2}{2} \int_0^l \overline{N}_m\, dx \qquad (6-19)$$

أو

$$\Delta_{mt} = \Sigma\, \alpha\, \frac{t_1 - t_2}{h}\, \Omega_{\overline{M}} + \Sigma\, \alpha\, \frac{t_1 + t_2}{2}\, \Omega_{\overline{N}} \qquad (6-20)$$

ويتلخص مدلول المعادلات القانونية فى هذه الحالة ، وبصورة عامة ، فى ان الانحرافات الكلية فى اتجاهات الأربطة المرفوعة ، تساوى صفراً .

الانشاء الاصلى



الشكل ٧ — ٢٨

مثال : يطلب تحديد الإجهاد المجهول الزائد ، الناجم فى الإنشاء غير المحدد استاتيكيا من الدرجة الاولى ، المبين فى الشكل (٧ — ٢٨) ، وتخطيط الرسم البيانى لعزوم الانحناء ، على فرض أن درجة الحرارة الخارجية تبقى ثابتة ، وأن درجة الحرارة الداخلية تزداد بالمقارنة مع درجة حرارة الحالة الاولية ، بمقدار ١٠° مئوية .

الحل : إن الإنشاء الرئيسى مبين فى الشكل (٧ — ٢٩) . والآن نكتب المعادلة القانونية بالشكل التالى :

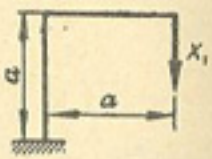
---

* نفرض بأن المقاطع العرضية للقضبان متماثلة بالنسبة للمحاور المارة فى مراكز ثقلها ، بموازاة مستوى التصميم .

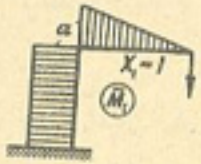
وعندما تكون المقاطع غير متماثلة ، يجب أن نستخدم المقدار $\frac{t_1 - t_2}{h}\, r + t_2$ بدلا من المقدار $\frac{t_1 + t_2}{2}$.

حيث r — تمثل المسافة بين ليف المقطع المسخن إلى درجة t_2 ، وبين مركز ثقل المقطع .

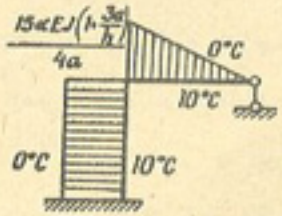
الانشاء الرئيسى



الشكل ٧ — ٢٩



الشكل ٧ — ٣٠



الشكل ٧ — ٣١

$$X_1\, \delta_{11} + \Delta_{1t} = 0$$

ونستخدم الصيغة (20 — 6) المدرجة فى هذا البند ، لإيجاد الانحراف Δ_{1t} :

$$\Delta_{1t} = -\alpha \times \frac{10-0}{h}\left(a \times a + \frac{a \times a}{2}\right) - \alpha \times \frac{10+0}{2} \times a = -15\,\alpha\, \frac{a^2}{h} - 5\alpha a$$

ونوجد قيمة δ_{11} بضرب الرسم البيانى $\overline{M}_1$ (شكل ٧ — ٣٠) فى نفسه كما يلى :

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \times \frac{a\,a}{2} \times \frac{2}{3}\, a + a\,a\,a\, \frac{1}{EJ} = \frac{4\,a^3}{3EJ}$$

وتعويض قيمتى الانحرافين Δ_{1t} و δ_{11} فى المعادلة القانونية (9 — 6) ، وحلها لاستخراج قيمة X_1 ، نحصل على :

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1t}}{\delta_{11}} = \frac{5\,\alpha\,a\left(\frac{3a}{h} + 1\right) 3\,EJ}{4\,a^3} = \frac{15\,\alpha\,EJ\left(\frac{3a}{h} + 1\right)}{4\,a^2}$$

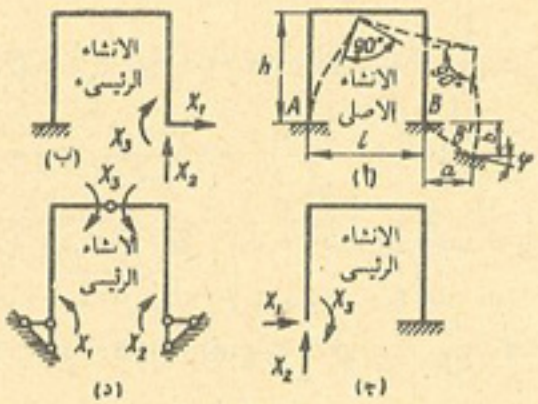
ويمكن إيجاد الرسم البيانى لعزوم الانحناء فى الانشاء المعلوم ، وهو الرسم البيانى الناجم عن تعرض الانشاء لتغير درجة الحرارة ، وذلك بضرب كافة الإحداثيات الرأسية للرسم البيانى $\overline{M}_1$ فى X_1 . والرسم البيانى المذكور مبين فى الشكل (٧ — ٣١) .

البند ٧ — ٥ : وضع المعادلات القانونية لحساب انحرافات مساند الإنشاءات :

إن حالة الإجهاد قد تنشأ فى الإنشاء غير المحدد استاتيكياً ، ليس بسبب تعرضه لتأثير الأحمال الخارجية وتغير درجة الحرارة فحسب ، بل نتيجة لانحراف مساندة أيضاً .

وسوف نبحث الآن كيفية وضع المعادلات القانونية لتحديد الإجهادات المجهولة الزائدة ، الناجمة فى الإنشاء المعلوم نتيجة للانحراف الانتقالى ولدوران مساند الإنشاء .

وكمثال محدد ، سنبحث الإطار المبين فى الشكل (٧ — ٣٢ ، أ) . والخط المنقط يبين وضع الإطار بعد انحراف المسند الأيمن فى الاتجاهين الأفقى والرأسى بمقدار a و b على التوالى ، ودوران الإنشاء بزاوية قدرها φ .



الشكل ٧ — ٣٢

ونبحث الآن نظام أو طريقة وضع المعادلات القانونية لثلاثة إنشاءات رئيسية مختلفة ، مبينة فى الشكل (٧— ٣٢ ، ب ، ج ، د) .

نبدأ ببحث الإنشاء الرئيسى الأول منها (شكل ٧ — ٣٢ ، ب) . إن هذا الإنشاء يتميز بأن كافة الإجهادات (القوى) المجهولة الزائدة ، تؤثر فيه فى اتجاه الانحرافات المعلومة للمسند ، وينطبق اتجاه القوة X_1 مع اتجاه الانحراف الافقى للمسند ، وتؤثر القوة X_2 فى الاتجاه العمودى على انحراف المسند (ولكن فى الجهة المعاكسة) أما اتجاه العزم X_3 فينطبق مع الدوران المعلوم لمقطع المسند .

ومن الضرورى اختيار القوى أو الإجهادات X_1 ، X_2 ، X_3 ، بحيث تكون الانحرافات الناجمة عنها فى الإنشاء الرئيسى ، فى اتجاه كل إجهاد من

الإجهادات المذكورة ، مساوية لانحرافات المسند المناظرة .

إن المعادلات القانونية التى تعبر عن هذه الحالة ، توضع على الشكل التالى :

$$\left.\begin{aligned} X_1\,\delta_{11} + X_2\,\delta_{12} + X_3\,\delta_{13} &= a \\ X_1\,\delta_{21} + X_2\,\delta_{22} + X_3\,\delta_{23} &= -\,b \\ X_1\,\delta_{31} + X_2\,\delta_{32} + X_3\,\delta_{33} &= \varphi \end{aligned}\right\} \quad (7-9)$$

إن سبب وجود العلامة السالبة قبل الطرف الأيمن من المعادلة الثانية ، يعود إلى أن اتجاه القوة X_2 ، معاكس لاتجاه الانحراف الرأسى المعلوم للمسند .

وعند وضع المعادلات القانونية للإنشاء الرئيسى المبين فى الشكل (٧ — ٣٢ ، ج) ، يجب اعتبار الانحرافات المعلومة للمسند B بمثابة « حمل » وإدخال الانحرافات الناجمة عن تأثير الأحمال $\Delta_{1\Delta}$ ، $\Delta_{2\Delta}$ و $\Delta_{3\Delta}$ فى المعادلات القانونية ، وهى الانحرافات الناجمة عن هذا « الحمل » . وليس من الصعب أن نتأكد بأن هذه الانحرافات (راجع البند ٦ — ١٤ على سبيل المثال) تساوى ما يلى :

$$\Delta_{1\Delta} = a;\ \Delta_{2\Delta} = -\,b + l\varphi\ ;\ \Delta_{3\Delta} = \varphi$$

وفى هذه الحالة ، ستكون المعادلات القانونية ، على الشكل التالى :

$$\left.\begin{aligned} X_1\,\delta_{11} + X_2\,\delta_{12} + X_3\,\delta_{13} + a &= 0 \\ X_1\,\delta_{21} + X_2\,\delta_{22} + X_3\,\delta_{23} - b + l\varphi &= 0 \\ X_1\,\delta_{31} + X_2\,\delta_{32} + X_3\,\delta_{33} + \varphi &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (7-10)$$

ويمكن وضع المعادلات القانونية للإنشاء الرئيسى المبين فى الشكل (٧ — ٣٢ ، د) ، على الشكل التالى :

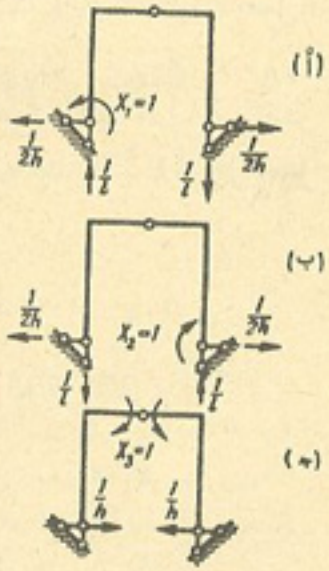
$$\left.\begin{aligned} X_1\,\delta_{11} + X_2\,\delta_{12} + X_3\,\delta_{13}\,\Delta_{1\Delta} &= 0 \\ X_1\,\delta_{21} + X_2\,\delta_{22} + X_3\,\delta_{23}\,\Delta_{2\Delta} &= \varphi \\ X_1\,\delta_{31} + X_2\,\delta_{32} + X_3\,\delta_{33}\,\Delta_{3\Delta} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (7-11)$$

حيث $\Delta_{1\Delta}$ ، $\Delta_{2\Delta}$ ، $\Delta_{3\Delta}$ – تمثل الانحرافات الناجمة فى الإنشاء الرئيسى فى اتجاهات القوى X_1 ، X_2 ، X_3 ، وذلك نتيجة للانحرافين الخطيين الافقى والرأسى للمسند الأيمن ، ومقدارهما يساوى a و b * على التوالى .

وكما هو معروف ، يمكن تحديد هذه الانحرافات (راجع البند ٦ – ١٤) من الصيغة التالية :

$$X_1 \Delta_{1\Delta} + \Sigma R \Delta = 0$$

حيث يمثل الطرف الايسر من هذه المعادلة ، الشغل الذى تنجزه القوى ، فى « الحالة التخيلية » على امتداد انحرافات الإنشاء الرئيسى ، الناجمة عن الانحرافات الخطية لمسنده .



الشكل ٧ – ٣٣

ويبين الشكل (٧ – ٣٣ ، أ) الحالة التخيلية للإنشاء الرئيسى عند تحديد انحرافه الزاوى فى اتجاه القوة X_1 (الناجم عن الانحرافين الأفقى والرأسى للمسند الأيمن ، بمقدار a و b على التوالى) .

ويعبر عن شغل الحالة التخيلية ، على امتداد انحرافات الإنشاء الرئيسى ، الذى ينحرف مسنده الأيمن فى الاتجاهين الرأسى ، والافقى ، باستخدام الصيغة التالية :

$$X_1 \Delta_{1\Delta} + \frac{1}{2h} a + \frac{1}{l} b = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$\Delta_{1\Delta} = -\frac{a}{2h} - \frac{b}{l}$$

* إن دوران المسند الأيمن (أى القضبان السائدة) لا يؤدى إلى حدوث انحرافات فى الإنشاء الرئيسى ، فى اتجاهات القوى X_1 ، X_2 و X_3 .

وبوضع صيغة شغل الحالة التخيلية ، المبينة فى الشكل (٧ – ٣٣ ، ب) ، المنجز على امتداد الانحرافات الناجمة فى الإنشاء الرئيسى نتيجة للانحرافين الخطيين الافقى والرأسى لمسنده الأيمن ، نحصل على المعادلة التالية :

$$X_2 \Delta_{2\Delta} + \frac{1}{2h} a - \frac{1}{l} b = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$\Delta_{2\Delta} = -\frac{a}{2h} + \frac{b}{l}$$

ونوجد الانحراف $\Delta_{3\Delta}$ من المعادلة التالية (شكل ٧ – ٣٣ ، ج) :

$$X_3 \Delta_{3\Delta} - \frac{1}{h} a = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$\Delta_{3\Delta} = \frac{a}{h}$$

وبعد تعويض قيم $\Delta_{1\Delta}$ ، $\Delta_{2\Delta}$ ، $\Delta_{3\Delta}$ فى المعادلات القانونية (7–11) ، نحصل على ما يلى :

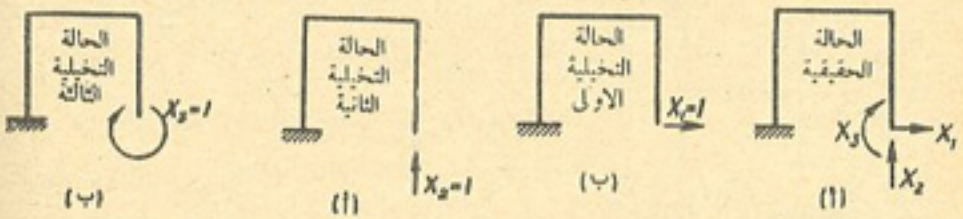
$$\left.\begin{aligned} X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13} - \left(\frac{a}{2h} + \frac{b}{l}\right) &= 0 \\ X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} - \left(\frac{a}{2h} - \frac{b}{l}\right) &= 0 \\ X_1 \delta_{31} + X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} + \frac{a}{h} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (7-12)$$

أن كل حد من حدود الطرف الأيسر لهذه المعادلات ، يمثل الانحراف الحاصل فى الإنشاء الرئيسى ، فى اتجاه الأربطة المرفوعة ، الناجم عن هذه أو غيرها من الإجهادات (القوى) المجهولة الزائدة ، أو الناجم عن انحراف المسند B .

إن المعادلات القانونية التى استخرجناها فى هذا البند ، حصلنا عليها باستخدام ما يسمى بمبدأ تراكب القوى . والآن نثبت إمكانية الحصول على نفس هذه المعادلات ، باستخدام نظرية الشغل المتبادل . نعتبر الإنشاء الرئيسى موجوداً فى الحالتين المبينتين فى الشكل (٧ — ٣٤ ، أ ، ب) ، ونضع لهاتين الحالتين معادلة الشغل التالية ، على أساس نظرية الشغل المتبادل :

$$X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{21} + X_3 \delta_{31} = 1 \times a \qquad (7-13)$$

إن الطرف الايسر من هذه المعادلة ، يعبر هنا عن الشغل المنجز فى الحالة الحقيقية (شكل ٧ — ٣٤ ، أ) على امتداد انحرافات الحالة التخيلية الأولى ، أما الطرف الأيمن فيمثل شغل وحدة القوة $X_1 = 1$ للحالة التخيلية الأولى ، على امتداد انحرافات الحالة الحقيقية ، التى يكون فيها الانحراف فى اتجاه القوة $X_1 = 1$ معلوماً ويساوى a .



الشكل ٧ — ٣٤ الشكل ٧ — ٣٥

ويمكن بطريقة مماثلة ، وضع المعادلتين التاليتين (شكل ٧ — ٣٥ ، أ ، ب) :

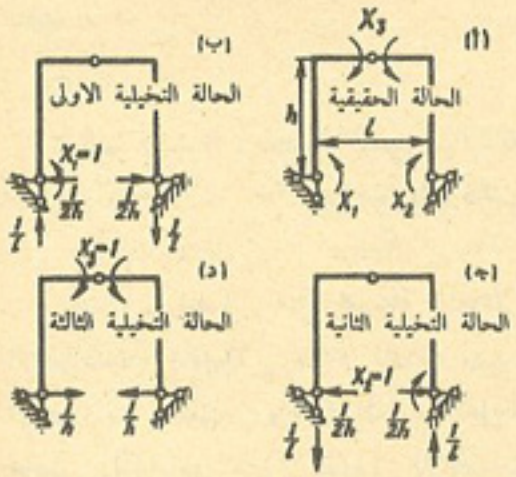
$$\left.\begin{aligned} X_1 \delta_{12} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{32} &= -1 \times b \\ X_1 \delta_{13} + X_2 \delta_{23} + X_3 \delta_{33} &= 1 \times \varphi \end{aligned}\right\} \qquad (7-14)$$

إن الطرفين الأيسرين لهاتين المعادلتين ، يعبران عن شغل القوى فى الحالة الحقيقية (شكل ٧ — ٣٤ ، أ) ، المنجز على امتداد الانحرافات الناجمة عن وحدات القوى فى الحالتين التخيليتين الثانية والثالثة ، للإنشاء الرئيسى (شكل ٧ — ٣٥ ، أ ، ب) . أما الطرفين الأيمنين لهاتين المعادلتين ، فيعبران

عن شغل القوى فى الحالتين التخيليتين الثانية والثالثة للإنشاء الرئيسى ، المنجز على امتداد الانحرافات فى حالته الحقيقية .

وبمقارنة مجموعة المعادلات (9 — 7) المستخرجة سابقاً للإنشاء المبين فى الشكل (٧ — ٣٢ ، ب) ، مع مجموعة المعادلات التى حصلنا عليها الآن (13 — 7) و(14 — 7) بواسطة نظرية الشغل المتبادل ، وبعد أن نأخذ فى الاعتبار هنا ، بأن $\delta_{12} = \delta_{21}$ و $\delta_{13} = \delta_{31}$ و $\delta_{23} = \delta_{32}$ ، نتوصل إلى النتيجة التالية ، وهى أن هاتين المجموعتين متطابقتان مع بعضهما البعض ، بالرغم من أنهما تعبران عن معنيين مختلفين من حيث المبدأ . وبالفعل ، تعبر المعادلات الموضوعة على أساس مبدأ تراكب القوى ، عن مساواة مجموع الانحرافات الحاصلة فى اتجاهات الإجهادات (القوى) المجهولة الزائدة ، للصفر أو لأية قيمة معلومة . أما المعادلات الموضوعة باستخدام نظرية الشغل المتبادل ، فتعبر عن أن شغل القوى فى الحالة الحقيقية للإنشاء الرئيسى ، المنجز على امتداد الانحرافات الناجمة فيه نتيجة لتأثير أية وحدة من وحدات الإجهاد (القوى) ، يساوى شغل وحدة الإجهاد هذه ، وردود فعل المساند الناجمة عنها فى الإنشاء الرئيسى ، على امتداد الانحرافات فى الحالة الحقيقية للإنشاء الرئيسى :

ولأجل التمرين ، سنبحث استخدام نظرية الشغل المتبادل ، لحساب الإجهادات الناشئة فى نفس الإطار السابق ، عندما يعتبر الإطار المتصل بثلاث مفصلات (شكل ٧ — ٣٦ ، أ) بمثابة الإنشاء الرئيسى . إن الحالات التخيلية الضرورية لإجراء الحساب ، مبينة فى الشكل (٧ — ٣٦ ، ب ، ج ، د) .



الشكل ٧ — ٣٦

إن المعادلات القانونية الموضوعة باستخدام نظرية الشغل المتبادل تكتب على الشكل التالى :

$$\left.\begin{aligned} X_1\,\delta_{11} + X_2\,\delta_{21} + X_3\,\delta_{31} &= \frac{b}{l} + \frac{a}{2h} \\ X_1\,\delta_{12} + X_2\,\delta_{22} + X_3\,\delta_{32} &= \varphi + \frac{a}{2h} - \frac{b}{l} \\ X_1\,\delta_{13} + X_2\,\delta_{23} + X_3\,\delta_{33} &= -\frac{a}{h} \end{aligned}\right\} \qquad (7-15)$$

وبمقارنة المعادلات (15 — 7) المستخرجة باستخدام نظرية الشغل المتبادل ، مع المعادلات (12 — 7) ، الموضوعة سابقاً على أساس مبدأ تراكب القوى ، نتوصل إلى النتيجة التالية ، وهى أن هذه المعادلات مطابقة لبعضها البعض .

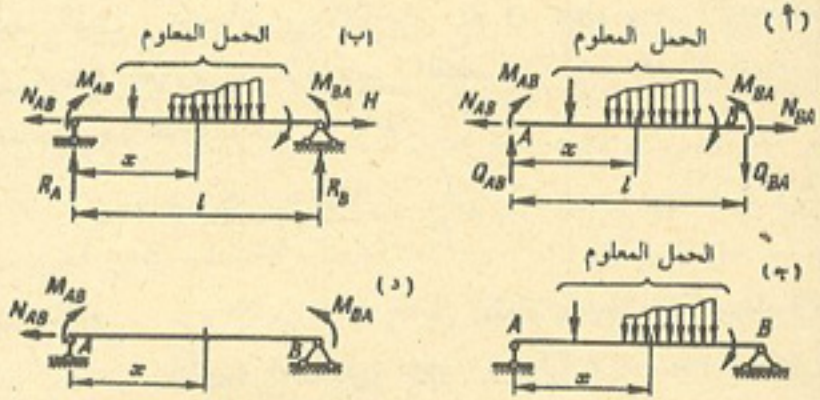
وعند حساب انحرافات مساند الانشاءات غير المحددة استاتيكيًّا ، توضع المعادلات القانونية عادة ، باستخدام نظرية الشغل المتبادل ، وذلك لأن هذه الطريقة واضحة للعيان أكثر ، ويمكن استخدامها أيضاً عند حساب تأثير الحمل الخارجى المعلوم على الإطار ، ولكن لا تكون لها فى هذه الحالة ، أية أفضلية بالمقارنة مع طريقة وضع المعادلات القانونية على أساس مبدأ تراكب القوى .

البند ٧ — ٦ : تخطيط الرسوم البيانية لقوى القص والقوى الطولية ، ومراجعة تلك الرسوم البيانية

بعد أن توصلنا بحل مجموعة المعادلات القانونية ، إلى إيجاد قيم الإجهادات المجهولة X_1 ، X_2 ، ... ، X_n ، يمكن تسليط هذه الإجهادات (القوى) والحمل المعلوم ، على الإنشاء الرئيسى . ثم نتمكن بطريقة عادية (كما هو متبع بالنسبة للإنشاءات المحددة استاتيكيًّا) من تحديد قوى القص Q والقوى الطولية N ، الناجمة عن التأثير الموحد لتلك الإجهادات ،

فى الإنشاء الرئيسى ، ثم تخطيط الرسوم البيانية لقوى القص Q وللقوى الطولية N . وستكون هذه الرسوم بمثابة الرسوم Q البيانية لقوى القص وللقوى الطولية N بالنسبة للإنشاء غير المحدد استاتيكيًّا المعلوم لدينا .

ويمكن تحديد قوى القص والقوى الطولية فى الإنشاء غير المحدد استاتيكيًّا ، بطريقة أخرى أيضاً ، وذلك من الرسم البيانى لعزم الانحناء ، المخطط لهذا الإنشاء بالذات . وللحصول على الصيغ الضرورية ، سنبحث القطعة المستقيمة AB التى طولها l ، المفصولة عن الإنشاء غير المحدد استاتيكيًّا . إن هذه القطعة فى الحالة العامة تماماً ، تكون معرضة لتأثير الأحمال التالية (شكل ٧ — ٣٧ ، أ) :



الشكل ٧ — ٣٧

(أ) الحمل المعلوم ،

(ب) عزوم الانحناء M_{AB} و M_{BA} ، الناشئة فى المقطعين العرضيين A و B للقطعة AB ، التى تستخرج قيمتها من الرسم البيانى لعزوم الانحناء ؛

(جـ) قوى القص Q_{AB} و Q_{BA} والقوى الطولية N_{AB} و N_{BA} ، الناشئة فى المقطعين العرضيين A و B للقطعة AB .

إن الرمز الدليلى الأول الملحق بكل من M و Q و N يدل على مضمون ذلك المقطع ، المعرض لتأثير هذه القوى (الإجهادات) .

الدليليان معاً ، إلى قطعة الإطار ، التى يقع فيها ذلك المقطع . وعلى سبيل M_{AB} ، يعنى عزم الانحناء فى المقطع A ، الواقع فى القطعة AB .

ولما كانت القطعة AB موجودة فى حالة توازن ، إذن يمكن اعتبار القوى Q_{AB} ، Q_{BA} ، N_{BA} بمثابة ردود فعل المساند R_A ، R_B و H على التوالى ، للعتبة البسيطة المحمولة على مسندين ، المبينة فى الشكل (٧ – ٣٧ . ب) .

إذن تكون الإجهادات (القوى) الداخلية فى المقاطع العرضية ذات الإحداثى السينى x للقطعة AB من الإطار المذكور (شكل ٧ – ٣٧ ، أ) وللعتبة AB (شكل ٧ – ٣٧ ، ب) متساوية تماماً. ولذلك استناداً إلى مبدأ تراكب القوى ، نجد بأن عزم الانحناء M فى المقطع x من القطعة AB ، يساوى مجموع العزوم الناشئة فى نفس المقطع من العتبة AB ، نتيجة لتأثير الأحمال المبينة فى الشكل (٧– ٣٧ ، ج ، د) :

$$M = M^0 + M_{AB} + \frac{M_{BA} - M_{AB}}{l} x$$

حيث : M^0 – عزم الانحناء الناشىء فى المقطع x من العتبة البسيطة ، نتيجة لتأثير الحمل المعلوم (شكل ٧ – ٣٧ ، ج) ،

$M_{AB} + \frac{M_{BA} - M_{AB}}{l} x$ – عزم الانحناء الناشىء فى المقطع x من العتبة البسيطة ، نتيجة لتأثير العزمين M_{AB} و M_{BA} (شكل ٧ – ٣٧ ، د) .

واستناداً إلى نظرية جورافسكى ، نحصل بعد أخذ تفاضل الصيغة المستخرجة أعلاه ، على ما يلى :

$$Q = \frac{dM}{dx} = \frac{dM^0}{dx} + \frac{M_{BA} - M_{AB}}{l} .$$

أو

$$Q = Q^0 + \frac{M_{BA} - M_{AB}}{l} \qquad (7 - 16)$$

حيث $Q^0 = \frac{dM^0}{dx}$ – تمثل قوة القص فى المقطع x من العتبة البسيطة ، الناجمة عن تأثير الحمل المعلوم (شكل ٧ – ٣٧ ، ج).

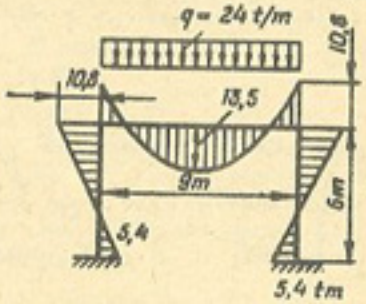
إن الصيغ التى حصلنا عليها ، تساعد على تحديد عزوم الانحناء وقوى القص فى أى مقطع من مقاطع أية قطعة مستقيمة من الإطار ، كالقطعة AB ، إذا كانت معلومة لدينا عزوم الانحناء فى المقطعين A و B ، وكان الحمل المعلوم المؤثر فى حدود هذه القطعة ، معلوماً أيضاً .

وإذا كانت الإحداثيات الرأسية للرسم البيانى للعزوم M ، واقعة فى جهة الألياف المشدودة لكل قطعة من قطع الإطار ، عندئذ لمعرفة علامة قوة القص فى مقاطع هذه القطع ، يمكن استخدام القاعدة التالية : تعتبر قوة القص موجبة ، إذا تطلب انطباق محور القطعة مع مماس الرسم البيانى لعزوم الانحناء ، تدوير هذا المحور فى اتجاه حركة عقرب الساعة . ويجب أن يتم التدوير دائماً ، بحيث لا تزيد زاوية الدوران على ٩٠ . والقيمة العددية لقوة القص ، تتناسب طردياً مع ظل زاوية الدوران . وباستخدام هذه القاعدة ، يمكن تحديد علامة قوة القص فى مقاطع القطعة AB من الإطار .

ولتحديد اتجاه قوة القص ، يجب استحداث قطع يمر بالمقطع المعلوم للقطعة ، وتعريض كل قسم مقطوع من أقسام هذه القطعة ، لتأثير قوة القص . واذا كانت قوة القص فى هذه الحالة موجبة ، يجب أن تجعل كل قسم من أقسام القطعة يدور حول طرفه الآخر ، فى اتجاه عقرب الساعة .

ولتحديد قيم القوى الطولية N ، يمكن قطع أو فصل وصلات الإطار ، وتعريضها للحمل الخارجى المؤثر عليها ، وكذلك للقوى الطولية المجهولة وقوى القص المستخرجة سابقاً ، ثم نضع معادلات التوازن لهذه الوصلات ، التى يمكن بواسطتها تحديد القوى الطولية . ويمكن أن نستخدم لهذا الغرض أيضاً ، الطريقة المبينة فى بداية هذا البند .

مثال : يطلب تخطيط الرسمين البيانيين لقوى القص Q والقوى الطولية N ، للإطار الذى خطط الرسم البيانى لعزوم انحنائه فى الشكل (٧ – ٣٨) .



الشكل ٧ – ٣٨

الحل : نبدأ بتخطيط الرسم البيانى لقوة القص Q فى القطعة 2 — 1 . إن الرسم البيانى ، لعزوم الانحناء فى هذه القطعة ، هو عبارة عن خط مستقيم ، وذلك لعدم تأثير أى حمل على امتداد هذه القطعة . إذن تكون قوة القص ثابتة ، على طول الضلع القائم 2 — 1 بأكمله . وهذه القوة سالبة ، وذلك لأن انطباق محور القطعة مع مماس الرسم البيانى للعزوم (وفى هذه الحالة ، مع الخط الذى يمثل الرسم البيانى للعزوم M ، للضلع القائم 2 — 1) ، يتطلب تدوير هذا المحور فى عكس اتجاه عقرب الساعة . إن قيمة قوة القص ، تساوى ظل زاوية ميل الخط الذى يمثل الرسم البيانى لعزوم الانحناء ، مع محور القطعة ؛ أى أنها تساوى ما يلى :

$$Q_{12} = Q_{21} = -\frac{10.8 + 5.4}{6} = -2.7 \text{ t}$$

ونحصل على نفس قيمة قوة القص Q_{12} ، باستخدام الصيغة المدرجة فى هذا البند :

$$Q_{12} = Q_{21} = Q^0_{12} + \frac{M_{21} - M_{12}}{l_{12}}$$

ونظراً لعدم تأثير أى حمل خارجى على الضلع القائم 2 — 1 ، تكون قيمة قوة القص Q^0_{12} مساوية للصفر ، ولهذا يكون لدينا ما يلى :

$$Q_{12} = \frac{M_{21} - M_{12}}{l_{12}} = \frac{-10.8 - (+5.4)}{6} = -2.7 \text{ t}$$

وعند حساب قوة القص ، يجب تدوير كل قطعة تدويراً فرضياً إلى الامام ، بحيث تصبح أفقية تماماً .

وبعد ذلك ، يجب اعتبار عزم الانحناء الذى يشد الألياف العليا للقطعة ، سالباً ، واعتبار عزم الانحناء الذى يشد الألياف السفلى ، موجبا .

وبنفس الطريقة تحدد قوة القص فى الضلع القائم الأيمن ، وتساوى ($+2.7$ t) .

والآن نأتى إلى بحث العارضة 3 — 2 . إن قوة القص فى المقطع الواقع على مسافة x من الوصلة 2 ، تحدد من المعادلة التالية :

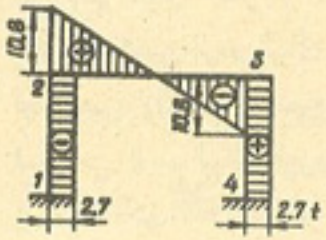
$$Q = Q^0 + \frac{M_{32} - M_{23}}{l_{23}} = + \frac{2.4 \times 9}{2} - 2.4\,x + \frac{-10.8-(-10.8)}{9} =$$
$$= + 10.8 - 2.4\,x$$

وقوة القص فى المقطع الذى إحداثيه السينى هو $x = 0$ (أى عند الوصلة 2) ، تساوى ما يلى :

$$Q_{23} = + 10.8 \text{ t}$$

وقوة القص فى المقطع الذى إحداثيه السينى هو $x = 9$ m (أى عند الوصلة 3)، تساوى ما يلى :

$$Q_{32} = + 10.8 - 2.4 \times 9 = - 10.8 \text{ t}$$



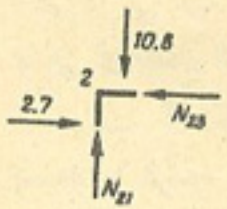
الشكل ٧ – ٣٩

إن الرسم البيانى لقوى القص مبين فى الشكل (٧–٣٩) .

ولتخطيط الرسم البيانى للقوى الطولية ، يجب معرفة الرسم البيانى لقوى القص ، أو معرفة جميع القوى الزائدة المجهولة .

نحدد القوى الطولية من معادلة توازن الوصلات .

إذا قطعنا أو فصلنا الوصلة 2 (شكل ٧ – ٤٠) ، فسوف نجد بأنها ستكون معرضة لتأثير القوى التالية : قوة القص Q_{23} التى تساوى 10.8 t ، الناشئة فى المقطع الطرفى الأيسر للعارضة ، المتجهة من الأعلى إلى أسفل ، قوة القص Q_{21} التى تساوى 2.7 t — ، الناشئة فى العارضة المتجهة من اليسار إلى اليمين، القوة الطولية N_{23} فى العارضة ، القوة الطولية N_{21} فى الضلع القائم (إن القوى الطولية المؤدية إلى حدوث انضغاط فى الضلع القائم ، تعتبر موجبة) .



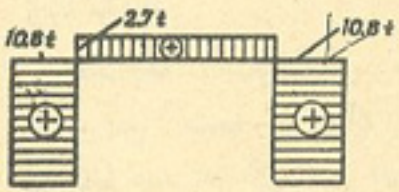
الشكل ٧ – ٤٠

ومن شرط توازن الوصلة 2 ، نحصل على ما يلى :

$$N_{23} = + 2.7 \text{ t}$$
$$N_{21} = + 10.8 \text{ t}$$

وبقطع الوصلة 3 ، نتأكد من نشوء قوة طولية موجبة فى الضلع القائم الأيمن أيضاً ، تساوى 10.8 t .

إن الرسم البيانى للقوى الطولية ، المخطط طبقاً للمعطيات التى حصلنا عليها ، مبين فى شكل (٧ – ٤١) .



الشكل ٧ – ٤١

وأراجعة صحة الرسوم البيانية لـ M ، Q ، N ، يمكن وضع شروط التوازن الاستاتيكى للإطار بأكمله ، ولوصلاته وأقسامه المنفردة المفصولة اختياريًّا (المراجعة الاستاتيكية) . وعلى سبيل المثال ، يجب أن يكون مجموع مساقط جميع ردود فعل مساند الإطار ، على المستوى العمودى أو الرأسى ، موازناً للمسقط الرأسى للحمل الخارجى ، ويجب أن يكون مجموع عزوم كافة ردود الفعل ، حول أية نقطة من النقاط ، موازناً لعزم الحمل الخارجى ، حول هذه النقطة بالذات : وهلم جرا .

وبالإضافة إلى ذلك ، تتم مراجعة الرسم البيانى لقوى القص Q ، بمقارنته مع الرسم البيانى للعزوم M . على سبيل المثال ، نجد بأنه فى المقطع الذى يكون فيه مماس الرسم البيانى للعزوم M ، موازيا لمحور القطعة ، يجب أن تكون قوة القص Q مساوية للصفر . أما فى مقاطع القضيب المستقيم ، حيث يكون فيها مماس الرسم البيانى للعزوم M ، مائلا على محوره ، فى نفس الاتجاه بالذات ، يجب أن تكون علامات قوة القص Q متماثلة تماماً . وفى أحد مقطعى القطعة ، الذى تكون فيه زاوية ميل مماس الرسم البيانى للعزوم M ، مع محور القطعة ، أكبر مما هى عليه فى المقطع الثانى ، تكون قوة القص Q ، الناشئة فيه أكبر مما هى فى المقطع الثانى وهلم جرا .

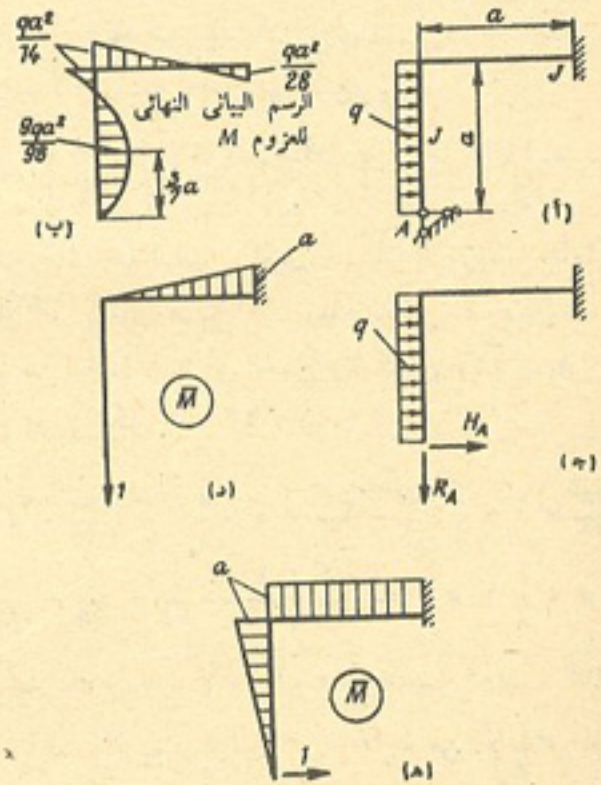
ويجب أن تكون عزوم الانحناء فى كل وصلة ، متوازنة تماماً ، ولذا تكون إحداثياتها الرأسية فى وصلات العارضة والضلع القائم (إذا كانت الوصلات متكونة من التقاء قطعتين ، وكانت غير معرضة لتأثير العزوم المركزة) متساوية مع بعضها البعض . أما قوى القص فى كل وصلة ، وكذلك القوى الطولية على انفراد ، فلا تكون متوازنة ، ولكن قوى القص يجب أن تتوازن مع القوى الطولية ، توازناً مشتركاً .

والمراجعة الاستاتيكية للرسوم البيانية لـ M ، Q ، N ، لا يمكن أن تضمن بعد ، صحة حل المسألة ، وذلك لأن الشرط الاستاتيكى سيتحقق حتى فى حالة عدم صحة قيم القوى المجهولة المستخرجة . وهذا نتيجة لأن الرسم البيانى النهائى للعزوم M (للانشاء غير المحدد استاتيكيًّا) ، يمثل الرسم البيانى لعزوم

الانحناء ، للإنشاء الرئيسى المحدد استاتيكيًّا ، الناجم عن تأثير الحمل المعلوم والقوى المجهولة المستخرجة ، على الإنشاء الرئيسى . وإذا كان هذا الرسم البيانى للإنشاء الرئيسى ، صحيحاً ، ستتحقق المراجعة الاستاتيكية ، عند أية قيم كانت للقوى المجهولة .

ويمكن فى معظم الحالات ، ملاحظة الأخطاء فى قيم القوى المجهولة المستخرجة ، بواسطة ما يسمى بمراجعة الانحرافات ، التى سنشرح فحواها فى المثال التالى :

يبين الشكل (٧ — ٤٢ ، أ) إطاراً غير محدد استاتيكيًّا من الدرجة الثانية : والرسم البيانى النهائى لعزوم الانحناء فى هذا الإطار ، المخطط طبقاً للإجهادات



الشكل ٧ — ٤٢

المحسوبة ، مبين فى الشكل (٧ – ٤٢ ، ب) . وإذا رفعنا من هذا الإطار ، الرباطين اللذين يمنعان انحراف طرفه السفلى ، فسوف يتحول الإطار إلى إنشاء محدد استاتيكيًّا (شكل ٧ – ٤٢ ، ج) . نسلط على هذا الإنشاء ردى الفعل H_A و R_A العائدين للرباطين المرفوعين ، والحمل المعلوم (شكل ٧ – ٤٢ ، ج) . إن الرسم البيانى لعزوم الانحناء ، الناجم عن ردى الفعل المذكورين والحمل المعلوم ، فى الإنشاء المحدد استاتيكيًّا ، سيكون مطابقاً تماماً لما هو عليه فى الإطار المعلوم (شكل ٧ – ٤٢ ، ب) .

ولأجل المراجعة ، نحسب الانحراف الرأسى Δ_V للطرف السفلى للإطار ونرى هل يكون مساويًّا للصفر أم لا . ولهذا الغرض نخطط وحدة الرسم البيانى $\overline{M}$ الناجم عن تأثير وحدة القوة ، فى اتجاه الانحراف المطلوب (شكل ٧ – ٤٢ ، د) . وبضرب هذا الرسم البيانى فى الرسم البيانى النهائى للعزوم M (شكل ٧ – ٤٢ ، ب) نحصل على ما يلى :

$$\Delta_V = \frac{1}{EJ}\, a \times a \times \frac{1}{2}\left(\frac{qa^2}{14} \times \frac{1}{3} - \frac{qa^2}{28} \times \frac{2}{3}\right) = 0$$

والآن نقوم بالمراجعة التالية ، لنرى هل أن الانحراف الأفقى Δ_H للطرف السفلى للإطار ، يساوى صفرا أم لا . ولهذا الغرض نضرب الرسم البيانى للعزوم $\overline{M}$ ، الناجم عن وحدة القوة أو الحمل (شكل ٧–٤٢ ، هـ) فى الرسم البيانى النهائى للعزوم M (شكل ٧ – ٤٢ ، ب) :

$$\Delta_H = \frac{1}{EJ}\left(\frac{qa^2}{14} \times a \times \frac{1}{2} \times \frac{2a}{3} - \frac{qa^2}{8} \times a \times \frac{2}{3} \times \frac{a}{2} + \frac{qa^2}{14} \times a \times \frac{1}{2} \times a - \right.$$
$$\left. - \frac{qa^2}{28} \times a \times \frac{1}{2} \times a\right) = \frac{qa^4}{EJ}\left(\frac{1}{42} - \frac{1}{24} + \frac{1}{28} - \frac{1}{56}\right) = 0$$

وهكذا نجد بأن مراجعة الانحراف ، تتم حسب الترتيب التالى :

١ – تحذف الأربطة الزائدة عن الحاجة من الإنشاء المعلوم غير المحدد استاتيكيًّا ، فيتحول بذلك إلى إنشاء محدد استاتيكيًّا :

٢ – تسلط وحدة القوة (الحمل) فى اتجاه كل رباط مرفوع (أو

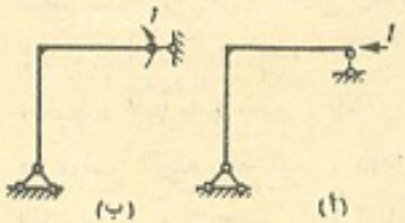
تسلط وحدة العزم ، إذا كان الرباط المبحوث ، يمنع دوران المقطع العرضى) ،

٣ – ترسم وحدة الرسم البيانى للعزوم $\overline{M}$ ، الناجم عن كل قوة من القوى (أو عزم من العزوم) المذكورة أعلاه :

٤ – بضرب الرسم البيانى $\overline{M}$ فى الرسم البيانى النهائى لعزوم الانحناء (للإنشاء المعلوم) ، يتحدد الانحراف فى الإنشاء المحدد استاتيكيًّا ، الذى حصلنا عليه (راجع النقطة الأولى) ، فى اتجاه كل رباط من الأربطة المرفوعة .

٥ – إذا كانت الانحرافات المحسوبة بهذه الطريقة ، فى اتجاه كل رباط مرفوع ، مساوية للصفر ، فهذا يدل على صحة الرسم البيانى النهائى لعزوم الانحناء .

وليس من الضرورى أن يكون الإنشاء المحدد استاتيكيًّا ، المستخدم فى مراجعة الانحرافات (راجع النقطة الأولى) ، مطابقاً لذلك الإنشاء الرئيسى ، الذى استخدم فى حساب الإجهادات الناجمة فى الإنشاء : وبالإضافة إلى ذلك ، يمكن مراجعة الانحرافات فى مختلف الإنشاءات المحددة استاتيكيًّا . وعلى سبيل المثال ، لمراجعة صحة الرسم البيانى النهائى لعزوم الانحناء (شكل ٧ – ٤٢ ، ب) كان بالإمكان تحديد الانحراف الأفقى للمقطع الطرفى الأيمن للإطار ، باستخدام الإنشاء المحدد استاتيكيًّا ، المبين فى الشكل (٧ – ٤٣ ، أ) ، وتحديد دوران هذا المقطع ، باستخدام الإنشاء المبين فى الشكل (٧ – ٤٣ ، ب) .

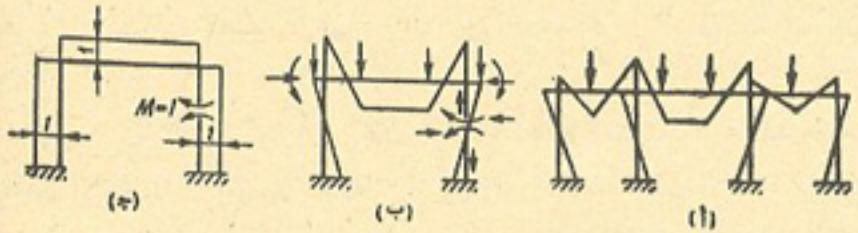


الشكل ٧ – ٤٣

ولمراجعة الانحراف ، يمكن استخدام وحدات الرسوم البيانية لعزوم الانحناء فى الإنشاء الرئيسى ، التى خططت عند حساب إجهادات الإطار : وتتخلص المراجعة فى هذه الحالة ، بضرب كل وحدة رسم بيانى ، فى الرسم البيانى النهائى للعزوم . ويجب أن تكون نتيجة هذا الضرب ، مساوية للصفر .

ويمكن القيام بمراجعة انحراف بسيطة جداً ، للمحيطات المقفلة فى

الإطار (أو للمحيطات ذات النهاية المثبتة أو المبيتة عند المساند) . ولنفرض بأننا حسبنا الإجهادات فى الإطار ذات المحيطات المقفلة ، أو المحيطات التى أضلاعها القائمة مبيتة (مثبتة) فى الأساس (شكل ٧ — ٤٤ ، أ) . نقطع أحد محيطات هذا الإطار ، ونسلط فى مواضع القطع ، عزوم وقوى طولية وقوى قص ، بنفس القيم التى هى عليها فى الإطار المعلوم (شكل ٧ — ٤٤ ، ب) . وهنا سوف يبقى الرسم البيانى لعزوم الانحناء فى حدود هذا المحيط ، ثابتاً بدون تغيير .



الشكل ٧ — ٤٤

نقطع الإطار المنفصل فى موضع معين ، ومن جديد نسلط فى موضع القطع ، العزوم وقوى القص والقوى الطولية ، المؤثرة فى هذا المقطع (شكل ٧ — ٤٤ ، ب) . وفى هذه الحالة أيضاً ، يبقى الرسم البيانى لعزوم الانحناء فى المحيط ، ثابتاً بدون تغيير : والآن نثبت عدم حدوث أى دوران متبادل للمقاطع ، فى موضع القطع المذكور . ولهذا الغرض ، يجب ضرب الرسم البيانى النهائى للعزوم ، فى وحدة الرسم البيانى للعزوم $M = 1$ ، المؤثرة فى موضع القطع (شكل ٧ — ٤٤ ، جـ) . ولما كانت كافة الإحداثيات الرأسية لهذا الرسم البيانى ، مساوية للواحد ، عندئذ تتلخص عملية ضرب الرسوم البيانية ، بحساب المساحة الكلية للرسم البيانى الرئيسى لعزوم الانحناء على امتداد المحيط المقفل (مع تقسيم المساحات على جسوءات المقاطع العرضية المناظرة ، لكل قطعة من القطع) . وهذه المساحة الكلية يجب أن تساوى صفراً .

وهكذا يجب أن تكون المساحة الكلية للرسم البيانى (المقسومة على الجسوءة EJ) فى أى محيط مقفل ، مساوية للصفر . وفى هذه الحالة ، تؤخذ مساحة الرسم

البيانى لعزوم الانحناء ، الواقعة فى داخل المحيط ، بعلامة مماثلة ، والواقعة خارج المحيط ، بعلامة معاكسة .

والطريقة الأخيرة للمراجعة ، أبسط من غيرها . وإذا أعطت هذه المراجعة نتائج مرضية بالنسبة لجميع المحيطات المقفلة للإطار المعلوم (وليس بالنسبة للمحيطات المتصلة بمفصلات) ، عندئذ نستطيع القول بأن الرسم البيانى النهائى ، مخطط بصورة صحيحة .

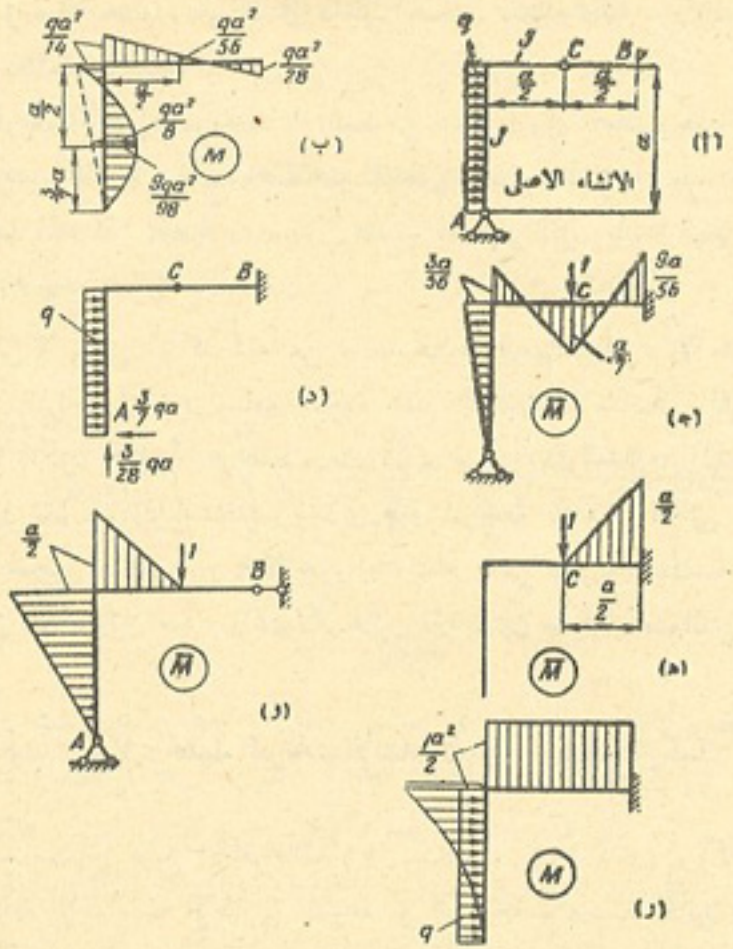
ولكن لا يمكن التأكد تماماً من صحة تخطيط الرسم البيانى ، إلا بعد إجراء عدد من المراجعات* ، يساوى درجة عدم التحديد الاستاتيكى للإنشاء . على أن لا تكون هناك أية مراجعات متماثلة ، ضمن ذلك العدد من المراجعات . وعلى سبيل المثال ، إذا استخدمنا إحدى طرق المراجعة بالنسبة لمساحتى الرسمين البيانيين لمحيطين متجاورين ، لا يجوز استخدام نفس الطريقة بالنسبة لمجموع المساحتين المذكورتين معاً ، وذلك لأن هاتين المراجعتين ستكونان متماثلتين .

البند ٧ — ٧ : تحديد انحرافات الإنشاءات غير المحددة استاتيكياً

عند استنتاج صيغ الانحرافات (15 — 6) ، (16 — 6) و (17 — 6) بحثنا كافة الإنشاءات الإطارية المتنوعة ، التى تخضع مادتها لقانون هوك ، والتى تكون انحرافاتها (تشوهاتها) صغيرة بالنسبة لأبعادها (راجع البند ٦ — ٢) . إذن نجد بأن هذه الصيغ وكذلك طرق حساب الانحرافات بواسطتها ، المبحوثة فى الفصل السادس ، قد استخدمت بالنسبة لكل من الإنشاءات المحددة استاتيكياً والإنشاءات غير المحددة استاتيكياً ، على السواء :

نحدد مثلا ، الانحراف الرأسى للنقطة C ، الواقعة على محور الإطار المبين فى الشكل (٧ — ٤٥ ، أ) ، عند تعرض الإطار لتأثير الحمل الموزع بانتظام

* سيطبق قسم من هذه المراجعات فى حساب المساحات ، والقسم الآخر فى عملية ضرب الرسوم البيانية .



الشكل ٧ – ٤٥

q . لقد تم حساب إجهادات هذا الإطار ، فى المثال ٢ من البند ٧ – ٣ (لاحظ الشكل ٧ – ١٦ ، أ) . والرسم البيانى النهائى الكلى لعزوم الانحناء فى الإطار ، مبين فى الشكل ٧ – ٤٥ ، ب (لاحظ الشكل ٧ – ١٨ ، ب) .

ولتحديد الانحراف الرأسى Δ_c للنقطة C الواقعة على عارضة الإطار ، نسلط فى هذه النقطة وحدة حمل رأسى (وحدة قوة رأسية) . ويبين الشكل (٧ – ٤٥ ، ج) الرسم البيانى لعزوم الانحناء $\overline{M}$ ، الناجم عن تأثير وحدة الحمل المذكورة ، وهو الرسم البيانى الذى حصلنا عليه بنتيجة حساب الإجهادات

فى الإطار غير المحدد استاتيكياً* ، . وباستخدام طريقة فيريشاجين لضرب الرسوم البيانية ، المبينة فى الشكل (٧ – ٤٥ ، ب ، ج) ، نحصل على قيمة الانحراف الرأسى Δ_c :

$$\Delta_c = \Big[\frac{qa^2}{14} \times \frac{a}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3a}{56} - \frac{qa^2}{8} \times \frac{2}{3}a \times \frac{3a}{56} \times \frac{1}{2} + \frac{a}{2} \times \frac{1}{6} \left(\frac{3a}{56} \times \frac{qa^2}{14} \times 2 - \frac{a}{7} \times \frac{qa^2}{56} \times 2 + \frac{3a}{56} \times \frac{qa^2}{56} - \frac{a}{7} \times \frac{qa^2}{14} \right) + \frac{a}{2} \times \frac{1}{6} \left(-\frac{a}{7} \times \frac{qa^2}{56} \times 2 - \frac{9a}{56} \times \frac{qa^2}{28} \times 2 + \frac{a}{7} \times \frac{qa^2}{28} + \frac{9a}{56} \times \frac{qa^2}{56} \right) \Big] \frac{1}{EJ} = -\frac{qa^4}{448\,EJ}$$

وتدل العلامة السالبة ، على أن النقطة C تنحرف فى الاتجاه المعاكس لاتجاه وحدة الحمل ، أى تنحرف إلى الأعلى .

إن تحديد الانحراف بهذه الطريقة صعب ، وذلك لأنه يتطلب إجراء حساب الإجهادات فى الإنشاء غير المحدد استاتيكياً ، الناجمة ليس عن تأثير الحمل المعلوم فحسب ، بل وعن تأثير وحدة الحمل أيضاً (أو وحدة العزم ، عند تحديد زاوية الدوران) . ويمكن تبسيط حساب الانحرافات إلى حد كبير ، باتباع الطريقة التالية : نرفع الأربطة الزائدة عن الحاجة من الإنشاء المعلوم ، مثل رباطى المسند A ، ونحول الإنشاء إلى إنشاء محدد استاتيكياً ، ويتحول فى هذه الحالة إلى عتبة مرفقية (محنية) مثبتة عند المقطع B . نسلط على الإنشاء الذى حصلنا عليه (شكل ٧ – ٤٥ ، د) الحمل المعلوم ، وردود فعل الأربطة المرفوعة . إن الرسم البيانى لعزوم الانحناء M (وكذلك الرسمين البيانيين لقوى القص Q والقوى الطولية N) ، لهذا الإنشاء ، لا يختلف بتاتاً عن الرسم البيانى للعزوم M ، المبين فى الشكل (٧ – ٤٥ ، ب) للإنشاء المعلوم غير المحدد استاتيكياً (شكل ٧ – ٤٥ ، أ) . إن انحرافات (تشوهات) كلا

* سوف لا نتطرق هنا إلى هذا الحساب .

الإنشاءين متساوية تماماً . ولذلك يمكن حساب الانحراف Δ_c للنقطة C ، ليس فى الإنشاء المعلوم غير المحدد استاتيكيًّا ، ولكن فى الإنشاء المحدد استاتيكيًّا ، الناجم عنه (بطريقة رفع الأربطة الزائدة عن الحاجة) . ولهذا الغرض ، نسلط على الإنشاء الأخير ، وحدة الحمل فى اتجاه الانحراف المطلوب ، ونخطط وحدة الرسم البيانى $\overline{M}$ (شكل ٧ — ٤٥ ، هـ) . وبضرب هذا الرسم البيانى فى الرسم البيانى للعزوم M (شكل ٧ — ٤٥ ، ب) نحصل على قيمة الانحراف Δ_c :

$$\Delta_c = \frac{a}{2} \times \frac{a}{2} \times \frac{1}{2} \left(\frac{qa^2}{56} \times \frac{1}{3} - \frac{qa^2}{28} \times \frac{2}{3} \right) \frac{1}{EJ} = - \frac{qa^4}{448EJ}$$

ولحساب الانحراف فى الإنشاء غير المحدد استاتيكيًّا ، يمكن اختيار أى إنشاء محدد استاتيكيًّا ، ناجم عن الإنشاء الأول المعلوم ، بطريقة رفع الأربطة الزائدة ، وليس فقط ذلك الإنشاء الذى استخدمناه بمثابة إنشاء رئيسى ، عند حساب الإنشاء الأخير غير المحدد استاتيكيًّا . وعلى سبيل المثال ، لتحديد نفس الانحراف Δ_c ، يمكن استخدام الإنشاء المحدد استاتيكيًّا ، المبين فى الشكل (٧ — ٤٥ ، و) : وبعد تسليط وحدة الحمل على هذا الإنشاء ، فى اتجاه الانحراف المطلوب ، وتخطيط وحدة الرسم البيانى للعزوم $\overline{M}$ ، الناجم عن تأثير وحدة الحمل (شكل ٧ — ٤٥ ، و) ، ثم ضرب الرسم البيانى الأخير فى الرسم البيانى للعزوم M ، الناجم فى الإنشاء غير المحدد استاتيكيًّا نتيجة لتأثير الحمل المعلوم (شكل ٧ — ٤٥ ، ب) ، نحصل على قيمة الانحراف Δ_c :

$$\Delta_c = \left[\frac{qa^2}{14} \times \frac{a}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{a}{2} - \frac{qa^2}{8} \times \frac{2}{3} a \times \frac{a}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{a}{2} \times \frac{a}{2} \times \right.$$
$$\left. \times \frac{1}{2} \left(\frac{qa^2}{14} \times \frac{2}{3} + \frac{qa^2}{56} \times \frac{1}{3} \right) \right] \frac{1}{EJ} = - \frac{qa^4}{448EJ}$$

ويجب اختيار الإنشاء الذى سيعتبر بمثابة إنشاء رئيسى ، بحيث يصبح تخطيط وحدة الرسم البيانى للعزوم $\overline{M}$ أبسط ما يمكن ، على أن تحتوى هذه الوحدة على أقل عدد ممكن من الأقسام ، وأن تكون لها على قدر الإمكان ،

إحداثيات رأسية صفرية ، فى تلك الأقسام ، التى يكون فيها شكل الرسم البيانى للعزوم M ، فى الإنشاء غير المحدد استاتيكيًّا ، أكثر تعقيداً . وبناء على ذلك ، يكون الإنشاء الأفضل من بين الإنشاءين المحددين استاتيكيًّا ، المبحوثين أعلاه ، هو الإنشاء المبين فى الشكل (٧ — ٤٥ ، هـ) ، لأنه أكثر ملاءمة من الإنشاء المبين فى الشكل (٧ — ٤٥ ، و) .

ويطلب أحياناً تحديد الانحراف الناجم فى الإنشاء غير المحدد استاتيكيًّا ، نتيجة لتأثير الحمل المعلوم ولكن لا يطلب تحديد الإجهاد الناشىء فيه . وفى هذه الحالات ، يمكن عدم إجراء حساب الإجهادات الناجمة فى الإنشاء غير المحدد استاتيكيًّا نتيجة لتأثير الحمل المعلوم ، بل نكتفى بحساب الإجهادات الناشئة فيه نتيجة لتأثير وحدة الحمل (أو وحدة العزم) ، المؤثرة فى اتجاه الانحراف المطلوب . ويمكن تحديد الانحراف ، بضرب وحدة الرسم البيانى للعزوم $\overline{M}$ ، الناجم فى الإنشاء غير المحدد استاتيكيًّا ، نتيجة للحساب المذكور ، فى الرسم البيانى للعزوم M ، الناجم عن الحمل ، المخطط فى الإنشاء المحدد استاتيكيًّا ، الذى حصلنا عليه من الإنشاء المعلوم ، بطريقة رفع الأربطة الزائدة عن الحاجة . وفى المثال المبحوث أعلاه ، عند اتباع مثل هذه الطريقة لتحديد الانحراف Δ_c ، يجب ضرب وحدة الرسم البيانى للعزوم $\overline{M}$ ، المبين فى الشكل (٧ — ٤٥ ، جـ) ، فى الرسم البيانى للعزوم M مثلا ، المبين فى الشكل (٧ — ٤٥ ، ز) كما يلى :

$$\Delta_c = \left[\frac{qa^2}{2} \times \frac{a}{3} \times \frac{3a}{56} \times \frac{3}{4} + \frac{qa^2}{2} \times \right.$$
$$\left. \times \frac{a}{2} \left(\frac{3a}{56} - \frac{a}{7} \times 2 + \frac{9a}{56} \right) \frac{1}{2} \right] \frac{1}{EJ} = - \frac{qa^4}{448EJ}$$

وهكذا ، عند حساب الانحراف ، يجب أن يخطط أحد الرسمين البيانيين (الرسم البيانى للتحميل الحقيقى أو وحدة الرسم البيانى) ، للإنشاء المعلوم غير المحدد استاتيكيًّا ، أما الرسم البيانى الآخر ، فيمكن تخطيطه أيضاً ، للإنشاء المحدد استاتيكيًّا ، الذى حصلنا عليه من الإنشاء المعلوم ، بطريقة رفع الأربطة الزائدة عن الحاجة .

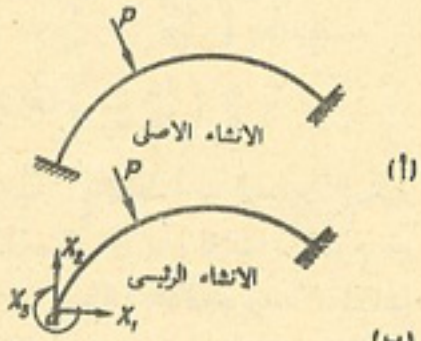
ويتم حساب الانحرافات فى الإنشاءات التشابكية (الجمالونات) غير المحددة استاتيكيًّا ، بطريقة مماثلة لما سبق ، ولكن فى هذه الحالة بدلا من ضرب الرسوم البيانية لعزوم الانحناء ، تضرب الرسوم البيانية للقوى الطولية .

البند ٧ — ٨ : طريقة المركز المرن

عند حساب إجهادات الإنشاءات غير المحددة استاتيكيًّا ، نضطر عادة إلى حل مجموعة معادلات الانحرافات (المعادلات القانونية) حلاً آنياً : وبالإضافة إلى صعوبة طريقة الحل ، ترتبط هذه العملية باحتمال ظهور أخطاء ملحوظة فى قيم الإجهادات (القوى) المجهولة التى نحصل عليها . ولذلك من الطبيعى أن نحاول حل المعادلات ، على أساس توزيع المجاهيل عليها ، بحيث تحتوى كل معادلة على مجهول واحد ، أو بحيث تحتوى مجموعة المعادلات القانونية ، على عدة أصناف من المعادلات ، يحتوى كل صنف منها على مجاهيل معينة ، لا تدخل ضمن أى صنف آخر .

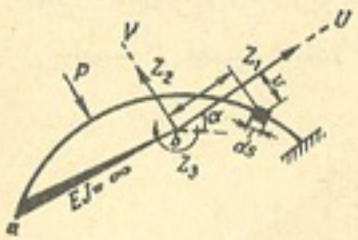
ومن الواضح أن للإنشاء غير المحدد استاتيكيًّا من الدرجة الثانية ، مجموعة معادلات قانونية بسيطة للغاية ، بحيث لا نحتاج إلى تبسيطها أبداً (ولو أن ذلك ممكن من حيث المبدأ) .

وعند الانتقال إلى الإنشاءات غير المحددة استاتيكيًّا من الدرجة الثالثة ، سنبحث طريقة تبسيط حساب الإجهادات فى الإطار المقفل المصمت ، ذى الشكل الاختيارى المبين فى الشكل (٧ — ٤٦ ، أ) . نرفع أربطة المسند الأيسر ، ونعوض عنها بثلاثة إجهادات أو قوى مجهولة هى X_1 ، X_2 ، X_3 (شكل ٧ — ٤٦ ، ب) . ولتحديد هذه الإجهادات ، يجب حل مجموعة ، المعادلات الآنية المؤلفة



الشكل ٧ — ٤٦

من ثلاث معادلات قانونية . ولذلك سنبحث عن أفضل طريقة عملية للحساب ، تجعلنا نتجنب الحل الآنى لمجموعة المعادلات . ولهذا الغرض ، نربط مع الطرف الأيسر الطليق للإنشاء ، كابولا لا نهائى الجسوءة ab ، لم يحدد بعد طوله واتجاهه (شكل ٧ — ٤٧) .



الشكل ٧ — ٤٧

نسلط على طرف الكابول فى النقطة b ، قوتان متعامدتان Z_1 و Z_2 ، تنطبقان مع اتجاهى المحورين u و v ، ونسلط أيضاً العزم المركز Z_3 . وإذا اخترنا قيم هذه القوى (الإجهادات) الثلاثة ، بحيث يبقى المقطع الطرفى للكابول (فى النقطة b) ثابتاً ، أى لا ينحرف ولا يدور ، نكون بذلك ، بفضل الجسوءة اللانهائية للكابول ، قد توصلنا إلى جعل المقطع الطرفى الأيسر للإنشاء المعلوم (النقطة a) ، ثابتاً أيضاً . وبعبارة أخرى ، إذا تعرض الإنشاء الرئيسى الجديد (لاحظ الشكل ٧ — ٤٧) إلى تأثير الإجهادات Z_1 ، Z_2 ، Z_3 ، والحمل المعلوم فى نفس الوقت ، فإنه سيخضع لظروف مكافئة للانشاء المعلوم .

والآن نضع شروط استقرار (ثابت) طرف الكابول b ، على هيئة معادلات قانونية ، تحتوى على المجاهيل Z_1 ، Z_2 ، Z_3 :

$$\left.\begin{aligned} Z_1\,\delta_{11} + Z_2\,\delta_{12} + T_3\,\delta_{13} + \Delta_{1p} &= 0 \\ Z_1\,\delta_{21} + Z_2\,\delta_{22} + Z_3\,\delta_{23} + \Delta_{2p} &= 0 \\ Z_1\,\delta_{31} + Z_2\,\delta_{32} + Z_3\,\delta_{33} + \Delta_{3p} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (7-17)$$

إن المعادلات δ_{ik} الداخلة فى مجموعة المعادلات ، تمثل انحرافات طرف الكابول ، الناجمة عن تأثير وحدات الإجهادات Z_1 ، Z_2 ، Z_3 .

وهذه الانحرافات تعتمد فى الحقيقة على اختيار أبعاد الكابول واتجاهات محوريه u و v . وبالاستفادة من هذا الظرف ، نختار موضع النقطة b ، واتجاهات المحورين ، بحيث تصبح قيم كافة الانحرافات الثانوية ، الداخلة ضمن

المعادلات القانونية ، مساوية للصفر ، وبذلك سيتم توزيع المجاهيل على المعادلات .

إن شكل مجموعة المعادلات القانونية فى هذه الحالة ، سيكون كما يلى :

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} \\ Z_2 &= -\frac{\Delta_{2p}}{\delta_{22}} \\ Z_3 &= -\frac{\Delta_{3p}}{\delta_{33}} \end{aligned}\right\} \qquad (7-18)$$

نعبر بصيغة تحليلية ، عن الشروط التى تحدد اختيار المجموعة الجديدة للمجاهيل . وإذا عبرنا عن إحداثيات القطعة ds بالرمزين u و v (لاحظ الشكل ٧ – ٤٧) ، فسوف نحصل على المعادلات التالية :

$$\delta_{12} = \int_0^l \frac{\overline{M}_1\,\overline{M}_2\,ds}{EJ} = \int_0^l \frac{v \times u\,ds}{EJ} = 0$$

$$\delta_{13} = \int_0^l \frac{\overline{M}_1\,\overline{M}_3\,ds}{EJ} = \int_0^l \frac{v \times 1\,ds}{EJ} = 0$$

$$\delta_{23} = \int_0^l \frac{\overline{M}_2\,\overline{M}_3\,ds}{EJ} = \int_0^l \frac{u \times 1\,ds}{EJ} = 0$$

وبالاختصار على E ، نحصل على الشروط التالية :

$$\int_0^l u\,\frac{ds}{J} = 0$$

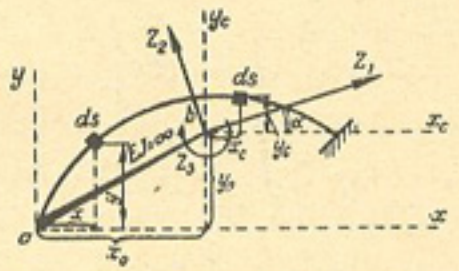
$$\int_0^l v\,\frac{ds}{J} = 0$$

$$\int_0^l v\,u\,\frac{ds}{J} = 0$$

ومن السهولة إعطاء تفسير هندسى لهذه الشروط : إذا قسمنا الإنشاء إلى أقسام كل منها يساوى ds ، وسلطنا فى مركز ثقل كل قسم منها الحمل الاختيارى $\frac{ds}{J}$ ، فسوف يعبر التكاملان الأوليان من مجموعة التكاملات ، الأخيرة ، عن شرط مساواة العزوم الاستاتيكية لهذه الأحمال حول المحاور الجديدة المارة فى النقطة b ، للصفر . وهذه المساواة ممكنة فقط ، عندما تنطبق النقطة b مع مركز ثقل الأحمال الاختيارية . ويعبر التكامل الثالث عن مساواة عزم القصور الطارد المركزى لنفس الأحمال الاختيارية ، للصفر ، إذن فإنه يدل على أن المحورين u و v يجب أن يكونا بمثابة المحورين المركزيين الرئيسيين للقصور الذاتى .

ومن هنا تبرز القاعدة العامة لإيجاد المحاور الجديدة : لكى نجعل كافة الانحرافات الثانوية مساوية للصفر ، عند حساب الإجهادات فى الإطار المقفل غير المحدد استاتيكياً من الدرجة الثالثة ، يجب أن تنطبق نقطة الأصل الجديدة للإحداثيات ، مع مركز ثقل الأحمال الاختيارية $\frac{ds}{J}$ ، مع تدوير المحورين الجديدين (u و v) حتى ينطبقان مع المحورين الرئيسيين للقصور الذاتى ، اللذين لهما نفس القيمتين . وإذا كان الإنشاء المعلوم متماثلا ، فإن محورى التماثل سيعتبران بمثابة المحورين الرئيسيين .

ويتم تعيين نقطة أصل الإحداثيات (منشأ الإحداثيات) ، باستخدام الصيغ العادية للميكانيكا النظرية . وبتطبيق ذلك على الرموز المستخدمة فى الشكل (٧ – ٤٨) ، ستكون صيغ تحديد مركز ثقل الأحمال الاختيارية $\frac{ds}{J}$ ،



الشكل ٧ – ٤٨

على الشكل التالى :

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{\int_0^l x \frac{ds}{J}}{\int_0^l \frac{ds}{J}} \\ \text{و} \qquad y_0 &= \frac{\int_0^l y \frac{ds}{J}}{\int_0^l \frac{ds}{J}} \end{aligned}\right\} \qquad (7-19)$$

إن بسط كل صيغة من هاتين الصيغتين ، يمثل مجموع العزوم الاستاتيكية للأحمال الاختيارية الأولية $\frac{ds}{J}$ (ويؤخذ هذا المجموع على طول محيط الإنشاء المعلوم) ، حول الإحداثيات الاختيارية للمحاور . أما مقاما هاتين الصيغتين ، فيمثلان مجموع الأحمال الاختيارية للإنشاء بأجمعه .

وتحدد زاوية ميل المحاور الرئيسية ، من الصيغة المعروفة فى علم مقاومة المواد ، وهى :

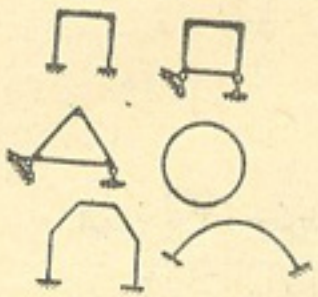
$$\tan 2\alpha = -\frac{2 J_{x_c y_c}}{J_{x_c} - J_{y_c}} \qquad (7-20)$$

وفى هذه الصيغة ، نجد ما يلى :

$$\left.\begin{aligned} J_{x_c y_c} &= \int_0^l x_c y_c \frac{ds}{J} \\ J_{x_c} &= \int_0^l y_c^2 \frac{ds}{J} \\ J_{y_c} &= \int_0^l x_c^2 \frac{ds}{J} \end{aligned}\right\} \qquad (7-21)$$

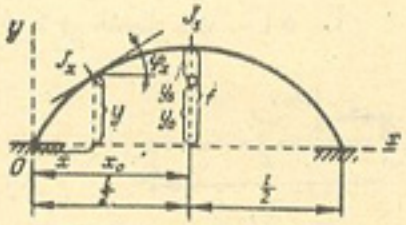
إن الحمل الاختيارى $\frac{ds}{J}$ يسمى كذلك ، بالحمل المرن الابتدائى : ويسمى مركز ثقل الأحمال الاختيارية ، بمركز الثقل المرن أو بالمركز المرن فقط :

ونشير هنا إلى أن استخدام الطريقة المشروحة أعلاه ، لحساب الإنشاءات بواسطة نقل المجاهيل إلى المركز المرن ، لا يكون ملائماً دائماً . وعلى سبيل المثال ، يمكن فى حالة المحيطات غير المتماثلة ، أن يكون عدد العمليات الحسابية ، المتعلقة بإيجاد الإحداثيات الجديدة ، لا يبرر تبسيط المعادلات القانونية ، الذى حصلنا عليه فى هذه الحالة . ومن الملائم جداً ، استخدام هذه الطريقة ، عند وجود محور واحد أو محورين للتماثل . ومن أمثلة هذه الإنشاءات ، هى الإنشاءات المبينة فى الشكل (٧–٤٩) .



الشكل ٧ – ٤٩

مثال : يطلب إيجاد موضع مركز الثقل المرن للعقد الخالى من المفصلات (شكل ٧ – ٥٠) ، المخطط على هيئة القطع المكافىء $y = \frac{4f}{l^2}(l-x)x$ ، ذات المقاطع العرضية التى تتغير عزوم قصورها الذاتى حسب القانون التالى $J_x = \frac{J_s}{\cos\varphi_x}$. حيث لدينا ما يلى :



الشكل ٧ – ٥٠

J_x – عزم القصور الذاتى للمقطع العرضى ، ذى الإحداثى السينى x ؛

J_s – عزوم القصور الذاتى للمقطع العرضى عند قمة (تاج) العقد ؛

φ_x – زاوية ميل مماس محور العقد ، مع الأفق ، فى النقطة c ذات الإحداثى السينى x .

الحل : نحدد إحداثيات المركز المرن ، بالنسبة للمحاور xoy (شكل ٧ – ٥٠) . ونظراً للتماثل الهندسى والتماثل « المرن » (نعنى بالتماثل « المرن » ، التماثل فى أبعاد المقاطع العرضية للعقد) حول المحور الرأسى ، المار فى مقطع قمة العقد الخالى من المفصلات ، يكون أحد إحداثيات مركز الثقل المرن معروفاً لدينا ، ويساوى بالذات : $x_0 = \frac{l}{2}$.

والآن نحدد قيمة الإحداثى الآخر ، من الصيغة الثانية (19 — 7) ، على أن نأخذ فى الاعتبار هنا ، ما يلى :

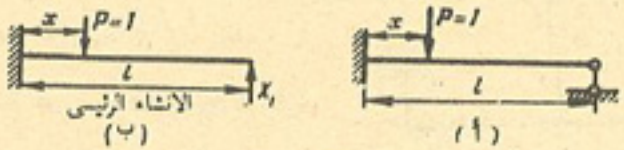
$$\bar{J}_x = \frac{\bar{J}_s}{\cos\varphi_x} \quad , \quad ds = \frac{dx}{\cos\varphi_x}$$

$$y_0 = \frac{\int_0^l \frac{4f}{l^2}(l-x)\, x\, \frac{dx}{\bar{J}_s}}{\int_0^l \frac{dx}{\bar{J}_s}} = \frac{2}{3} f$$

البند ٧ — ٩ : خطوط تأثير أبسط الإنشاءات غير المحددة استاتيكيًا

يمكن رسم خطوط تأثير الإجهادات فى الانشاءات غير المحددة استاتيكيًا ، بطريقتين مختلفتين هما ، الطريقة الاستاتيكية والطريقة الكينماتية .

لنبحث هاتين الطريقتين بتطبيقهما على العتبة ذات المقطع الثابت ، المبينة فى الشكل (٧ — ٥١ ، أ) .



الشكل ٧ — ٥١

نرمز بالحرف x إلى المسافة من طرف العتبة الأيسر إلى الحمل المتنقل $P = 1$. نرسم خط تأثير رد فعل المسند X_1 ، الناشىء عند المسند الأيمن للعتبة . إن الإنشاء الرئيسى مبين فى الشكل (٧ — ٥١ ، ب) .

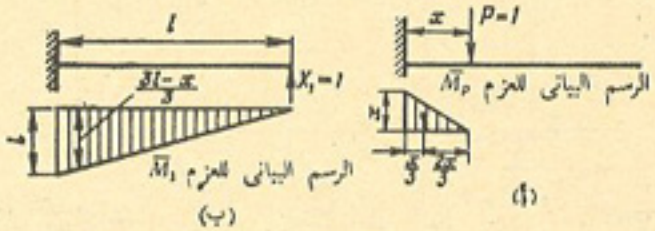
وتكون المعادلة القانونية المعبرة عن مساواة الانحرافات فى الإنشاء الرئيسى فى اتجاه X_1 ، للصفر ، على الشكل التالى :

$$X_1 \delta_{11} + \delta_{1P} = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} \qquad (7-22)$$

ولإيجاد الانحرافين δ_{1P} و δ_{11} ، نخطط الرسمين البيانيين لكل من $\bar{M}_P$ و $\bar{M}_1$ ، الناجمين عن تأثير الحملين $P = 1$ و $X_1 = 1$ على العتبة الكابولية (الإنشاء الرئيسى) . والرسمان البيانيان المذكوران ، مبينان فى الشكل (٧—٥٢ ، أ و ب) .



الشكل ٧ — ٥٢

والآن نوجد الانحرافين δ_{1P} و δ_{11} :

$$\delta_{1P} = -\frac{xx}{2} \times \frac{3l-x}{3} \times \frac{1}{EJ} = -\frac{x^2(3l-x)}{6\,EJ}$$

$$\delta_{11} = \frac{ll}{2} \times \frac{2l}{3} \times \frac{1}{EJ} = \frac{l^3}{3\,EJ}$$

وبتعويض قيمتى δ_{1P} و δ_{11} فى الصيغة (22 — 7) ، نحصل على ما يلى :

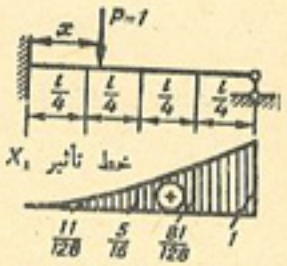
$$X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{x^2(3l-x)\,3\,EJ}{6EJl^3} = \frac{x^2(3l-x)}{2l^3}$$

إن الصيغة التى حصلنا عليها تحدد قيمة رد فعل المسند X_1 (القوة المجهولة الزائدة) عند أية وضعية كانت للحمل $P = 1$ على العتبة . والرسم البيانى أو التخطيطى لهذه الصيغة ، يمثل أيضاً خط تأثير X_1 .

وقد أدرجت فى الجدول (٧ — ٣) قيم إحداثيات خط تأثير X_1 ، المستخرجة من الصيغة المذكورة ، للنقاط التى تفصل بين بعضها البعض ،

جدول ٧ — ٣

المسافة x	x^2	$3l - x$	إحداثيات خط تأثير X_1
0	0	$3l$	0
$\frac{l}{4}$	$\frac{l^2}{16}$	$\frac{11}{4}\,l$	$\frac{11}{128}$
$\frac{l}{2}$	$\frac{l^2}{4}$	$\frac{5}{2}\,l$	$\frac{5}{16}$
$\frac{3}{4}\,l$	$\frac{9l^2}{16}$	$\frac{9}{4}\,l$	$\frac{81}{128}$
l	l^2	$2l$	1



الشكل ٧ — ٥٣

مسافة تساوى ربع باع العتبة ، أى $\frac{1}{4}$. وقد رسم خط تأثير X_1 طبقاً لهذه الإحداثيات (شكل ٧ — ٥٣) .

والآن نرسم لنفس العتبة بالذات ، خط تأثير قوة القص فى المقطع C ذى الإحداثى السينى $x = \frac{l}{2}$:

وبناء على مبدأ تراكب القوى ، يمكن إيجاد قيمة قوة القص Q من الصيغة التالية :

$$Q_C = Q_C^0 + \bar{Q}_C X_1 \qquad (7-23)$$

حيث Q_C^0 — قوة القص الناجمة فى المقطع C ، نتيجة لتعرض العتبة الكابولية لتأثير الحمل $P = 1$ فقط ؛

$\bar{Q}_C$ — قوة القص الناجمة فى نفس المقطع ، نتيجة لتعرض العتبة لتأثير رد الفعل $X_1 = 1$. وقيمة $\bar{Q}_C$ ثابتة وتساوى وحدة سالبة ، أى :

$$\bar{Q}_C = -1$$

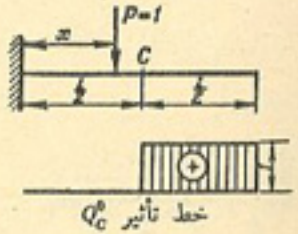
وعند تسليط الحمل $P = 1$ إلى يمين المقطع C ، يكون لدينا ما يلى :

$$Q_C^0 = 1$$

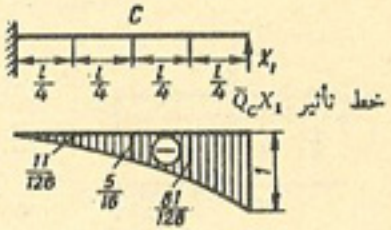
وعند تسليط الحمل $P = 1$ إلى يسار المقطع C ، يكون لدينا ما يلى :

$$Q_C^0 = 0$$

والرسم البيانى الذى يمثل خط تأثير Q_C^0 — قوة القص للمقطع C من العتبة الكابولية ، مبين فى الشكل (٧ — ٥٤) .

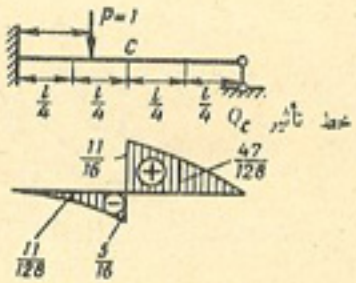


الشكل ٧ — ٥٤



الشكل ٧ — ٥٥

إن قيمة الحد الثانى للصيغة (23 — 7) ، عند أية وضعية للحمل $P = 1$ ، تساوى القيمة المناظرة لرد فعل المسند X_1 ، مضروبة فى معامل قيمته تساوى (— 1) . والرسم البيانى لتغير هذا الحد $\bar{Q}_C X_1 = -X_1$ (خط تأثير $\bar{Q}_C X_1$) ، مبين فى الشكل (٧ — ٥٥) .



الشكل ٧ — ٥٦

وبجمع إحداثيات خطى تأثير Q_C^0 و $\bar{Q}_C X_1$ ، نحصل على إحداثيات خط تأثير قوة القص Q_C للمقطع C من العتبة غير المحددة استاتيكياً المعلومة (شكل ٧ — ٥٦) .

وبنفس الطريقة يمكن رسم خط تأثير عزم الانحناء ، للمقطع C من العتبة المذكورة :

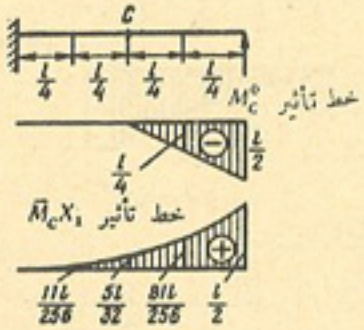
وعزم الانحناء يساوى ما يلى :

$$M_C = M_C^0 + \overline{M}_C X_1$$

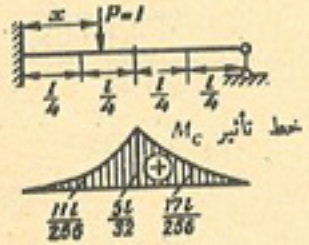
حيث : M_C^0 — عزم الانحناء الناجم فى المقطع C ، نتيجة لتعرض العتبة الكابولية لتأثير الحمل $P = 1$ ،

$\overline{M}_C$ — عزم الانحناء الناجم فى المقطع C ، نتيجة لتعرض العتبة الكابولية لتأثير رد فعل المسند $X_1 = 1$: وقيمة $\overline{M}_C$ ثابتة وتساوى $\frac{l}{2}$.

ويبين الشكل (٧ — ٥٧) خطى تأثير M_C^0 و $\overline{M}_C X_1$: وإذا جمعنا إحداثيات خطى التأثير المذكورين ، سنحصل على خط تأثير عزم الانحناء M_C (شكل ٧ — ٥٨) .



الشكل ٧ — ٥٧



الشكل ٧ — ٥٨

وتسمى طريقة رسم خطوط التأثير المشروحة أعلاه ، بالطريقة الاستاتيكية .

وإذا عوضنا عن القيمة δ_{1P} الموجودة فى الصيغة (22 — 7) ، استناداً إلى نظرية الانحرافات المتبادلة ، بالقيمة δ_{P1} ، فسوف تصبح الصيغة على الشكل التالى :

$$X_1 = -\frac{\delta_{P1}}{\delta_{11}} \qquad (7-24)$$

والاختلاف بين δ_{1P} و δ_{P1} يتلخص فيما يلى : أن δ_{1P} تمثل انحراف نقطة واحدة ، أى نقطة تأثير الإجهاد X_1 ، الناجم عن تعرض العتبة لتأثير

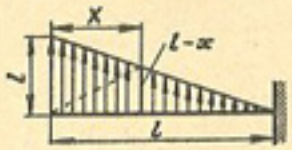
الحمل $P = 1$ ، الذى يمكن تسليطه فى أية نقطة كانت من نقاط العتبة ، أما δ_{P1} فتمثل انحراف أية نقطة كانت من نقاط العتبة (الانحراف فى اتجاه الحمل المتنقل $P = 1$) الناجم عن تعرض العتبة لتأثير وحدة الحمل أو القوة ، فى اتجاه الإجهاد X_1 ، وهكذا نجد بأن الرسم البيانى للانحراف δ_{P1} يمثل الرسم البيانى لانحرافات العتبة ، الناجمة عن تعرضها لتأثير الإجهاد $X_1 = 1$. وإذا قسمنا كافة إحداثيات الرسم البيانى للانحراف δ_{P1} على المقدار الثابت ($-\delta_{11}$) ، فسوف نحصل على رسم بيانى معين ، تعبر إحداثياته عن طبيعة تغير الإجهاد X_1 عند تنقل الحمل $P = 1$ على العتبة . وهذا الرسم البيانى يمثل خط تأثير الإجهاد المجهول X_1 .

وهكذا نجد بأن خط تأثير الإجهاد المجهول X_1 ، يمثل من حيث الشكل ، الرسم البيانى للانحرافات ، فى هذه الحالة ، بالنسبة للإنشاء الرئيسى المحدد استاتيكياً ، وهى الانحرافات الناجمة عن تعرضه لتأثير وحدة القوة (الإجهاد) ، فى اتجاه الإجهاد المجهول . إن قيمة ($-\delta_{11}$) تمثل فى هذه الحالة ، مقياس الرسم المستخدم للانتقال من الرسم البيانى للانحرافات إلى خط التأثير .

وتسمى طريقة رسم خط تأثير X_1 هذه ، بالطريقة الكينماتية .

ولمقارنة الطريقة الكينماتية بالطريقة الاستاتيكية ، نبحث من جديد العتبة المبينة فى الشكل (٧ — ٥١ ، أ) ، التى سنضع لها باستخدام الطريقة الكينماتية ، معادلة خط تأثير رد فعل المسند X_1 ، مستخدمين عندئذ الصيغة (24 — 7) .

نخطط الرسم البيانى للانحراف δ_{P1} ، باستخدام الطريقة التخطيطية — التحليلية المعروفة فى علم مقاومة المواد ، والتى تتلخص حقيقتها فى حساب الإحداثيات الرأسية للانحرافات ، باعتبارها مساوية للإحداثيات الرأسية للرسم البيانى للعزوم الناجمة فى العتبة التخيلية ، نتيجة لتعرضها لتأثير الحمل التخيلى ، مقسومة (أى الإحداثيات) على المقدار EJ — الحمل الموزع طبقاً للرسم البيانى للعزوم فى العتبة الحقيقية . إن العتبة التخيلية المحملة بحمل تخيلى ، التى تمثل الرسم البيانى للعزوم ، الناجم عن تأثير الإجهاد $X_1 = 1$ ، مبينة فى الشكل (٧ — ٥٩) .



الشكل ٧ — ٥٩

وبعد وضع صيغة عزم الانحناء الناجم فى المقطع x من العتبة التخيلية ، نحصل على ما يلى :

$$\delta_{p1} = -\left(\frac{lx}{2} \times \frac{2}{3}x + \frac{(l-x)x}{2} \times \frac{x}{3}\right)\frac{1}{EJ}$$

ومنها ينتج أن :

$$\delta_{p1} = -\frac{x^2}{6EJ}(3l - x)$$

أن صيغة الانحراف δ_{p1} هذه ، التى حصلنا عليها باستخدام الطريقة الكينماتية ، تطابق تماماً صيغة الانحراف δ_{1p} ، التى حصلنا عليها أعلاه بالطريقة الاستاتيكية . والعلامة السالبة الموضوعة قبل الطرف الأيمن δ_{p1} ، تعنى بأنه عند تعرض العتبة المبينة فى الشكل (٧ — ٥١ ، ب) لتأثير الإجهاد $X_1 = 1$ ، فإنها تنحرف (تنحنى) إلى الأعلى (لقد اعتبرنا بأن اتجاه الانحرافات إلى الاسفل ، الذى ينطبق مع اتجاه الحمل $P = 1$ ، موجباً) .

وتحدد قيمة δ_{11} بضرب الرسم البيانى للعزوم $\overline{M}_1$ (لاحظ الشكل ٧ — ٥٢ ، ب) ، فى نفسه ، وهذه القيمة تساوى ما يلى* :

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{3EJ}$$

إذن ستكون معادلة خط تأثير الإجهاد X_1 ، كما يلى :

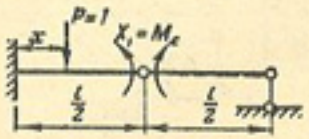
$$X_1 = -\frac{\delta_{p1}}{\delta_{11}} = \frac{x^2(3l-x)}{2l^3}$$

والصيغة الأخيرة تطابق صيغة X_1 ، التى استخرجناها أعلاه باستخدام الطريقة الاستاتيكية .

---

* يمكن فى هذه الحالة إيجاد القيمة المذكورة ، من المعادلة أو الصيغة التى استخرجناها للانحراف δ_{p1} بعد أن نعوض فيها القيمة $x = l$ وتغيير العلامة إلى عكسها (وذلك لأن اتجاه تأثير الإجهاد (القوة) $X_1 = 1$ ، هو عكس اتجاه تأثير الحمل $P = 1$) .

ويمكن استخدام الطريقة الكينماتية أيضاً ، عند رسم خطوط تأثير الاجهادات الداخلية فى الإنشاء ، وخاصة خطوط تأثير عزوم الانحناء وقوى القص . وعلى سبيل المثال ، يمكن رسم خط تأثير العزم M_C ، المبين فى الشكل (٧ — ٥٨) باستخدام الطريقة الكينماتية ، إذا اعتبرنا عزم الانحناء M_C هو الذى يمثل الإجهاد المجهول X_1 ، بدلا من رد فعل المسند الايمن للعتبة . وسيصبح شكل الانشاء الرئيسى فى هذه الحالة ، كما مبين فى الشكل (٧ — ٦٠) .



الشكل ٧ — ٦٠

والمعادلة القانونية ، المعبرة عن مساواة زاوية الدوران المتبادلة لمقاطع العتبة المتجاورة ، فى موضع المفصلة ، للصفر ، ستكون على الشكل التالى :

$$X_1\delta_{11} + \delta_{1p} = 0$$

أو على الشكل التالى :

$$X_1\delta_{11} + \delta_{p1} = 0$$

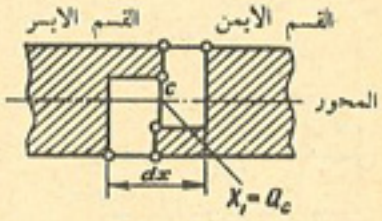
ومنها ينتج أن :

$$X_1 = -\frac{\delta_{p1}}{\delta_{11}}$$

إذن فى هذه الحالة ، سيكون الرسم البيانى لانحرافات الإنشاء الرئيسى ، الناجمة عن تعرضه لتأثير العزوم $X_1 = 1$ ، نموذجاً لخط تأثير الإجهاد X_1 .

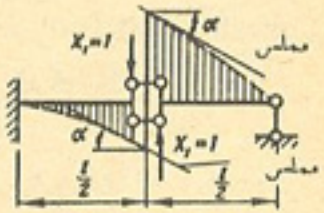
وتساعد الطريقة الكينماتية على تحديد نوع أو شكل خط تأثير الاجهاد المبحوث X_1 ، لأن نموذجه هو الرسم البيانى لانحرافات الإنشاء الرئيسى ، الناجمة عن تعرضه لتأثير وحدة الإجهاد أو العزم . ويمكن الاستفادة من هذه الخاصية ، بمثابة وسيلة لضبط خط التأثير المرسوم بطريقة تحليلية ، هذا من ناحية ، ومن الناحية الأخرى بمثابة طريقة لتحديد أقسام الإنشاء ، التى يجب

تحميلها عند إيجاد القيم الكبرى والصغرى للأجهاد X_1 ، بدون حساب إحداثيات خط التأثير .



الشكل ٧ – ٦١

وعند رسم خط تأثير قوة القص Q_c بالطريقة الكينماتية ، يمكن اعتبار رباط قسم العتبة الأيسر مع قسمها الأيمن ، مؤلفاً من ثلاثة قضبان (شكل ٧ – ٦١) . وسيكون الإجهاد فى القضيب الرأسى لهذا الرباط ، هو قوة القص الناشئة فى المقطع المعلوم .



الشكل ٧ – ٦٢

إن الحالة التخيلية للإنشاء الرئيسى ، الذى اعتبرت فيه قوة القص $X_1 = Q_C$ بمثابة الإجهاد المجهول الزائد ، مبينة فى الشكل (٧ – ٦٢) .

والمعادلة القانونية التى تنفى وجود الانحراف المتبادل لطرفى القضيب فى المقطع C ، فى اتجاه الإجهاد X_1 (أى رأسياً) ، ستكون على الشكل التالى :

$$X_1 \, \delta_{11} + \delta_{1p} = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$X_1 = -\frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}}$$

أو

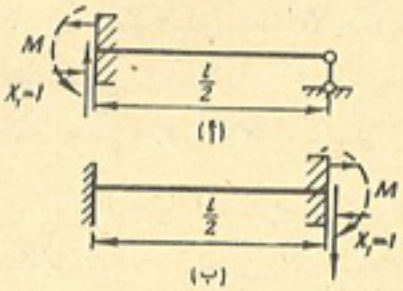
$$X_1 = -\frac{\delta_{p1}}{\delta_{11}}$$

إذن فى هذه الحالة أيضاً ، يكون الرسم البيانى لانحرافات الإنشاء الرئيسى ، الناجمة عن تأثير القوى $X_1 = 1$ ، نموذجاً لخط التأثير .

إن مماسى فرعى الخط المرن ، المرسومين فى المقطع C (شكل ٧ – ٦٢) ، يجب أن يوازيا بعضهما البعض ، وذلك لأن القضبان الأفقية الموضوعة ، لا تسمح

للمقاطع العرضية المتجاورة ، الواقعة على طرفى النقطة C ، بالدوران حول بعضها البعض .

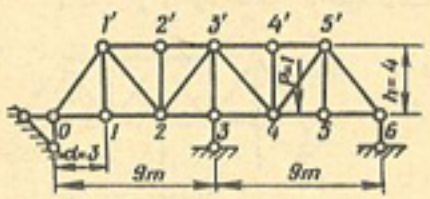
ويكون القسم الأيمن من العتبة (لاحظ الشكل ٧ – ٦٢) ، معرضاً لتأثير القوة $X_1 = 1$ (شكل ٧–٦٣ ، أ) ، التى تديره فى اتجاه عقرب الساعة . ولتوازن هذا القسم ، يجب أن يديره العزم الناجم عن تأثير الإجهادات فى القضبان الأفقية (شكل ٧ – ٦٢) ، بعكس اتجاه عقرب الساعة ، أى يجب أن يكون القضيب العلوى مشدودا ، والقضيب السفلى مضغوطا (شكل ٧ – ٦٣ ، أ) . وهذا يؤدى إلى ظهور منطقة شد من الجهة العليا للقسم الأيمن من العتبة . أما فى القسم الأيسر من العتبة (شكل ٧ – ٦٣ ، ب) فسوف تظهر منطقة الشد ، من الجهة العليا أيضاً .



الشكل ٧ – ٦٣

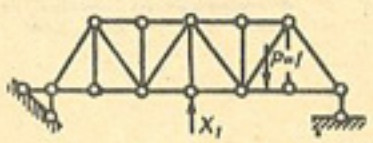
إن الرسوم البيانية للانحرافات δ_{p1} ، الضرورية لرسم خطوط التأثير بالطريقة الكينماتية ، يمكن تخطيطها بأية طريقة كانت ، وخاصة بواسطة الأحمال المرنة .

ويمكن استخدام الطريقة الكينماتية أيضاً ، لرسم خطوط تأثير الإجهادات فى الجمالونات غير المحددة إستاتيكيا . وكمثال معين سنبحث رسم خط تأثير رد فعل المسند المتوسط ، للجمالون المتواصل غير المحدد استاتيكيًّا من الدرجة الأولى ، المبين فى الشكل (٧ – ٦٤) . إن مساحات المقاطع العرضية لكافة قضبان الجمالون ، متساوية .



شكل ٧ – ٦٤

والإنشاء الرئيسى فى هذه الحالة ، مبين فى الشكل (٧ – ٦٥) .



الشكل ٧ – ٦٥

إن المعادلة القانونية ، المعبرة عن مساواة الانحراف الناجم فى اتجاه الإجهاد

المجهول الزائد X_1 للصفر ، تكون على الشكل التالى :

$$X_1\,\delta_{11} + \delta_{1P} = 0$$

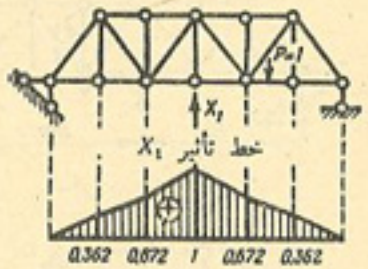
ومنها ينتج أن :

$$X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{\delta_{P1}}{\delta_{11}}$$

إن الرسم البيانى لتغير الانحراف δ_{P1} عند انتقال الحمل $P = 1$ على امتداد الوتر السفلى للجمالون ، يمثل الرسم البيانى للانحرافات الرأسية للوتر السفلى ، الناجمة عن تعرض الإنشاء الرئيسى لتأثير القوة $X_1 = 1$.

إن الإحداثيات الرأسية للوصلات فى مثل هذا الرسم البيانى للجمالون . المطابق للإنشاء الرئيسى الذى نبحثه ، قد حسبت فى البند ٦ — ١٣ ، بطريقة الأحمال المرنة . وقد كان الرسم البيانى للانحراف δ_{P1} ، المخطط طبقا لهذه الإحداثيات ، مبيناً فى الشكل (٦ — ٤٥) . وإحداثياته الرأسية سالبة ، وذلك لأن وصلات الوتر السفلى للجمالون (الإنشاء الرئيسى) تنحرف إلى الأعلى بتأثير القوة $X_1 = 1$ ، أما الحمل $P = 1$ (لاحظ الشكل ٧ — ٦٥) ، الذى يدل على الاتجاه الموجب للانحراف δ_{P1} ، فيكون متجهاً إلى الأسفل .

وبتقسيم الإحداثيات الرأسية لوصلات الرسم البيانى للانحراف δ_{P1} على المقدار ($-\delta_{11}$) ، المساوى للإحداثى الرأسى للرسم البيانى للانحراف δ_{P1} ، الواقع تحت القوة $X_1 = 1$ ، نحصل على خط تأثير الإجهاد X_1 ، المبين فى الشكل (٧ — ٦٦) . وهكذا نجد بأن خط تأثير الإجهاد X_1 ، لا يختلف عن الرسم البيانى للانحراف δ_{P1} ، إلا بالقيمة الثابتة لعامل الضرب ($-\frac{1}{\delta_{11}}$) .



الشكل ٧ — ٦٦

وبعد تخطيط خط تأثير الإجهاد X_1 ، يمكن استناداً إلى مبدأ تراكب

القوى ، إيجاد الإجهاد فى أى قضيب من قضبان الجمالون ، بواسطة الصيغة التالية :

$$N_i = N_i^P + \overline{N}_i\,X_1$$

حيث N_i^P — الإجهاد الناشئ فى القضيب i من الإنشاء الرئيسى ، نتيجة لتأثير الحمل الرأسى المعلوم ؛

$\overline{N}_i$ — الإجهاد الناشئ فى نفس القضيب i من الإنشاء الرئيسى ، نتيجة لتأثير القوة $X_1 = 1$ على الإنشاء الرئيسى..

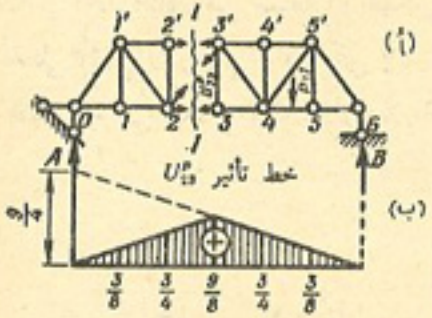
إذن يمكن الحصول على خط تأثير الإجهاد N_i ، بجمع خطوط تأثير الحدين N_i^P و $\overline{N}_i\,X_1$.

ويبين الشكل (٧ — ٦٤) القضيب 3 — 2 للجمالون غير المحدد استاتيكياً من الدرجة الأولى .

نرمز إلى الإجهاد الناشئ فى هذا القضيب بالرمز U_{23} ، ثم نضع الصيغة العامة له :

$$U_{23} = U_{23}^P + \overline{U}_{23}\,X_1$$

ونرسم لكل حد على انفراد ، خط التأثير الخاص به . والآن نستحدث المقطع $I - I$ فى الجمالون (شكل ٧ — ٦٧ ، أ) ، على فرض أن الحمل $P = 1$ يقع إلى يمين المقطع ، ثم نضع معادلة توازن القسم الأيسر المقطوع من الجمالون ، ومنها نستخرج قانون تغير الإجهاد U_{23}^P :



الشكل ٧ — ٦٧

$$\Sigma M_{3'} = A \times 3d - U_{23}^P\,h = 0$$

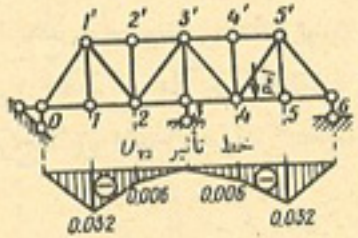
ومنها ينتج أن :

$$U^{P}_{23} = \frac{A \times 3d}{h} = \frac{9}{4} A$$

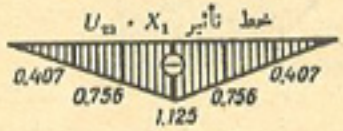
ولرسم القسم الأيمن لخط تأثير الإجهاد U^{P}_{23} ، نضع قيمة القطعة $\frac{3d}{h} = \frac{9}{4}$ على المستقيم العمودى على محور السينات ، فوق المسند الأيسر ، ثم نوصل قمته مع نقطة الصفر الواقعة على العمود المار فى المسند الأيمن . ثم نرسم القسم الأيسر لخط تأثير الإجهاد U^{P}_{23} ، بالاستفادة من الحالة المعروفة التى تجعله يتقاطع مع القسم (المستقيم) الأيمن ، فى نقطة تقع على العمود المار فى نقطة العزم . إن خط تأثير الإجهاد U^{P}_{23} المرسوم بهذه الطريقة (أى الحد الأول من الصيغة الخاصة بالإجهاد U_{23}) للجمالون المحدد استاتيكيًا (النظام الأساسى) ، مبين فى الشكل (٧ — ٦٧ ، ب) .

ويتضح من خط تأثير الإجهاد U^{P}_{23} بأن قيمة الإجهاد الناجم فى القضيب 2—3 ، نتيجة لتعرض الإنشاء الرئيسى لتأثير الإجهاد $X_1 = 1$ ، تساوى $(-\frac{9}{8})$.

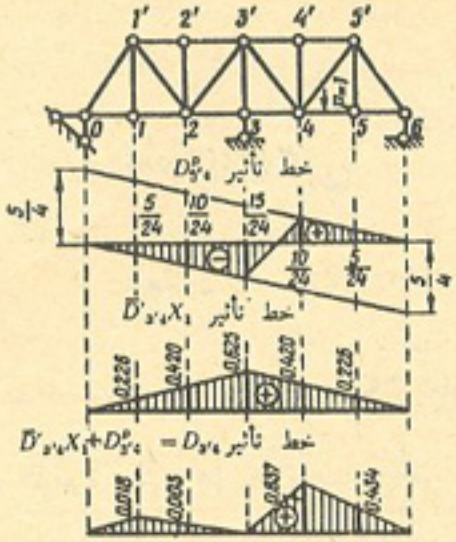
وبضرب الإحداثيات الرأسية لوصلات خط تأثير الإجهاد X_1 (شكل ٧ — ٦٦) فى المقدار $(-\frac{9}{8})$ ، نحصل على الرسم البيانى الموضح فى الشكل (٧ — ٦٨) ، الذى يبين خصائص قانون تغير قيمة $\overline{U}_{23} X_1$ ، أى خصائص خط تأثير الحد الثانى من صيغة الإجهاد U_{23} . وبجمع القيم المستخرجة لإحداثيات خطى تأثير U^{P}_{23} و $\overline{U}_{23} X_1$ (شكل ٧ — ٦٧ ، ب وشكل ٧ — ٦٨) ، نحصل على خط تأثير الإجهاد U_{23} للجمالون غير المحدد استاتيكيًا المعلوم (شكل ٧ — ٦٩) .



الشكل ٧ — ٦٩



الشكل ٧ — ٦٨



الشكل ٧ — ٧٠

ويبين الشكل (٧ — ٧٠) خط تأثير الإجهاد $D_{3'4}$ ، المرسوم بطريقة مماثلة ، لنفس الجمالون بالذات .

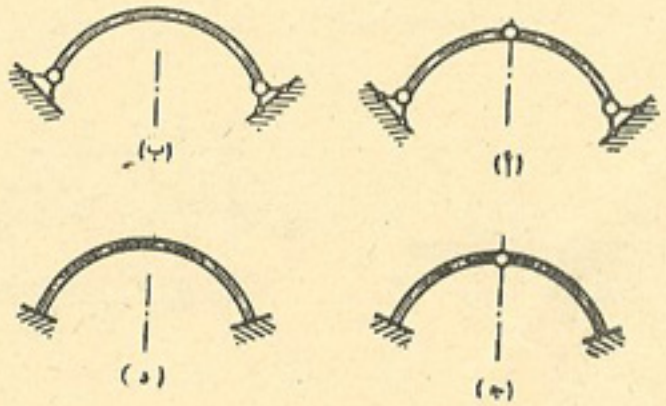
الفصل الثامن

العقود المصمتة

البند ٨ – ١ : خواص العقود وأشكال محاورها

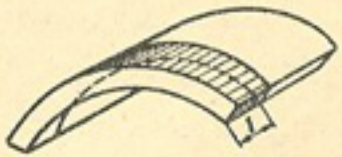
إن الإنشاءات الدفعية ، التي على هيئة عتبات مقوسة ، تسمى بالعقود .

وتختلف العقود عن بعضها البعض ، بعدد المفصلات ، وأنواعها هي : العقود المتصلة بثلاث مفصلات (شكل ٨ – ١ ، أ) ، والعقود المتصلة بمفصلتين (شكل ٨ – ١ ، ب) ، والعقود المتصلة بمفصلة واحدة (شكل ٨ – ١ ، ج) ، والعقود الخالية من المفصلات (شكل ٨ – ١ ، د) . وجميع العقود باستثناء العقود المتصلة بثلاث مفصلات ، تعتبر من الإنشاءات غير المحددة استاتيكياً . وفي إنشاء جسور (كباري) السكك الحديدية ، تستخدم في أكثر الحالات العقود المتصلة بمفصلتين والعقود الخالية من المفصلات .



الشكل ٨ – ١

وعند حساب العقد ، تقطع منه عادة شريحة (strip) ، ذات مستويين موازيين لمحوره ، يبعد أحدهما عن الآخر بمسافة تساوي وحدة قياس واحدة (شكل ٨ – ٢) . وهكذا يبدو العقد وكأنه مؤلف من عدد من الشرائح (العقود الصغيرة) المنفردة ، التي عرض كل منها يساوي وحدة قياس واحدة . وإذا كانت كل شريحة معرضة لتأثير نفس الحمل بالذات ، عندئذ يمكن بحساب مثل هذه الشريحة (العقد الصغير) ، تحديد الإجهادات المؤثرة في العقد (على امتداد وحدة العرض) وتحديد انحرافاته أيضاً . ولهذا السبب تكون طرق حساب كافة أنواع العقود ، متماثلة تماماً .



الشكل ٨ – ٢

وعند اختيار شكل العقد ، يجب أن نحاول قدر الإمكان جعل محور العقد ينطبق مع منحنى الضغط . إن هذا الشكل لمحور العقد ، يسمى ، كما هو معروف ، بالشكل المنطقي (rational) . ويمكن الحصول على التطابق التام لمحور العقد ومنحنى الضغط ، بالنسبة للعقد المتصل بثلاث مفصلات . ولا يمكن الحصول على التطابق التام لمحور العقد غير المحدد استاتيكياً ، ومنحنى الضغط ، وذلك لأنه من المحتم نشوء عزوم الانحناء مهما كان شكل المحور . ولهذا السبب ، يكون أكثر شكل ملائم لمحور العقد في هذه الحالة ، هو الشكل الذي تكون عنده إجهادات التصميم أقل ما يمكن .

ولرسم منحنى الضغط للعقد غير المحدد استاتيكياً ، يجب مقدماً تحديد الإجهادات الزائدة المجهولة ، المعتمدة على انحرافات (تشوهات) العقد بالذات ، ولهذا السبب ، يكون الحصول على الشكل المضبوط لأكثر محور ملائم ، حتى عند تأثير الحمل الساكن (الدائم) ، صعباً للغاية . ولا يمكن حل هذه المسألة ، إلا بواسطة التقريب المتعاقب . ولهذا الغرض يعطى شكل المحور المخطط طبقاً لهذا المنحنى أو ذاك ، وعلى الأغلب طبقاً للقطع المكافئ ، أو يؤخذ المحور المنطبق مع منحنى الضغط ، المار في مراكز المقاطع الثلاثة (أي على فرض أن العقد متصل بثلاث مفصلات) ، ثم يصحح باستخدام منحنى الضغط

الناجم عن حساب العقد غير المحدد استاتيكياً ، ثم يعاد الحساب من جديد . ونستمر فى هذه الحسابات إلى أن نحصل على منحنى الضغط الذى يقارب محور العقد إلى أبعد حد ممكن .

وعند تعرض العقد لتأثير الحمل المتنقل ، تصبح مسألة اختيار شكل محوره ، أكثر تعقيداً من السابق . ويتم اختيار محور العقد فى هذه الحالة ، بمقارنة نتائج حسابات عدة عقود تختلف أشكال محاورها (وعادة تختلف أبعاد مقاطعها أيضاً) . ويجب أن يكون شكل محور العقد الحجرى بشكل بحيث أنه عند أى وضع كان من أوضاع الحمل المتنقل ، لا يخرج منحنى الضغط عن حدود قلب المقطع فى الواقع (وذلك لعدم السماح بنشوء إجهادات شد كبيرة فى البناء الحجرى) .

البند ٨ – ٢ : تغير مقاطع العقد على طوله

إن المعاملات الموجودة قبل المجاهيل ، والحدود المطلقة لمجموعة المعادلات القانونية (معادلات الانحراف) ، الموضوعة لغرض حساب العقد غير المحدد استاتيكياً ، تعتمد على مساحات المقاطع العرضية F وعلى عزوم قصورها الذاتى J ، وهذه المقاطع تتغير عادة على طول العقد .

وعلى سبيل المثال ، فى العقد الخالى من المفصلات ، غالباً ما يؤخذ الثخن (وبالتالى مساحة المقطع العرضى وعزم قصوره الذاتى) ، بحيث يكون متدرج الزيادة ابتداء من وسط الباع إلى المساند . وسبب ذلك يعود إلى أنه عند تعرض العقد لتأثير الحمل الموزع بانتظام على طول الباع بأكمله ، تكون القيمة المطلقة للعزم فى وسط العقد ، أقل عادة من قيمة العزوم الناشئة فى مقاطع المساند .

وفى العقود المتصلة بمفصلتين ، يقل الثخن عادة ابتداء من وسط الباع إلى المساند ، وهو الأمر الذى يرتبط أيضاً بشكل الرسم البيانى للعزوم .

وباعتبار أن القيمتين F و J تدخلان تحت علامة تفاضل صيغة الانحرافات ، المستخدمة لحساب المعاملات والحدود المطلقة لمجموعة المعادلات القانونية (التى

تمثل الانحرافات فى اتجاهات الأربطة المرفوعة) ، يكون من الأفضل أن توضع لهاتين القيمتين ، صيغ تحليلية تحدد قانون تغيرهما على طول العقد . ومن أنجح الصيغ المقترحة بهذا الخصوص ، هى الصيغة التالية .

$$J_x = \frac{J_c}{\left[1 \ (1 - n) \frac{x}{l_1} \right] \cos \varphi_x}$$

حيث x – الإحداثى السينى لمحور العقد ، فى مجموعة الإحداثيات التى تقع نقطة أصلها فى مركز ثقل المقطع الرئيسى (فى قمة العقد) ؛

J_c – عزم القصور الذاتى للمقطع الرئيسى ،

J_x – عزم القصور الذاتى للمقطع العرضى للعقد ، فى نقطة محوره التى إحداثيها السينى هو x ،

φ_x – الزاوية المحصورة بين محور العقد والمستقيم الأفقى ، فى النقطة التى إحداثيها السينى هو x ،

l_1 – طول نصف باع العقد ،

$$n = \frac{J_c}{J_0 \cos \varphi_0}$$

(حيث J_0 و φ_0 تعودان إلى المقطع العرضى لمسند العقد) .

وباستخدام القيم المختلفة للمعامل n ، يمكن تغيير قانون تغير أبعاد المقاطع على طول العقد . وغالباً ما تؤخذ قيمة المعامل n مساوية للواحد ، وفى هذه الحالة تصبح صيغة J_x على الشكل التالى :

$$J_x = \frac{J_c}{\cos \varphi_x}$$

وإذا كان مقطع العقد مستطيلا ، وعرضه b ثابتاً ، عندئذ يمكن التعويض عن J_x و J_c بالصيغتين التاليتين على الترتيب :

$$J_c = \frac{d_c^3 b}{12} \ , \quad J_x = \frac{d_x^3 b}{12}$$

حيث d_x — ثخن العقد فى النقطة التى إحداثيها السينى هو x ،

d_c — ثخن العقد عند المقطع الرئيسى .

ولذلك نجد بأنه عند $n = 1$:

$$\frac{d_x^3\, b}{12} = \frac{d_c^3 b}{12 \cos \varphi_x}$$

ومنها ينتج أن :

$$d_x^3 = \frac{d_c^3}{\cos \varphi_x}$$

وتحدد مساحات المقاطع العرضية F_x و F_c لمثل هذا العقد ، من الصيغتين التاليتين :

$$F_c = b\, d_c \quad \text{و} \quad F_x = b\, d_x$$

إذن فى هذه الحالة ، نجد ما يلى :

$$F_x^3 = \frac{F_c^3}{\cos \varphi_x}$$

أو

$$F_x = \frac{F_c}{\sqrt[3]{\cos \varphi_x}}$$

وفى أغلب الأحيان تستبدل هذه الصيغة عند الحساب ، بصيغة أبسط منها وهى :

$$F_x = \frac{F_c}{\cos \varphi_x}$$

وتبين الحسابات المقارنة ، بأن مثل هذا الاستبدال يؤدى إلى حدوث خطأ فى قيم القوة الدفعية وعزوم الانحناء الناشئة فى العقد ، لا تزيد قيمته على ١٪ من

القيم الحقيقية ، المستخرجة عند تغير المساحة F_x طبقاً للصيغة التالية :

$$F_x = \frac{F_c}{\sqrt[3]{\cos \varphi_x}}$$

وعند حساب العقود المستوية ، التى سهم إنحائها هو $f < \frac{1}{8} l$ (حيث l تمثل باع العقد) ، نجد بأن قيمة $\cos \varphi_x$ لجميع نقاط محور العقد ، لا تختلف إلا قليلا عن الواحد ، الأمر الذى يجعل فى الإمكان استخدام الصيغة التالية بالنسبة لمساحات المقاطع العرضية F_x :

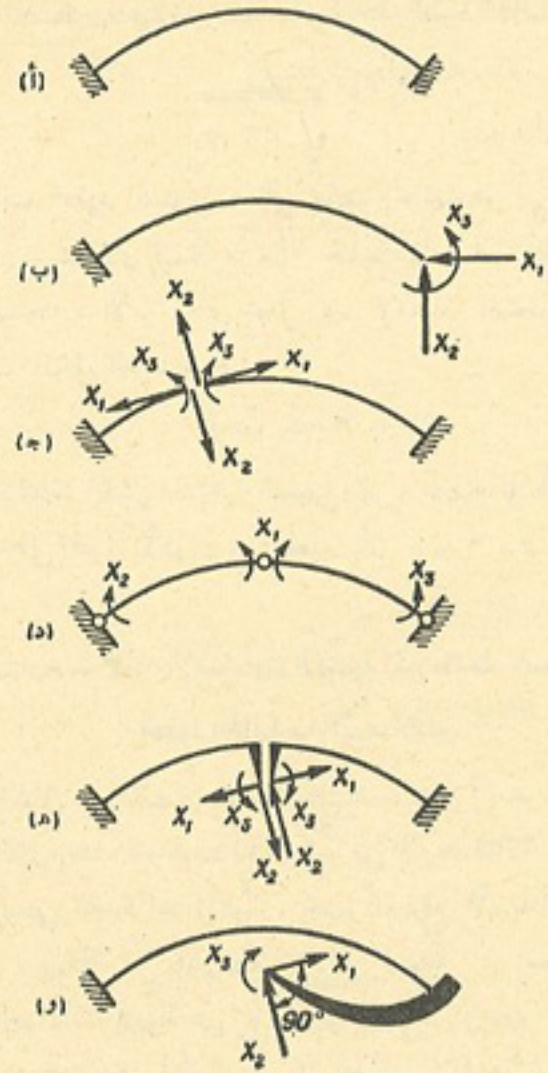
$$F_x = F_c = \text{const}$$

وتؤخذ قيمة قطعة المحور المتناهية الصغر ds ، فى حالة العقود المستوية ، مساوية لمسقطها على المحور الأفقى x ، أى نعتبر بأن $ds = dx$.

البند ٨ — ٣ : الإنشاءات الرئيسية المستخدمة لحساب العقود الخالية من المفصلات

إن العقد الخالى من المفصلات (شكل ٨ — ٣ ، أ) هو عبارة عن محيط مقفل ، وهو بالتالى إنشاء غير محدد استاتيكياً من الدرجة الثالثة . ولذلك للحصول على الإنشاء الرئيسى المحدد استاتيكياً ، يجب أن نرفع الأربطة من العقد الخالى من المفصلات . وبدلا من الأربطة الثلاثة المرفوعة ، نسلط على الإنشاء الرئيسى ثلاثة إجهادات مجهولة هى X_1 ، X_2 و X_3 . ويبين الشكل (٨ — ٣ ، ب ، ج ، د ، هـ ، و) بعض الأنواع الممكن تحقيقها للإنشاء الرئيسى .

إن الإنشاء الرئيسى المبين فى الشكل (٨ — ٣ ، ب) ، يمثل عتبة منحنية ، طرفها الأيسر مثبت ، والقوى المجهولة فيها هى ردود الفعل الثلاثة للمسند الأيمن للعقد الخالى من المفصلات . والإنشاء الرئيسى المبين فى الشكل (٨ — ٣ ، ج) ، ناجم بطريقة قطع العقد الخالى من المفصلات فى مقطعه المتوسط ، ويمثل عتبتين منحنيتين ، كل منهما مثبتة من طرف واحد ، والقوى المجهولة هنا ، هى القوى الطولية وقوى القص وعزوم الانحناء ، الناشئة فى موضع



الشكل ٨ – ٣

القطع . أما فى حالة الإنشاء الرئيسى الذى على هيئة عقد متصل بثلاث مفصلات (شكل ٨ – ٣ ، د) ، فنجد بأن القوى المجهولة هى عزوم الانحناء الناشئة فى كتفى العقد وفى مقطعه الوسطى .

وعند حساب العقد الخالى من المفصلات ، باستخدام الإنشاءات الرئيسية

المبينة فى الشكل (٨ – ٣ ، ب ، جـ ، د) ، يكون شكل مجموعة المعادلات القانونية ، كما يلى :

$$\left.\begin{aligned} X_1\,\delta_{11} + X_2\,\delta_{12} + X_3\,\delta_{13} + \Delta_{1p} &= 0 \\ X_1\,\delta_{21} + X_2\,\delta_{22} + X_3\,\delta_{23} + \Delta_{2p} &= 0 \\ X_1\,\delta_{31} + X_2\,\delta_{32} + X_3\,\delta_{33} + \Delta_{3p} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (8-1)$$

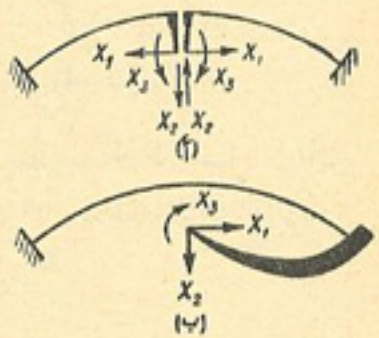
وكما هو معروف (راجع البند ٧ – ٨) عند حساب المحيط المقفل ، يمكن اختيار الإنشاء الرئيسى ، بحيث تكون كافة المعاملات الثانوية للمعادلات القانونية ، مساوية للصفر ، ويكون شكل هذه المعادلات كما يلى :

$$\left.\begin{aligned} X_1\,\delta_{11} + \Delta_{1p} &= 0 \\ X_2\,\delta_{22} + \Delta_{2p} &= 0 \\ X_3\,\delta_{33} + \Delta_{3p} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (8-2)$$

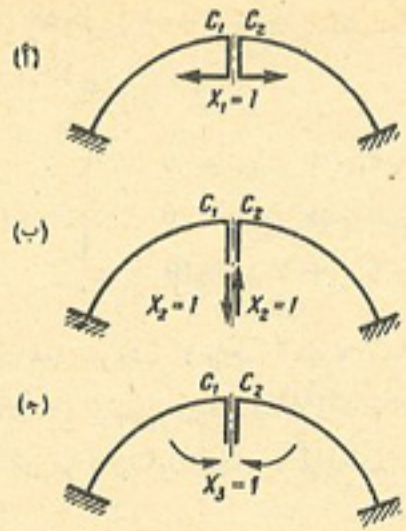
إذن ستكون القوى المجهولة فى هذه الحالة ، مساوية لما يلى :

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} \;,\quad X_2 = -\frac{\Delta_{2p}}{\delta_{22}} \;,\quad X_3 = -\frac{\Delta_{3p}}{\delta_{33}} \qquad (8-3)$$

ولأجل ذلك ، يجب إضافة وتثبيت كابول أو كابولين لا نهائيى الجسوءة ، إلى الأطراف الطليقة للعتبات المنحنية ، كما مبين فى الشكل (٨ – ٣ ، هـ ، و) . ثم تسلط على الأطراف الطليقة للكوابيل (التى يجب أن تنطبق مع المركز المرن للعقد) ، القوى والعزوم المجهولة ، ويجب أن تنطبق اتجاهات القوى المجهولة مع المحاور الرئيسية للأحمال المرنة $\frac{ds}{J}$ (راجع البند ٧ – ٨) . وفى العقد الخالى من المفصلات المتماثل بالنسبة للمحور الرأسى ، يقع المركز المرن على هذا المحور ، ويكون أحد المحورين الرئيسيين للقصور الذاتى ، عموديًا ، والآخر أفقيًا . وفى هذه الحالة ، يأخذ الإنشاءان الرئيسيان المبينان فى الشكل (٨ – ٣ ، هـ ، و) ، الشكل المبين فى الشكل (٨ – ٤ ، أ ، ب) .



الشكل ٨ – ٤



الشكل ٨ – ٥

إن الظرف الذى يجعل الانحرافات الثانوية δ_{12} ، δ_{13} ، δ_{23} ... ، الناجمة عن تأثير الإجهادات المجهولة ، المؤثرة فى مركز الثقل المرن ، تساوى صفراً ، يساعد بسهولة على تحديد طبيعة انحراف الكوابيل اللانهائية الجسوءة ، الناجم عن تأثير كل قوة من القوى المجهولة .

وسوف نبحث فى البداية ، تأثير القوى $X_1 = 1$ على الإنشاء الرئيسى (شكل ٨ – ٥ ، أ) .

بما أن $\delta_{31} = 0$ ، إذن تبقى الكوابيل اللانهائية الجسوءة ، عمودية ، وموازية لبعضها البعض . وتنحرف فى الاتجاه الرأسى (تبعاً للاتجاه المعين للقوى X_1) ، ولكن الانحرافات يجب أن تكون متساوية فى المقدار ، وذلك لأنه إذا حدث العكس ، لما كانت قيمة δ_{21} مساوية للصفر . وتبتعد الكوابيل اللانهائية الجسوءة عن بعضها ، فى الاتجاه الأفقى ، وتكون المسافة الفاصلة بين بعضها البعض ، مساوية للانحراف δ_{11} .

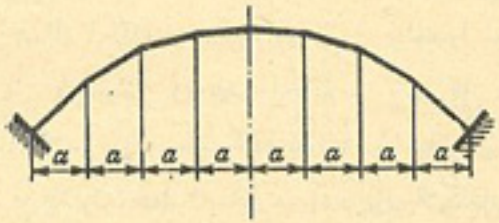
وعند تسليط القوى $X_2 = 1$ على الإنشاء الرئيسى (شكل ٨ – ٥ ، ب) تبقى الكوابيل اللانهائية الجسوءة موازية لبعضها البعض أيضاً ، ولكنها تدور بنفس الزاوية (وذلك لأنه بعكس ذلك ، سوف لا يكون الانحراف δ_{32} مساوياً للصفر) ، وتنحرف معاً فى الاتجاه الأفقى ، وتنحرف بالإضافة إلى ذلك فى الاتجاه الرأسى بالنسبة لبعضها البعض ، بمقدار يساوى δ_{22} .

وعند تعرض الإنشاء الرئيسى لتأثير العزوم $X_3 = 1$ (شكل ٨ – ٥ ، جـ) ، تدور الكوابيل اللانهائية الجسوءة ، حول بعضها البعض بمقدار يساوى δ_{33} ، وكل منها يدور حول المستقيم العمودى فى اتجاهات مختلفة ، بزاوية تساوى $\frac{1}{2}\delta_{33}$. ولا تفترق أو تبتعد الأطراف السفلى للكوابيل ، وذلك لأن $\delta_{13} = 0$. وفى الاتجاه الرأسى ، تنحرف هذه الأطراف إلى الأعلى أو الأسفل (تبعاً للاتجاه المعين للعزوم X_3) ، ولكنها يجب أن تنحرف بنفس المقدار تماماً (وذلك لأن $\delta_{23} = 0$) .

البند ٨ – ٤ : حساب العقد الخالى من المفصلات

غالباً ما يصادفنا حساب العقد ، الذى لا يمكن التعبير عن أشكال محاوره وقوانين تغير أثخان مقاطعه ، بالطرق التحليلية أو باستخدام الصيغ المعقدة . وفى هذه الحالات ، تصبح عملية تحديد قيم الانحرافات بصورة مضبوطة (بأخذ تكامل الصيغ المناظرة) ، غير ممكنة أو صعبة جداً . ولذلك يجب إجراء عملية حساب العقد بإحدى الطرق التقريبية . وسوف نبحث فيما يلى ، طريقتين من هذه الطرق .

وتتلخص إحدى الطرق التقريبية للحساب ، فى استبدال شكل المحور المنحنى بشكل منكسر ، أى بشكل متعدد الأضلاع ، يتراوح عدد أضلاعه عادة بين ٨ – ٢٠ (شكل ٨ – ٦) . وتؤخذ أبعاد المقاطع العرضية فى حدود كل ضلع من الأضلاع ، ثابتة ومساوية لأبعاد انحناء (تقوس) العقد فى المقطع



الشكل ٨ – ٦

العرضى ، ذى الإحداثى السينى المساوى للإحداثى السينى لمنتصف الضلع المناظر من الشكل المتعدد الأضلاع . أن الحمل المؤثر على العقد ، فى حدود كل ضلع من أضلاع الشكل المتعدد الأضلاع ، يستبدل بقوى مركزة ، مؤثرة فى نقاطه العليا (قممه) . وتحدد قيم القوى المركزة ، كما تحدد فى حالة تأثير الحمل فى الوصلات (راجع البند ٢ — ٥) ، أى أنها تساوى ردود فعل المساند (الواقعة فى قمم الشكل المتعدد الأضلاع) فى العتبات البسيطة (الوحيدة الباع) ، المعرضة لتأثير الحمل المؤثر على العقد . أن العقد المتعدد الأضلاع ذى المقطع المتغير المدرج ، الذى حصلنا عليه بهذه الطريقة ، يمكن حسابه بصورة مضبوطة ، باستخدام الطرق العادية لحساب الإنشاءات غير المحددة استاتيكياً (راجع البند ٧—٣) ، مع استخدام طريقة فيريشاجين لحساب الانحرافات . وفى هذه الحالة يمكن استخدام أى إنشاء من الإنشاءات الرئيسية ، المبينة فى الشكلين ٨ — ٣ و ٨ — ٤ (بنقل القوى المجهولة إلى المركز المرن أو بدون ذلك) ، أو باستخدام أى إنشاء رئيسى آخر . إن الإجهادات الداخلية التى حصلنا عليها بالنسبة للعقد المتعدد الأضلاع ، مساوية عملياً للإجهادات الناشئة فى العقد المنحنى .

وسوف نبحث فيما يلى ، فى المثال ١ ، حساب العقد المنحنى بطريقة استبداله بعقد متعدد الأضلاع .

وتتلخص الطريقة الثانية للحساب التقريبى للعقد ، فى تقسيم محور العقد إلى عدد معين من الأقسام (يتراوح عادة بين ٨ — ٢٠) . ثم يتم اختيار الإنشاء الرئيسى (أى إنشاء من الإنشاءات الرئيسية المبينة فى الشكلين ٨ — ٣ و ٨ — ٤ ، أو أى إنشاء آخر) ، ثم تخطط لهذا الإنشاء وحدات الرسوم البيانية والرسم البيانى للتحميل الحقيقى . وبعد ذلك تحسب وحدات الانحراف والانحرافات الناجمة عن تأثير الأحمال الحقيقية (قيم المعامل δ والحدود المطلقة Δ لمجموعة المعادلات القانونية) . ويفترض فى هذه الحالة ، بأن كل صيغة من الصيغ الموجودة تحت علامة التكامل فى صيغة الانحرافات ، تتغير فى حدود كل قسم من أقسام العقد ، طبقاً لقانون الخط المستقيم . إذن فإن التكامل المناظر لكل قسم من أقسام العقد ، يساوى طول ذلك القسم ، مضروباً فى نصف مجموع القيم

الموضوعة تحت علامة التكامل ، المحسوبة لمقاطع العقد ، الواقعة على أطراف أو حدود ذلك القسم . وبناء على ذلك ، نجد مثلا بأن الانحراف δ_{12} يؤخذ مساوياً لما يلى :

$$\delta_{12} = \int_0^s \frac{\overline{M}_1\,\overline{M}_2}{EJ}\,ds \approx \sum_{i=1}^{i=n} \frac{s_i}{2}\left(\frac{\overline{M}_{1,i-n}\;\overline{M}_{2,i-1}}{EJ_{i-1}} + \frac{\overline{M}_{1,i}\,\overline{M}_{2,i}}{EJ_i}\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{i=n} \frac{\overline{M}_{1,i}\,\overline{M}_{2,i}}{EJ_i}\left(\frac{s_i}{2} + \frac{s_{i+1}}{2}\right)$$

حيث s_i — طول القسم رقم i من العقد ، الواقع بين المقطعين العرضيين $i-1$ و i (شكل ٨ — ٧) ؛

$\overline{M}_{1,i}$ و $\overline{M}_{2,i}$ — عزما الانحناء الناشئين فى المقطع رقم i ، نتيجة لتأثير وحدتى القوة المجهولتين $X_1 = 1$ و $X_2 = 1$ على التوالى ؛

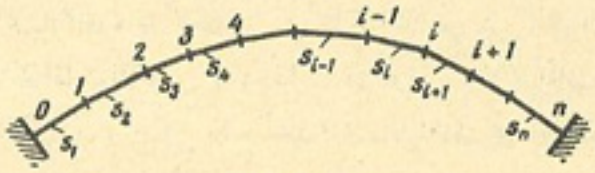
J_i — عزم القصور الذاتى للمقطع رقم i من العقد ؛

n — عدد الأقسام التى قسم إليها العقد .

ويمكن كتابة الصيغة المستخرجة أعلاه ، على الشكل التالى :

$$\delta_{12} = \sum_{i=0}^{i=n} \overline{M}_{1,i}\,\overline{M}_{2,i}\,\frac{\overline{s}_i}{EJ_i} \qquad (8-4)$$

حيث $\overline{s}_i = \frac{s_i + s_{i+1}}{2}$ تمثل نصف مجموع أطوال الأقسام المجاورة للمقطع رقم i .



الشكل ٨ — ٧

وهكذا ، لحساب أى انحراف من الانحرافين δ أو Δ ، يجب القيام بما يلى :

١ — حساب القيم الموجودة تحت التكامل (عوامل الضرب قبل المقدار ds) ، الداخلة فى صيغ الانحرافات لكل مقطع ينطبق مع حافات أقسام العقد ؛

٢ — ضرب كل قيمة نحصل عليها أعلاه ، فى نصف مجموع أطوال الأقسام المجاورة للمقطع المعلوم ،

٣ — جمع حواصل الضرب الناجمة .

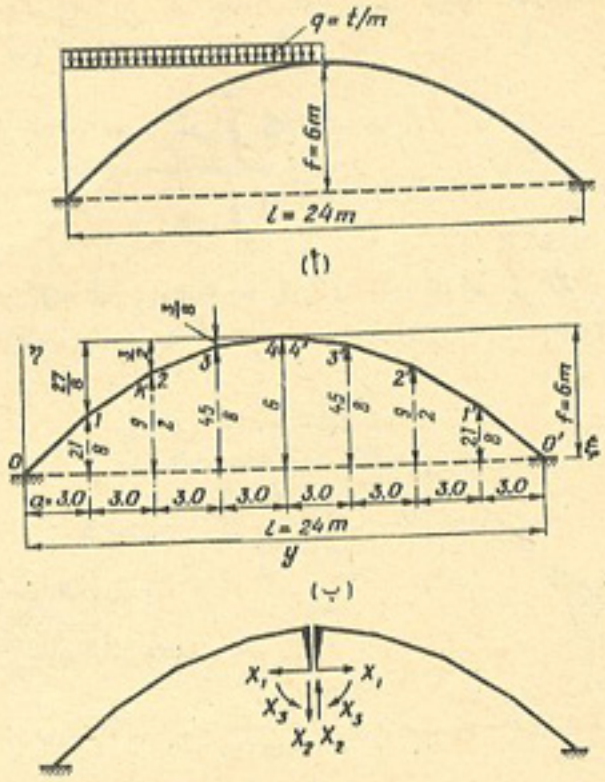
إن حساب العقد فيما بعد ، بالطريقة الثانية (حل المعادلات القانونية وتخطيط الرسم البيانى للإجهادات الناشئة فى العقد) ، لا يختلف بتاتاً عن الحساب العادى للإنشاءات غير المحددة استكاتيكياً .

وسوف نقدم فيما يلى ، فى المثال ٢ ، حساب العقد بالطريقة الثانية .

وعند حساب العقد بأية طريقة كانت ، يمكن تحديد الانحرافات δ و Δ بواسطة الأحمال المرنة . وهذه الطريقة ملائمة بصورة خاصة عند رسم خطوط تأثير الإجهادات فى العقد ، وذلك لأنه فى هذه الحالات ، من الضرورى ليس تحديد انحرافات بعض النقاط المعينة ، بل وكذلك تخطيط الرسوم البيانية للانحرافات ، الأمر الذى يسهل تحقيقه بواسطة الأحمال المرنة خاصة . إن عملية رسم خطوط تأثير الإجهادات فى العقد ، موضحة فى المثال ٣ .

وعند حساب الانحرافات فى العقود التى سهم انحنائها $f > \frac{1}{5} l$ ، يمكن إهمال تأثير القوى الطولية وقوى القص . وبناء على ذلك . لا تدخل فى صيغ الانحرافات إلا الحدود التى تعتمد على عزوم الانحناء . أما عند حساب العقود المستوية (التى سهم انحنائها $f < \frac{1}{5} l$) ، بعد تحديد وحدة الانحراف δ_{11} فى اتجاه القوة الدفعية ، نتيجة لتأثير القوة المجهولة المناظرة $X_1 = 1$ ، يجب بالإضافة إلى ذلك ، أن يؤخذ فى الاعتبار انضغاط العقد ، أى تشوهه الناجم عن تأثير القوى الطولية . وعند تحديد الانحرافات الأخرى (وحدات الانحراف والانحرافات الناجمة عن تأثير الأحمال الحقيقية) يمكن عدم أخذ انضغاط العقد فى الاعتبار ، أى يؤخذ فى الاعتبار التشوه الناجم عن الانحناء .

مثال ١ : يطلب تخطيط الرسوم البيانية لكل من M ، Q و N للعقد المبين فى الشكل (٨ — ٨ ، أ) الذى خطط محوره طبقاً لقطع المكافئ المخروطى ، وقانون تغير عزوم قصوره الذاتى هو $J_x = \frac{J_c}{\cos \varphi_x}$ ، وذلك عند تعرض النصف الأيسر من العقد لتأثير حمل موزع بانتظام كثافته هى $q = 2$ t/m . ويطلب إجراء الحساب المذكور بواسطة الطريقة الأولى من الطريقتين المشروحتين أعلاه فى هذا البند .



الشكل ٨ — ٨

الحل : نقسم باع العقد إلى ٨ أقسام متساوية ، أى نأخذ $n = 8$ و $a = 3$ m ، ثم نرسم فى داخل العقد المذكور ، شكلا متعدد الأضلاع (شكل ٨ — ٨ ، ب) . إن معادلة القطع المكافئ المخروطى فى مجموعة الإحداثيات $\xi 0 \eta$ ، التى تنطبق نقطة أصلها (المنشأ) مع مركز ثقل مقطع المسند الأيسر ، تكون على الشكل التالى :

$$\eta = \frac{4f}{l^2}(l - \xi)\xi = \frac{4 \times 6}{24 \times 24}(24 - \xi)\xi = \frac{24 - \xi}{24}\xi$$

إن قيم η لحافات جميع الأقسام ، المحسوبة من هذه الصيغة ، مبينة فى الشكل (٨ — ٨ ، ب) .

الإنشاء الرئيسى فى هذه الحالة ، هو الإنشاء المبين فى الشكل (٨ — ٨ ، جـ) ، الذى حصلنا عليه بقطع العقد عند مقطع القمة ، ونقل القوى المجهولة إلى المركز المرن .

والآن نحدد الإحداثى الرأسى y_s لمركز الثقل المرن ، فى مجموعة الإحداثيات xy (لاحظ الشكل ٨ – ٨ ، ب) :

$$y_s = \frac{\Sigma \int y \frac{ds}{J}}{\Sigma \int \frac{ds}{J}}$$

ولما كان المقدار J_i ثابتاً ($J_i = \text{const}$) فى حدود كل قسم من الأقسام ، إذن تأخذ صيغة y_s الشكل التالى :

$$y_s = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \times \frac{s_i}{J_i}}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{s_i}{J_i}}$$

حيث s_i – طول القسم رقم i ،

$\frac{y_{i-1} + y_i}{2}$ – الإحداثى الرأسى لمنتصف القسم رقم i .

ولهذه الحالة التى نبحثها الآن ، عند $J_i = \frac{J_c}{\cos \varphi_i}$ ، حيث φ_i – تمثل زاوية ميل القسم رقم i من العقد ، مع الأفق ، نحصل على ما يلى :

$$\frac{s_i}{J_i} = \frac{s_i \times \cos \varphi_i}{J_c} = \frac{a}{J_c}$$

إذن :

$$y_s = \frac{\frac{a}{2J_c} \sum_{i=1}^{i=n} (y_{i-1} + y_i)}{\frac{a}{J_c} n} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} (y_{i-1} + y_i)}{2n}$$

أو إذا أخذنا فى الاعتبار تماثل العقد ، سنحصل على ما يلى :

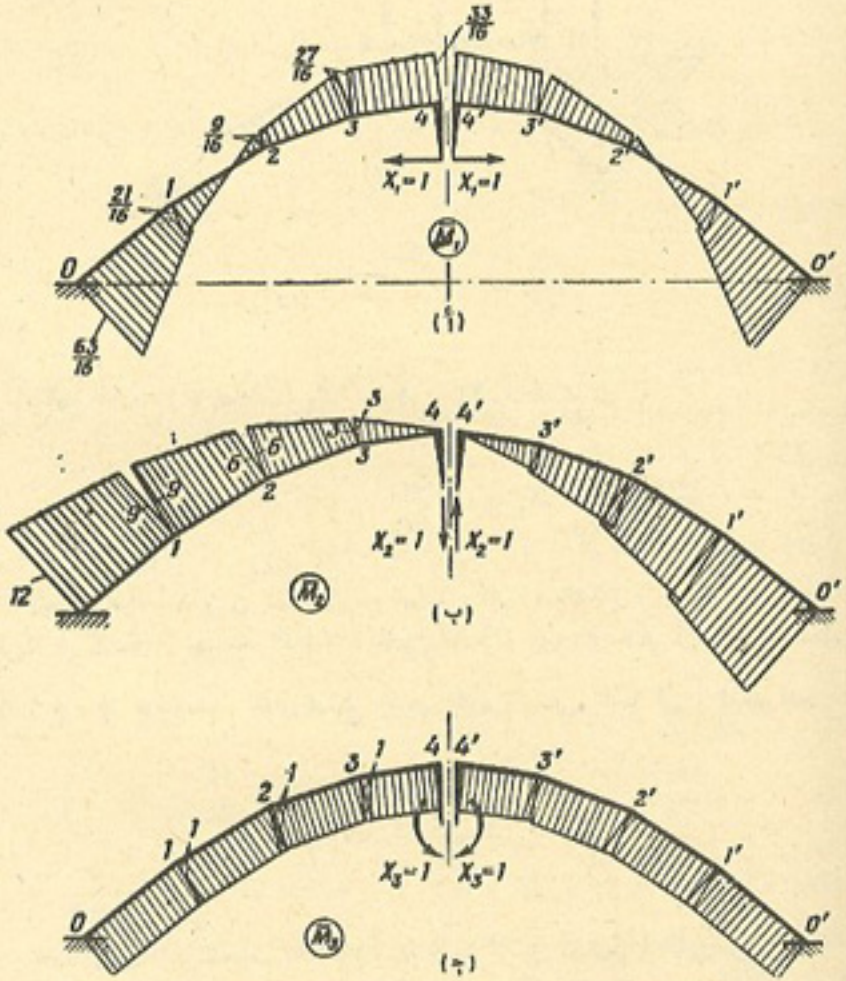
$$y_s = \frac{2 \sum_{i=1}^{i=n/2} (y_{i-1} + y_i)}{2n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} (y_{i-1} + y_i)$$

ومن هذه الصيغة نجد ما يلى :

$$y_s = \frac{1}{8}\left(6 + \frac{27}{8} \times 2 + \frac{3}{2} \times 2 + \frac{3}{8} \times 2 + 0\right) = 2.0625 \text{ m}$$

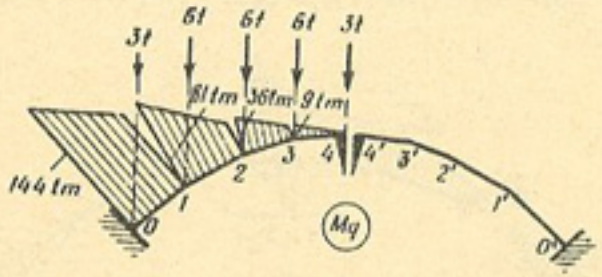
إن القيمة المضبوطة للإحداثى y_s للعقد الذى على شكل قطع مكافىء ، وقانون تغير عزوم قصوره الذاتى هو $J_x = \frac{J_c}{\cos \phi_x}$ ، تساوى $\frac{1}{3} f$ ، أى أنها فى هذه الحالة تقل بمقدار 6.25 cm عن القيمة التى حصلنا عليها . ويمكن تقليل هذا الفرق ، بزيادة عدد أضلاع الشكل المتعدد الأضلاع .

ويبين الشكل (٨ – ٩) الرسوم البيانية لعزوم الانحناء فى الإنشاء الرئيسى ، الناجمة عن تأثير



الشكل ٨ – ٩

وحدات القوى المجهولة ، المؤثرة فى المركز المرن ، أما الشكل (٨ – ١٠) ، فيبين نفس الرسوم البيانية المذكورة ، الناجمة عن تأثير حمل على هيئة قوى مركزة ، موثرة فى قمة النصف الأيسر للعقد الذى على هيئة شكل متعدد الأضلاع . إن قيم القوى الطرفية من القوى المذكورة (فى القمتين 0 و 4) ، تساوى $\frac{qa}{2} = \frac{2\times3}{2} = 3\ t$ ، أما قيم القوى الأخرى (فى القمم 1 ، 2 ، 3) ، فتساوى $qa = 2 \times 3 = 6\ t$.



الشكل ٨ – ١٠

والقوى المجهولة (الإجهادات) X_1 ، X_2 ، X_3 تساوى ما يلى :

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1q}}{\delta_{11}} \quad , \quad X_2 = -\frac{\Delta_{2q}}{\delta_{22}} \quad , \quad X_3 = -\frac{\Delta_{3q}}{\delta_{33}}$$

وتحدد الانحرافات δ و Δ بضرب الرسوم البيانية ، المبينة فى الشكلين (٨ – ٩) و (٨ – ١٠) ، بطريقة فيريشاجين . وفى هذه الحالة ، نعتبر بأن نسبة طول كل ضلع من أضلاع الشكل المتعدد الأضلاع ، إلى عزم القصور الذاتى للمقطع العرضى المناظر ، وهى النسبة $\frac{s_i}{J_i}$ ، تساوى ما يلى .

$$\frac{s_i}{J_i} = \frac{s_i \cos \varphi_i}{J_i} = \frac{a}{J_c}$$

نحدد أولا وحدات الانحراف باستخدام صيغة ضرب الرسمين البيانيين ، اللذين على هيئة شبه المنحرف (راجع الصفحة ٣٨٥) . وبضرب الرسم البيانى للعزوم $\overline{M}_1$ (شكل ٨ – ٩ ، أ) فى نفسه ، نحصل على ما يلى :

$$\delta_{11} = \frac{2a}{6EJ_c}\left[\left(2\times\frac{63}{16}\times\frac{63}{16}+2\times\frac{21}{16}\times\frac{21}{16}+2\times\frac{63}{16}\times\frac{21}{16}\right)+\right.$$
$$+\left(2\times\frac{21}{16}\times\frac{21}{16}+2\times\frac{9}{16}\times\frac{9}{16}-2\times\frac{21}{16}\times\frac{9}{16}\right)+$$
$$+\left(2\times\frac{9}{16}\times\frac{9}{16}+2\times\frac{27}{16}\times\frac{27}{16}+2\times\frac{9}{16}\times\frac{27}{16}\right)+$$
$$\left.+\left(2\times\frac{27}{16}\times\frac{27}{16}+2\times\frac{33}{16}\times\frac{33}{16}+2\times\frac{27}{16}\times\frac{33}{16}\right)\right]=\frac{2457}{32EJ_c}$$

وعند ضرب الرسم البيانى للعزوم $\overline{M}_2$ (شكل ٨ – ٩ ، ب) فى نفسه ، سنحصل على ما يلى :

$$\delta_{22} = \frac{2a}{6EJ_c}\left[(2\times12\times12+2\times9\times9+2\times12\times9)+(2\times9\times9+\right.$$
$$\left.+2\times6\times6+2\times9\times6)+(2\times6\times6+2\times3\times3+2\times6\times3)+2\times3\times3\right]=\frac{1152}{EJ_c}$$

وبضرب الرسم البيانى للعزوم $\overline{M}_3$ (شكل (٨ – ٩ ، جـ) فى نفسه ، سنحصل على ما يلى :

$$\delta_{33} = \frac{a}{EJ_c}\times 8 = \frac{24}{EJ_c}$$

ولتحديد الانحرافات Δ_{1q} ، Δ_{2q} و Δ_{3q} الناجمة عن تأثير الأحمال الحقيقية نضرب وحدات الرسوم البيانية للعزوم $\overline{M}_1$ ، $\overline{M}_2$ و $\overline{M}_3$ (شكل ٨ – ٩) على التوالى ، فى الرسم البيانى للتحميل الحقيقى M_q (شكل ٨ – ١٠) :

$$\Delta_{1q} = \frac{a}{6EJ_c}\left[\left(-2\times\frac{63}{16}\times144-2\times\frac{21}{16}\times81-\frac{63}{16}\times81-\frac{21}{16}\times144\right)+\right.$$
$$+\left(-2\times\frac{21}{16}\times81+2\times\frac{9}{16}\times36-\frac{21}{16}\times36+\frac{9}{16}\times81\right)+$$
$$+\left(2\times\frac{9}{16}\times36+2\times\frac{27}{16}\times9+\frac{9}{16}\times9+\frac{27}{16}\times36\right)+$$
$$\left.+\left(2\times\frac{27}{16}\times9+\frac{33}{16}\times9\right)\right]=-\frac{7371}{8EJ_c}\ ;$$

$$\Delta_{2q} = \frac{a}{6EJ_c}\left[(2\times12\times144+2\times9\times81+12\times81+9\times144)+\right.$$
$$+(2\times9\times81+2\times6\times36+9\times36+6\times81)+(2\times6\times36+$$
$$\left.+2\times3\times9+6\times9+3\times36)+2\times3\times9\right]=\frac{5292}{EJ_c}$$

$$\Delta_{3q} = \frac{a}{6\,EJ_c}\left(\frac{144}{2} + 81 + 36 + 9\right) = -\frac{594}{EJ_c}$$

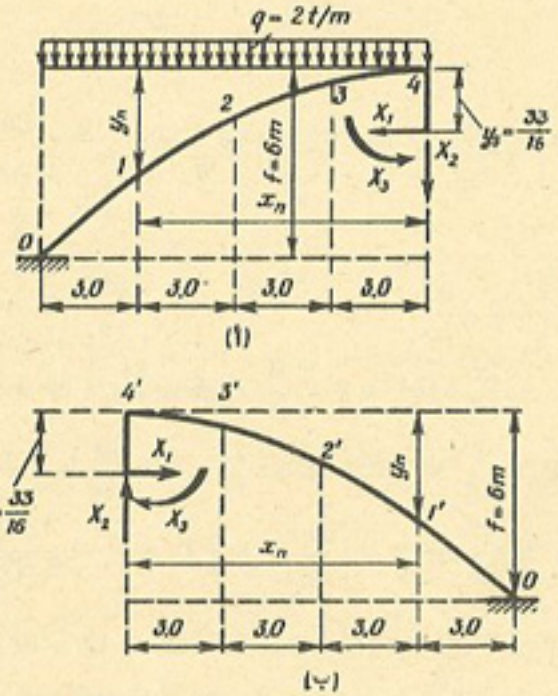
وبتعويض قيم الانحرافات التى حصلنا عليها ، فى الصيغة (3—8) ، نحصل على ما يلى :

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1q}}{\delta_{11}} = \frac{7371 \times 32}{8 \times 2457} = 12\ \text{t}$$

$$X_2 = -\frac{\Delta_{2q}}{\delta_{22}} = \frac{-5292}{1152} = -4.594\ \text{t}$$

$$X_3 = -\frac{\Delta_{3q}}{\delta_{33}} = \frac{594}{24} = 24.75\ \text{tm}$$

والآن نسلط على الإنشاء الرئيسى ، فى المركز المرن ، القوى التالية : $X_1 = 12\text{t}$ و $X_2 = -4.594\ \text{t}$ والعزم $X_3 = 24.75\ \text{tm}$ والحمل المعلوم الموزع بانتظام (شكل ٨ — ١١) .



الشكل ٨ — ١١

وعند حساب إحداثيات الرسوم البيانية لكل من M ، Q و N ، نستخدم الصيغ التالية * :

أ) للنصف الأيسر من العقد (شكل ٨ — ١١ ، أ) :

$$M = X_1 (y - y_s) + X_2 x + X_3 - q\frac{x^2}{2}$$

$$Q = -X_1 \sin\varphi + X_2 \cos\varphi - q x \cos\varphi$$

$$N = X_1 \cos\varphi + X_2 \sin\varphi - q x \sin\varphi$$

ب) للنصف الأيمن من العقد (شكل ٨ — ١١ ، ب) :

$$M = X_1 (y - y_s) + X_2 x + X_3$$

$$Q = -X_1 \sin\varphi + X_2 \cos\varphi$$

$$N = X_1 \cos\varphi + X_2 \sin\varphi .$$

حيث فى هذه الصيغ y ، x تمثلان إحداثيات محور العقد ، ونجد أنه بالنسبة للنصف الأيسر من العقد $x < 0$ (لاحظ الشكل ٨ — ٨ ، ب) ، و φ تمثل الزاوية المحصورة بين مماس المحور الفعلى للعقد ، أى العقد المنحنى المحور ، وبين الأفق ** . والزاوية φ موجبة بالنسبة للنصف الأيسر من العقد ، وسالبة بالنسبة للنصف الأيمن ، وتؤخذ القوة الطولية موجبة عند الضغط وتتبع قاعدة العلامات العامة بالنسبة لعزوم الانحناء وقوى القص (راجع الصفحتين ٢٩ ، ٣٠) .

ولا تختلف الصيغ الخاصة بنصف العقد الأيمن عن صيغ النصف الأيسر منه ، إلا بعدم وجود الحدود التى تأخذ فى الاعتبار تأثير الحمل الموزع .

ولتحديد قيم الزاوية φ ، نستخدم الصيغة التالية ، الخاصة بمحور العقد ، وهى :

$$\eta = \frac{4f}{l^2}(l - \xi)\,\xi$$

$$\tan\phi = \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{4f}{l^2}(l - 2\xi) = \frac{4 \times 6}{24^2}(24 - 2\xi) = 1 - \frac{\xi}{12}$$

ويبين الجدول (٨ — ١) قيم y ، x و φ لمختلف مقاطع العقد .

وقد تم حساب الإحداثيات الرأسية للرسوم البيانية لكل من M ، Q و N ، فى الجداول (٨ — ٢) ، (٨ — ٣) و (٨ — ٤) .

---

* يمكن باستخدام هذه الصيغ حساب الاجهادات الناشئة فى المقاطع العرضية للعقد ، المنطبقة مع قسم الشكل المتعدد الاضلاع فقط .

** عند تخطيط الرسوم البيانية لقوى القص والقوى الطولية ، يؤخذ عادة فى الاعتبار الشكل الفعلى لمحور العقد ، أى الشكل المنحنى وليس الشكل المنكسر .

جدول ٨ – ١

رقم المقطع (لاحظ الشكل ٨–٨ ، ب)	ξ (m)	tan φ	φ	sin φ	cos φ	x (m)	y (m)
0	0	1	45°	0.707	0.707	—12	6
1	3	0.75	36°52′	0.600	0.800	— 9	3.375
2	6	0.5	26°34′	0.447	0.894	— 6	1.5
3	9	0.25	14°02′	0.2425	0.970	— 3	0.375
4,4	12	0	0°	0	1	0	0
3′	15	— 0.25	—14°02′	—0.2425	0.970	3	0.375
2′	18	— 0.5	—26°34′	—0.447	0.894	6	1.5
1′	21	— 0.75	—36°52′	—0.600	0.800	9	3.375
0′	24	— 1	—45°	—0.707	0.707	12	6

جدول ٨ – ٢

حساب الإحداثيات الرأسية للرسم البياني للعزوم M

رقم المقطع	X_1	$y - y_s$	$X_1 (y - y_s)$	X_2	x	$X_2 x$	X_3	$-\frac{qx^2}{2} = -x^2$ (النصف الأيسر من العقد)	الإحداثيات الرأسية للرسم البياني للعزوم M (tm)
0	12.000	3.9375	47.25	— 4.594	—12.00	55.13	24.75	—144.00	—16.87
1		1.3125	15.75		— 9.00	41.35		— 81.00	0.85
2		—0.5625	— 6.75		— 6.00	27.56		— 36.00	9.56
3		—1.6875	—20.25		— 3.00	13.78		— 9.00	9.28
4,4′		—2.0625	—24.75		0	0		0	0
3′		—1.6875	—20.25		3.00	—13.78		—	— 9.28
2′		—0.5625	— 6.75		6.00	—27.56		—	— 9.56
1′		1.3125	15.75		9.00	—41.35		—	— 0.85
0′		3.9375	47.25		12.00	—55.13		—	16.87

جدول ٨ – ٣

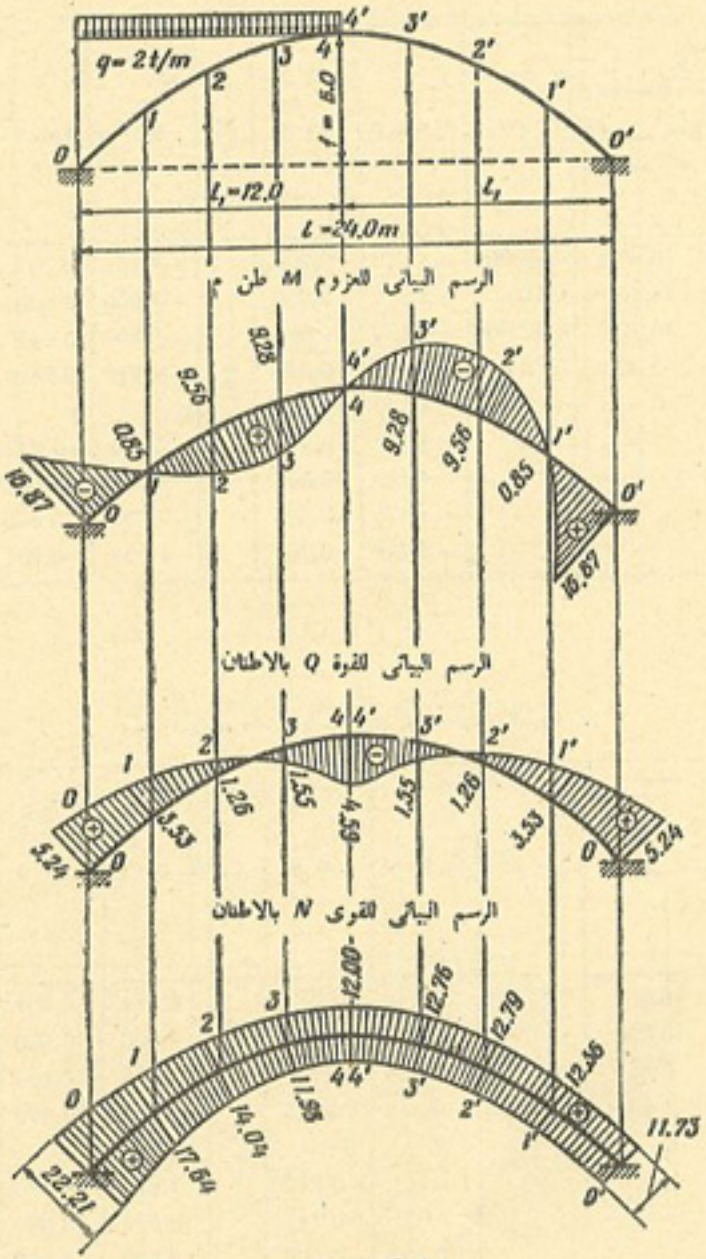
حساب الإحداثيات الرأسية للرسم البياني لقوى القص Q

رقم المقطع	X_1	sin φ	$-x_1 \sin\varphi$	X_2	cos φ	$x_2 \cos\varphi$	qx	$-qx\cos\varphi$ (للنصف العقد الأيسر)	الإحداثيات الرأسية للرسم البياني لقوى القص Q (t)
0	12.000	0.707	—8.484	— 4.594	0.707	—3.248	—24.000	16.968	5.24
1		0.600	—7.200		0.800	—3.675	—18.000	14.400	3.53
2		0.447	—5.364		0.894	—4.109	—12.000	10.728	1.26
3		0.2425	—2.910		0.970	—4.457	— 6.000	5.820	— 1.55
4,4′		0	0		1.0	—4.594	0	0	— 4.59
3′		—0.2425	2.910		0.970	—4.457	—	—	— 1.55
2′		—0.447	5.364		0.894	—4.109	—	—	1.26
1′		—0.600	7.200		0.800	—3.675	—	—	3.53
0′		0.707	8.484		0.707	—3.248	—	—	5.24

جدول ٨ – ٤

حساب الإحداثيات الرأسية للرسم البياني للقوى الطولية N

رقم المقطع	X_1	cos φ	$X_1 \cos\varphi$	X_2	sin φ	$X_2 \sin\varphi$	qx	$-qx\sin\varphi$ (لنصف العقد الأيسر)	الإحداثيات الرأسية للرسم البياني لقوى الطولية N (t)
0	12.000	0.707	8.484	— 4.594	0.707	—3.248	—24.000	16.968	22.21
1		0.800	9.600		0.600	—2.756	—18.000	10.800	17.64
2		0.894	10.728		0.447	—2.054	—12.000	5.364	14.04
3		0.970	11.640		0.2425	—1.114	— 6.000	1.455	11.98
4,4		1.0	12.000		0	0	0	0	12.00
3′		0.970	11.640		—0.2425	1.114	—	—	12.76
2′		0.894	10.728		—0.447	2.054	—	—	12.79
1′		0.800	9.600		—0.600	2.756	—	—	12.36
0′		0.707	8.484		—0.707	3.248	—	—	11.73



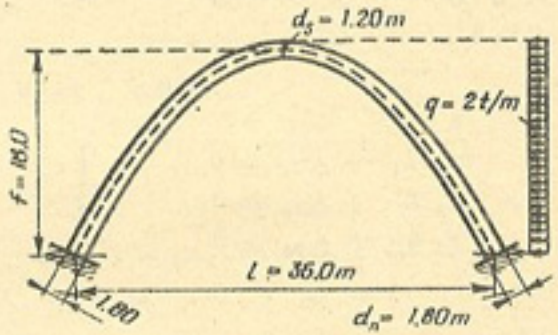
الشكل ٨ – ١٢

وقد خططت الرسوم البيانية للعزوم M وقوى القص Q والقوى الطولية N فى الشكل (٨ – ١٢) ، طبقاً لقيم الإحداثيات الرأسية المدرجة فى الجداول (٨ – ٢) ، (٨ – ٣) و (٨ – ٤) .

والآن نقوم بمراجعة الانحراف (التشوه) للرسم البيانى للعزوم M (شكل ٨ – ١٢) . ولهذا الغرض ، يمكن مثلا ضرب هذا الرسم البيانى فى الرسم البيانى للعزوم M_2 (شكل ٨ – ٩ ، ب) ، وذلك كما يلى :

$$\frac{2a}{6EJ_c}\,[(2\times 12\times 16.87 - 2\times 9\times 0.85 - 12\times 0.85 + 9\times 16.87) -$$
$$- (2\times 9\times 0.85 + 2\times 6\times 9.56 + 9.56\times 9 + 6\times 0.85) -$$
$$- (2\times 6\times 9.56 + 2\times 3\times 9.28 + 6\times 9.28 + 3\times 9.56) -$$
$$- 2\times 3\times 9.28] = \frac{1}{EJ_c}\,(556.7 - 557.1) \approx 0$$

مثال ٢ : يطلب تخطيط الرسوم البيانية لكل من M ، Q و N لعقد المتماثل فى المقطع المتغير ، والمحور المخطط على هيئة قطع مكافىء تربيعى ، الناجمة عن تعرض العقد لتأثير حمل أفقى جانبى موزع بانتظام ، تبلغ شدته $q = 2\ t/m^2$ (شكل ٨ – ١٣) . وعند الحساب



الشكل ٨ – ١٣

يجب أن يؤخذ فى الاعتبار انضغاط العقد * . هذا مع العلم بأن باع العقد يساوى $l = 36$ m ، وسهم انحنائه هو $f = 18$ m ، تخن العقد عند الكتف يساوى $d_a = 1.8$ m وتخنه عند مقطع القمة يساوى $d_c = 1.2$ m أما فى بقية مقاطع العقد الأخرى ، فيحدد التخن من الصيغة التالية :

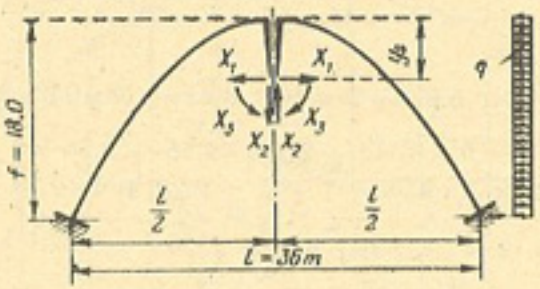
$$d_x = d_c + \frac{d_a - d_c}{0.5\,l}\,|x|$$

---

* فى هذه الحالة $f = 0.5\,l$ ، أى أن $f > \frac{1}{3}\,l$ ، ولذلك يمكن عدم أخذ انضغاط العقد فى الاعتبار . ولكن طلب فى هذه المسألة أخذ الانضغاط فى الاعتبار ، لكى يتعرف القارىء على طريقة حساب ذلك .

حيث $|x|$ – القيمة المطلقة للإحداثى السينى للمقطع الذى يتم بحثه (لاحظ الشكل ٨ – ١٥) .

إن عرض العقد ، فى الاتجاه العمودى على الشكل ، يساوى 1.0 m .



الشكل ٨ – ١٤

الحل : إن الإنشاء الرئيسى ، مع القوى المجهولة الزائدة ، المؤثرة فى المركز المرن ، مبين فى الشكل (٨ – ١٤) .

وتكون المعادلات القانونية على الشكل التالى :

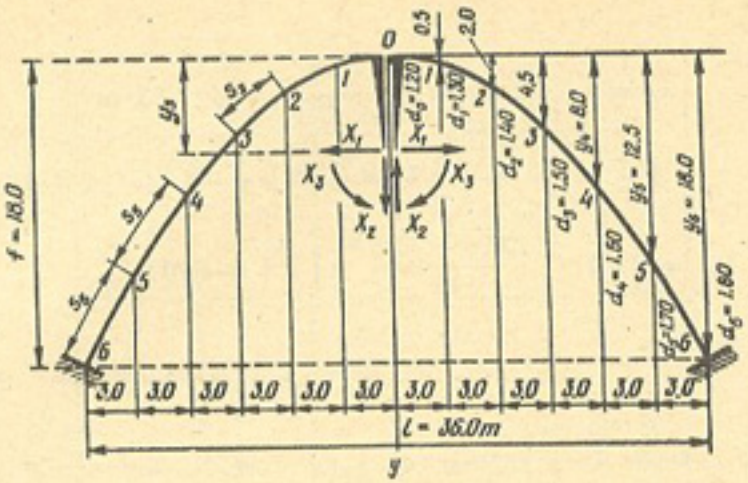
$$\left.\begin{aligned} X_1\,\delta_{11} + \Delta_{1q} &= 0 \\ X_2\,\delta_{22} + \Delta_{2q} &= 0 \\ X_3\,\delta_{33} + \Delta_{3q} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

ومنها نجد أن :

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= -\frac{\Delta_{1q}}{\delta_{11}} \\ X_2 &= -\frac{\Delta_{2q}}{\delta_{22}} \\ X_3 &= -\frac{\Delta_{3q}}{\delta_{33}} \end{aligned}\right\}$$

ولحساب الانحرافات δ_{11} ، δ_{22} ، δ_{33} ، Δ_{1q} ، Δ_{2q} و Δ_{3q} ، نقسم باع العقد إلى ١٢ قسماً متساوياً (شكل ٨ – ١٥) .

$$a = \frac{l}{12} = \frac{36}{12} = 3.0 \text{ m}$$



الشكل ٨ – ١٥

ونحسب الإحداثيات الرأسية لمحور العقد ، من الصيغة التالية :

$$y = \frac{4f}{l^2}\,x^2 = \frac{4 \times 18}{36^2}\,x^2 = \frac{x^2}{18}$$

إن قيم الاحداثيات الرأسية للعقد المحسوبة باستخدام هذه الصيغة ، مبينة فى الشكل (٨ – ١٥) .

والآن نضع الجدول (٨ – ٥) الذى تبين فيه خواص العقد الهندسية ، الضرورية للحساب فيما بعد . وتحدد الزاوية φ المحصورة بين مماس محور العقد ، والمحور x ، من المعادلة التالية :

$$\tan\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{l^2}\,2x = \frac{8f}{l^2}\,x = \frac{8 \times 18}{36^2}\,x = \frac{x}{9}$$

وبالنسبة للنصف الأيمن من العقد ، نجد بأن $\tan\varphi$ ، وبالتالى قيم الزاوية φ تكون موجبة ، أما بالنسبة للنصف الأيسر من العقد ، فتكون القيم المذكورة سالبة . إن قيم أنصاف مجموع أطوال الأقسام $\bar{s}$ ، المجاورة للمقطع الذى يجرى بحثه ، تحدد تقريباً من الصيغة التالية $\bar{s}_i = \frac{a}{\cos\varphi_i}$ ، باستثناء المقطعين 0 و 6 ، التى نحصل لهما على ما يلى :

$$\bar{s}_0 = \frac{a}{2\cos\varphi_0} = \frac{3}{2 \times 1} = 1.5 \text{ m}$$

$$\bar{s}_6 = \frac{a}{2 \cos \varphi_6} = \frac{3}{2 \times 0.4472} = 3.35 \text{ m}$$

وقد حددت قيم أثخان العقد d من الصيغة المدرجة فى المسألة ، وذلك كما يلى :

$$d = 1.20 + \frac{1.80 - 1.20}{18} \times |x| = 1.20 + \frac{|x|}{30}$$

أما عزوم القصور الذاتى فتساوى $J = \frac{1 d^3}{12}$.

إن الإحداثى السينى x_s للمركز المرن ، فى مجموعة الإحداثيات المأخوذة (لاحظ الشكل ٨ – ١٥) ، يساوى صفراً ، أما الإحداثى الرأسى للمركز المرن ، فيساوى ما يلى :

$$y_s = \frac{\Sigma\, y \frac{d s}{J}}{\Sigma \frac{d s}{J}} \approx \frac{\Sigma\, y \frac{\bar{s}}{J}}{\Sigma \frac{\bar{s}}{J}} = \frac{496.7}{91.9} = 5.40 \text{ m}$$

وقد أخذت قيمة البسط والمقام من مجاميع الجدول (٨ – ٥) .

تحديد وحدات الانحراف : تحدد قيمة الانحراف δ_{11} ، بحساب القوى الطولية من الصيغة التالية :

$$E\,\delta_{11} = 2 \left(\Sigma\, \bar{M}_1^2 \frac{\bar{s}}{J} + \Sigma\, \bar{N}_1^2 \frac{\bar{s}}{F} \right)$$

حيث :

$$\bar{M}_1 = 1\,(y - y_s)$$
$$\bar{N}_1 = 1 \times \cos \varphi$$
$$F = 1 \times d$$

وبالتالى نحصل على ما يلى :

$$E\,\delta_{11} = 2 \left[\Sigma\, (y - y_s)^2 \frac{\bar{s}}{J} + \Sigma \cos^2 \varphi \frac{\bar{s}}{F} \right]$$

وفى هذه الصيغة نجد بأن المعامل 2 الموضوع أمام القوس الكبير ، يشير إلى أن المجموع يؤخذ بالنسبة لنصف واحد من نصفى العقد فقط . ولحساب الانحراف $E\,\delta_{11}$ نضع الجدول (٨ – ٦) .

جدول ٨ – ٥

$y \frac{\bar{s}}{J}$	$\frac{\bar{s}}{J}$	J (m^4)	d (m)	$\bar{s}$ (m)	sin φ		cos φ	tan φ (نصف العقد الأيمن)	y (m)	x (m)		رقم المقطع
					نصف العقد الأيمن	نصف العقد الأيسر				نصف العقد الأيمن	نصف العقد الأيسر	
0	10.4	0.144	1.20	1.50	0	0	1	0	0	0	0	0
8.7	17.3	0.183	1.30	3.16	0.3162	—0.3162	0.9487	0.3333	0.5	3	— 3	1
31.6	15.8	0.229	1.40	3.61	0.5547	—0.5547	0.8321	0.6667	2	6	— 6	2
67.9	15.1	0.281	1.50	4.24	0.7071	—0.7071	0.7071	1.0000	4.5	9	— 9	3
116.8	14.6	0.341	1.60	5.00	0.8000	—0.8000	0.6000	1.3333	8	12	—12	4
147.5	11.8	0.409	1.70	5.83	0.8575	—0.8575	0.5145	1.6667	12.5	15	—15	5
124.2	6.9	0.486	1.80	3.35	0.8944	—0.8944	0.4472	2.0000	18	18	—18	6
496.7	91.9	المجموع										

جدول ٨ – ٦

رقم المقطع	y (m)	$y - y_0$	$(y - y_0)^2$	$\frac{\bar{s}}{\bar{J}}$	$(y - y_0)^2 \frac{\bar{s}}{\bar{J}}$	$\cos \varphi$	$\cos^2 \varphi$	$\bar{s}$ (m)	F (m²)	$\frac{\bar{s}}{\bar{F}}$	$\cos^2 \varphi \frac{\bar{s}}{\bar{F}}$
0	0	— 5.40	29.16	10.4	303.3	1	1	1.50	1.20	1.25	1.25
1	0.5	— 4.90	24.01	17.3	415.4	0.949	0.901	3.16	1.30	2.43	2.18
2	2	— 3.40	11.56	15.8	182.6	0.832	0.692	3.61	1.40	2.58	1.79
3	4.5	— 0.90	0.81	15.1	12.2	0.707	0.500	4.24	1.50	2.83	1.41
4	8	2.60	6.76	14.6	98.7	0.600	0.360	5.00	1.60	3.12	1.12
5	12.5	7.10	50.41	11.8	594.8	0.514	0.264	5.83	1.70	3.43	0.90
6	18	12.60	158.76	6.9	1095.4	0.447	0.200	3.35	1.80	1.86	0.37
			المجموع		2702.4	—	—	—	—	—	9.02

وبناء على مجاميع الجدول (٨ – ٦) ، نجد ما يلي :

$$E\,\delta_{11} = 2\,(2702.4 + 9.02) = 5422.8$$

ونحدد الانحراف δ_{22} بدون حساب القوى الطولية ، من الصيغة :

$$\Sigma\,\delta_{22} = 2\,\Sigma\,\overline{M}_2^2\,\frac{\bar{s}}{\bar{J}}$$

حيث : $\overline{M}_2 = 1 \times x$ ، وبالتالي يكون لدينا ما يلي :

$$E\,\delta_{22} = 2\,\Sigma\,x^2\,\frac{\bar{s}}{\bar{J}}$$

ولتحديد الانحراف δ_{22} ، نضع الجدول (٨ – ٧) .

جدول ٨ – ٧

رقم المقطع	x (m)	x^2	$\frac{\bar{s}}{\bar{J}}$	$x^2 \frac{\bar{s}}{\bar{J}}$
0	0	0	10.4	0
1	3	9	17.3	156
2	6	36	15.8	569
3	9	81	15.1	1223
4	12	144	14.6	2102
5	15	225	11.8	2655
6	18	324	6.9	2236
		المجموع		8941

واستناداً إلى مجموع الجدول (٨ – ٧) نجد ما يلي :

$$E\,\delta_{22} = 2 \times 8941 = 17882$$

ونحدد الانحراف δ_{33} من الصيغة التالية :

$$E\,\delta_{33} = 2\ \overline{\Sigma}_3^2\ \frac{\bar{s}}{\bar{J}}$$

حيث : $\overline{M}_3 = 1$ ، إذن يكون لدينا بالتالى ما يلى :

$$E\,\delta_{33} = 2\ \Sigma\ \frac{\bar{s}}{\bar{J}}$$

ونحصل استناداً إلى مجموع الجدول (٨ – ٥) على ما يلى :

$$E\,\delta_{33} = 2 \times 91.9 = 183.8$$

ثم نحدد الانحرافات الناجمة عن الحمل الحقيقى ، باستخدام الصيغ التالية :

$$E\,\Delta_{1q} = \Sigma\ \overline{M}_1\ M_q\ \frac{\bar{s}}{\bar{J}}$$

$$E\,\Delta_{2q} = \Sigma\ \overline{M}_2\ M_q\ \frac{\bar{s}}{\bar{J}}$$

$$E\,\Delta_{3q} = \Sigma\ \overline{M}_3\ M_q\ \frac{\bar{s}}{\bar{J}}$$

حيث : $\overline{M}_1 = y - y_s$ ، $\overline{M}_2 = x$ ، $\overline{M}_3 = 1$

$$M_q = -\frac{q\,y^2}{2} = -\frac{2\,y^2}{2} = -y^2$$

إذن يكون لدينا :

$$E\,\Delta_{1q} = -\ \Sigma\ (y - y_s)\ y^2\ \frac{\bar{s}}{\bar{J}}$$

$$E\,\Delta_{2q} = -\ \Sigma\ x\ y^2\ \frac{\bar{s}}{\bar{J}}$$

$$E\,\Delta_{3q} = -\ \Sigma\ y^2\ \frac{\bar{s}}{\bar{J}}$$

إن علامات المجاميع الداخلة فى هذه الصيغ ، تدل على أن الجمع قد تم بالنسبة لنصف العقد الأيمن فقط ، وذلك لعدم نشوء أية عزوم فى الإنشاء الرئيسى ، فى نصف العقد الأيسر ($M_q = 0$) . ولحساب الانحرافات الناجمة عن الأحمال الحقيقية ، نقوم بوضع الجدول (٨ – ٨) .

واستناداً إلى مجاميع الجدول (٨ – ٨) نضع ما يلى :

$$E\,\Delta_{1q} = -\ 43178$$
$$E\,\Delta_{2q} = -\ 82255$$
$$E\,\Delta_{3q} = -\ 5387.1$$

وبتعويض قيم الانحرافات التى حصلنا عليها الآن ، فى الصيغة (3 — 8) الخاصة بالقوى المجهولة X_1 ، X_2 و X_3 ، نحدد قيم هذه القوى المجهولة :

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1q}}{\delta_{11}} = \frac{43178}{5422.8} = 7.96\ \text{t}$$

$$X_2 = -\frac{\Delta_{2q}}{\delta_{22}} = \frac{82255}{17882} = 4.60\ \text{t}$$

$$X_3 = -\frac{\Delta_{3q}}{\delta_{33}} = \frac{5387.1}{183.8} = 29.31\ \text{tm}$$

جدول ٨ – ٨

رقم المقطع	x	y	$\frac{\bar{s}}{\bar{J}}$	$y - y_s$	y^2	$y^2\,\frac{\bar{s}}{\bar{J}}$	$y^2\,(y - y_s)\,\frac{\bar{s}}{\bar{J}}$	$x\,y^2\,\frac{\bar{s}}{\bar{J}}$
0	0	0	10.4	—5.40	0	0	0	0
1	3	0.5	17.3	—4.90	0.25	4.3	— 21	13
2	6	2	15.8	—3.40	4	63.2	— 215	379
3	9	4.5	15.1	—0.90	20.25	305.8	— 275	2752
4	12	8	14.6	2.60	64	934.4	2429	11213
5	15	12.5	11.8	7.10	156.25	1843.8	13091	27657
6	18	18	6.9	12.60	324	2235.6	28169	40241
المجموع						5387.1	43178	82255

والآن نسلط على الإنشاء الرئيسى ، فى المركز المرن ، القوتين $X_1 = 7.96$ t و $X_2 = 4.60$ t والعزم $X_3 = 29.31$ tm ، والحمل المعلوم الموزع بانتظام (شكل ٨ – ١٤) .

ولدى حساب الإحداثيات الرأسية للرسوم البيانية لكل من M ، Q و N ، نستخدم الصيغ التالية :

أ – لنصف العقد الأيسر :

$$M = X_1 (y - y_s) + X_2 x + X_3$$
$$Q = X_1 \sin \varphi + X_2 \cos \varphi$$
$$N = X_1 \cos \varphi - X_2 \sin \varphi$$

ب – لنصف العقد الأيمن :

$$M = X_1 (y - y_s) + X_2 x + X_3 - \frac{q y^2}{2}$$
$$Q = X_1 \sin \varphi + X_2 \cos \varphi - q y \sin \varphi$$
$$N = X_1 \cos \varphi - X_2 \sin \varphi - q y \cos \varphi$$

ولا تختلف صيغ نصف العقد الأيسر عن صيغ نصفه الأيمن ، إلا بعدم وجود الحدود التي تأخذ في الاعتبار الحمل الموزع بانتظام q .

ثم نحدد الإحداثيات الرأسية للرسوم البيانية لكل من M ، Q و N ، باستخدام الجداول (٨ – ٩) ، (٨ – ١٠) و (٨ – ١١) .

جدول ٨ – ٩

حساب الإحداثيات الرأسية للرسم البياني للمزوم M

رقم القطع		X_1	$y - y_s$	$X_1 (y - y_s)$	X_2	x	$X_2 x$	X_3	$\frac{q y^2}{2} = -y^2$ (لنصف العقد الأيمن)	الإحداثيات الرأسية لرسم البياني للمزوم M (tm)
0	نصف العقد الأيسر	7.96	–5.40	– 42.96	4.60	0	0	29.31	–	– 13.67
1			–4.90	– 39.00		– 3	–13.80		–	– 23.49
2			–3.40	– 27.06		– 6	–27.60		–	– 25.35
3			–0.90	– 7.16		– 9	–41.40		–	– 19.25
4			2.60	20.70		–12	–55.20		–	– 5.19
5			7.10	56.52		–15	–69.00		–	16.83
6			12.60	100.30		–18	–82.80		–	46.81
0	نصف العقد الأيمن		–5.40	– 42.98		0	0		0	– 13.67
1			–4.90	– 39.00		3	13.80		– 0.25	3.86
2			–3.40	– 27.06		6	27.60		– 4	25.85
3			–0.90	– 7.16		9	41.40		– 20.25	43.30
4			2.60	20.70		12	55.20		– 64	41.21
5			7.10	56.52		15	69.00		– 156.25	– 1.42
6			12.60	100.30		18	82.80		– 324	–111.59

حساب قيم الإحداثيات الرأسية لرسم البياني لقوى القص Q

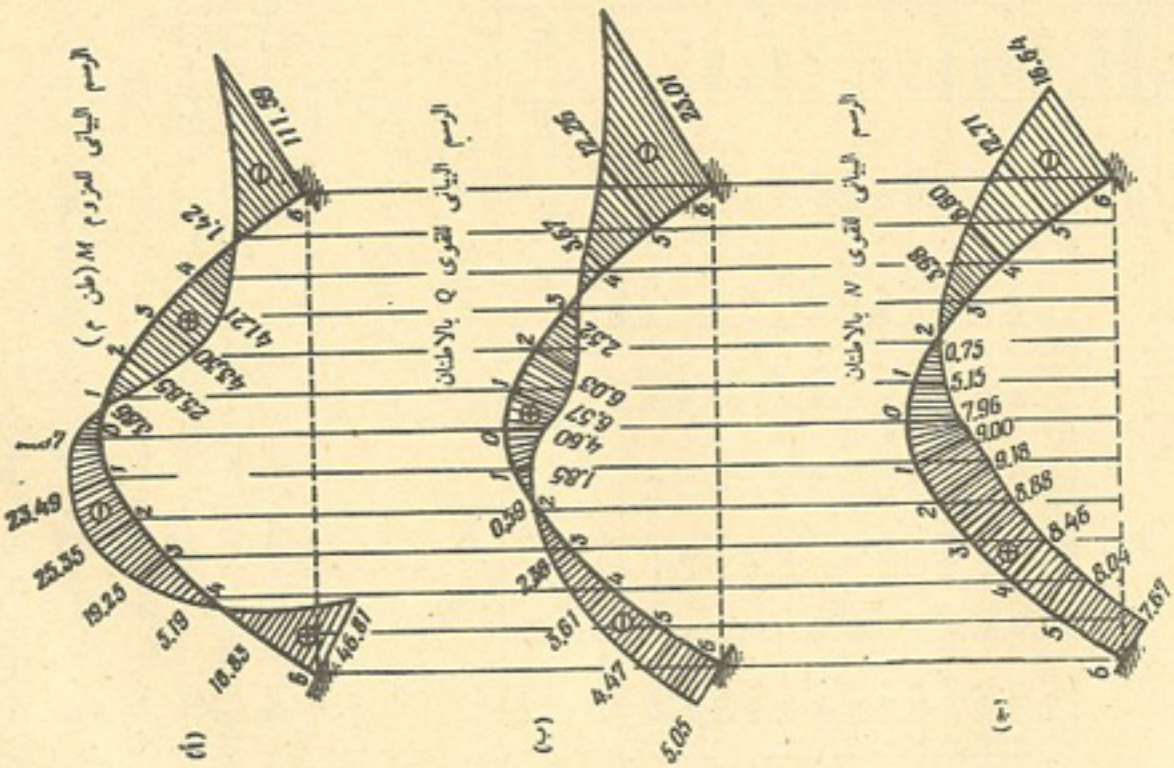
رقم القطع		X_1	$\sin \varphi$	$X_1 \sin \varphi$	X_2	$\cos \varphi$	$X_2 \cos \varphi$	$-q y = -2y$	$-q y \sin \varphi$ (لنصف العقد الأيمن)	الإحداثيات الرأسية لرسم البياني لقوى القص Q (t)
0	نصف العقد الأيسر	7.96	0	0	4.60	1	4.60	–	–	4.60
1			–0.316	– 2.52		0.949	4.37	–	–	1.85
2			–0.555	– 4.42		0.832	3.83	–	–	0.59
3			–0.707	– 5.63		0.707	3.25	–	–	2.38
4			–0.800	– 6.37		0.600	2.76	–	–	3.61
5			–0.858	– 6.83		0.514	2.36	–	–	4.47
6			–0.894	– 7.11		0.447	2.06	–	–	5.05
0	نصف العقد الأيمن		0	0		1	4.60	0	0	4.60
1			0.316	2.52		0.949	4.37	– 1	– 0.32	6.57
2			0.555	4.42		0.832	3.83	– 4	– 2.22	6.03
3			0.707	5.63		0.707	3.25	– 9	– 6.36	2.52
4			0.800	6.37		0.600	2.76	– 16	– 12.80	– 3.67
5			0.858	6.83		0.514	2.36	– 25	– 21.45	– 12.26
6			0.894	7.11		0.447	2.06	– 36	– 32.18	– 23.01

جدول ٨ — ١١

حساب قيم الإحداثيات الرأسية للرسم البياني للقوى الطولية N

رقم المقطع		X_1	$\cos\varphi$	$X_1 \cos\varphi$	$-X_2$	$\sin\varphi$	$-X_2 \sin\varphi$	$-qy=-2y$	$-qy\cos\varphi$ (لنصف العقد الأيمن)	الإحداثيات الرأسية للرسم البياني للقوى الطولية N (t)
0	نصف العقد الأيسر		1	7.96		0	0	—	—	7.96
1			0.949	7.55		—0.316	1.45	—	—	9.00
2			0.832	6.63		—0.555	2.55	—	—	9.18
3			0.707	5.63		—0.707	3.25	—	—	8.88
4			0.600	4.78		—0.800	3.68	—	—	8.46
5			0.514	4.09		—0.858	3.95	—	—	8.04
6		7.96	0.447	3.56	4.60	—0.894	4.11	—	—	7.67
0	نصف العقد الأيمن		1	7.96		0	0	0	0	7.96
1			0.949	7.55		0.316	—1.45	— 1	— 0.95	5.15
2			0.832	6.63		0.555	—2.55	— 4	— 3.33	0.75
3			0.707	5.63		0.707	—3.25	— 9	— 6.36	— 3.98
4			0.600	4.78		0.800	—3.68	— 16	— 9.60	— 8.60
5			0.514	4.09		0.858	—3.95	— 25	— 12.85	— 12.71
6			0.447	3.56		0.894	—4.11	— 36	— 16.09	— 16.64

16 9468



الشكل ٨ — ١٦

وطبقاً لقيم الإحداثيات الرأسية للرسوم البيانية لكل من M ، Q و N ، الموجودة في الجداول (٨ — ٩) ، (٨ — ١٠) و (٨ — ١١) ، نخطط الرسوم البيانية للعزوم M وقوى القص Q والقوى الطولية N (شكل ٨ — ١٦) .

والآن نقوم بمراجعة انحراف الرسم البيانى للعزوم M ، بضربه فى وحدات الرسوم البيانية للعزوم $\overline{M}_1$ ، $\overline{M}_2$ و $\overline{M}_3$ ، أى نحسب المجاميع $\Sigma\, \overline{M}_1\, M\, \frac{\overline{s}}{\overline{J}}$ و $\Sigma\, \overline{M}_2\, M\, \frac{\overline{s}}{\overline{J}}$ و $\Sigma\, \overline{M}_3\, M\, \frac{\overline{s}}{\overline{J}}$ (لنصف العقد الأيسر والأيمن) ، وبما أن $\overline{M}_1 = y - y_s$ ، $\overline{M}_2 = x$ و $\overline{M}_3 = 1$ ، إذن يمكن كتابة هذه المجاميع على الشكل التالى :

$$\Sigma\, (y - y_s) \times M\, \frac{\overline{s}}{\overline{J}} \;,\; \Sigma\, x\, M\, \frac{\overline{s}}{\overline{J}} \text{ و } \Sigma\, M\, \frac{\overline{s}}{\overline{J}}$$

وحساب هذه المجاميع مبين فى الجدول (٨ – ١٢) .

إن المجاميع الناجمة فى الأعمدة الثلاثة الأخيرة من الجدول (٨ – ١٢) ، مساوية للصفر تقريباً (والخطأ فى ذلك يقل عن ١ ٪ من مجاميع القيم المطلقة) ، وهذا يدل على صحة الرسم البيانى الذى حصلنا عليه . وقد حدثت بعض الهفوات فى نتائج المراجعة ، وذلك لأنه عند القيام بالمراجعة ، لم يؤخذ فى الاعتبار تأثير القوى الطولية ، فى الوقت الذى أخذت القوى المذكورة فى الاعتبار ، عند حساب الانحراف δ_{11} .

جدول ٨ – ١٢

رقم المقطع		$y - y_s$	x	$\frac{\overline{s}}{\overline{J}}$	$(y - y_s)\frac{\overline{s}}{\overline{J}}$	$x\frac{\overline{s}}{\overline{J}}$	M	$M(y - y_s)\frac{\overline{s}}{\overline{J}}$	$Mx\frac{\overline{s}}{\overline{J}}$	$M\frac{\overline{s}}{\overline{J}}$
نصف العقد الأيسر	0	— 5.40	0	10.4	— 56.16	0	— 13.67	768	1	— 142
	1	— 4.90	— 3	17.3	— 84.77	— 51.9	— 23.49	1991	1219	— 406
	2	— 3.40	— 6	15.8	— 53.72	— 94.8	— 25.35	1362	2403	— 401
	3	— 0.90	— 9	15.1	— 13.59	—135.9	— 19.25	262	2616	— 291
	4	2.60	—12	14.6	37.96	—175.2	— 5.19	— 197	909	— 76
	5	7.10	—15	11.8	83.78	—177.0	16.83	1410	— 2979	199
	6	12.60	—18	6.9	86.94	—124.2	46.81	4070	— 5814	323
نصف العقد الأيمن	0	— 5.40	0	10.4	— 56.16	0	— 13.67	768	0	— 142
	1	— 4.90	3	17.3	— 84.77	51.9	3.86	— 327	200	67
	2	— 3.40	6	15.8	— 53.72	94.8	25.85	— 1389	2451	408
	3	— 0.90	9	15.1	— 13.59	135.9	43.30	— 588	5884	654
	4	2.60	12	14.6	37.96	175.2	41.21	1564	7220	602
	5	7.10	15	11.8	83.78	177.0	— 1.42	— 119	— 251	— 17
	6	12.60	18	6.9	86.94	124.2	— 111.59	— 9802	—13959	— 770
المجموع								+ 12195	+22903	+ 2253
								— 12422	—23003	— 2245
								— 227	— 100	+ 8

مثال ٣ : يطلب رسم خطوط تأثير القوى المجهولة الزائدة X_1 ، X_2 و X_3 وخطوط تأثير M_k ، N_k و Q_k فى المقطع K الذى إحداثيه السينى هو $\xi = \frac{1}{4}\, l = 6\ \text{m}$ (لاحظ الشكل ٨ – ٨) ، للعقد المبحوث فى المثال ١ ، بواسطة الأحمال المرنة . ولرسم جميع خطوط التأثير ، تستخدم الطريقة الأولى من الطريقتين المبحوثتين فى هذا البند . وبالإضافة إلى ذلك ، يجب رسم خط تأثير واحد فقط (خط تأثير القوة المجهولة X_2) باستخدام الطريقة الثانية .

الحل : فى المثال ١ ، حددنا إحداثيات قمم العقد المتعدد الأضلاع (المرسوم فى داخل العقد المعلوم الذى على شكل مكافىء) ، حددنا الإحداثى الرأسى y_s لمركز ثقله المرن . ويبين الشكلان (٨ – ٨) و (٨ – ٩) إحداثيات قمم الشكل المتعدد الأضلاع ، والإنشاء الرئيسى المتخذ للحساب ، والرسوم البيانية لعزوم الانحناء ، الناجمة عن تأثير القوى (الإجهادات) المجهولة $X_1 = 1$ ، $X_2 = 1$ و $X_3 = 1$.

إن شكل الصيغة المبسطة للأحمال المرنة ، تكون كما يلى (راجع الصفحة ٤١٢) :

$$W_n = \frac{S_n}{6EJ_n}\,(M_{n-1} + 2M_n) + \frac{S_{n+1}}{6EJ_{n+1}}\,(2M_n + M_{n+1}) - \epsilon_n \tan\beta_n + \epsilon_{n+1} \tan\beta_{n+1}$$

وبإهمال الانحرافات (التشوهات) الطولية للعقد ، وباعتبار أن النسبة $\frac{S_i}{J_i}$ لكل ضلع من أضلاع العقد المتعدد الأضلاع متساوية تماماً وقدرها $\frac{a}{J_c}$ (راجع حل المثال ١) ، نحول هذه الصيغة إلى الشكل التالى :

$$W_n = \frac{a}{6EJ_c}\,(M_{n-1} + 4M_n + M_{n+1}) \qquad (8-5)$$

وللقيم الطرفية للشكل المتعدد الأضلاع (لمقطع المسند والمقطع الرئيسى) $S_n = 0$ أو $S_{n+1} = 0$ ، وصيغة الحمل المرن تأخذ الشكلين التاليين :

$$W_0 = \frac{a}{6EJ_c}\,(2M_0 + M_1) \qquad (8-6)$$

$$W_4 = \frac{a}{6EJ_c}\,(M_3 + 2M_4) \qquad (8-7)$$

والآن نحسب إحداثى مركز الثقل المرن y_s ، بواسطة الأحمال المرنة ، باستخدام شرط مساواة

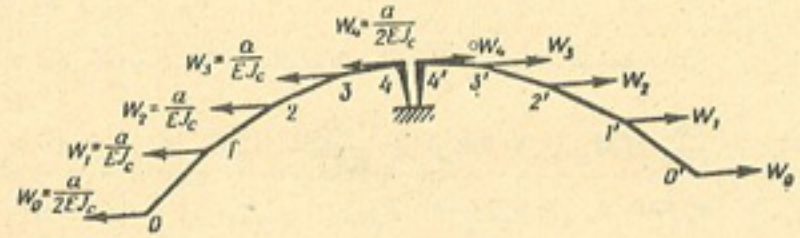
الانحراف δ_{13} للصفر . ولهذا الغرض ، نستخدم الصيغ (5 — 8) ، (6 — 8) و (7 — 8) لحساب الأحمال المرنة ، فى الرسم البيانى لعزوم الانحناء ، الناجمة فى الإنشاء الرئيسى نتيجة لتأثير العزوم $X_3 = 1$ (لاحظ الشكل ٨ — ٩ ، ج) :

$$W_0 = \frac{a}{6EJ_c}(2 \times 1 + 1) = \frac{a}{2EJ_c}$$

$$W_1 = W_2 = W_3 = \frac{a}{6EJ_c}(1 + 4 \times 1 + 1) = \frac{a}{EJ_c}$$

$$W_4 = \frac{a}{6EJ_c}(1 + 2 \times 1) = \frac{a}{6EJ_c}$$

ويتألف الإنشاء الاصطلاحى من نصفى العقد ، المثبتين فى مركز الثقل المرن (شكل ٨ — ١٧) .



الشكل ٨ — ١٧

وبعد أن نسلط على الإنشاء فى النقاط 0 ، 1 و 2 . . . إلخ ، الأحمال المرنة ، ونجعلها تتجه بموازاة الانحراف δ_{13} المطلوب (اى أفقياً) ، نضع معادلة تحديد الإحداثى y_s ، التى نجعل فيها عزم الانحناء التخيلى فى الأطراف المثبتة للإنشاء الاصطلاحى ، مساوياً للصفر :

$$W_0 (y_s - 6) + W_1 \left(y_s - \frac{27}{8}\right) + W_2 \left(y_s - \frac{3}{2}\right) + W_3 \left(y_s - \frac{3}{8}\right) + W_4 y_s = 0$$

أو المعادلة التالية :

$$\frac{a}{2EJ_c}\left[(y_s - 6) + 2\left(y_s - \frac{27}{8}\right) + 2\left(y_s - \frac{3}{2}\right) + 2\left(y_s - \frac{3}{8}\right) + y_s\right] = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$8y_s - \frac{33}{2} = 0$$

و

$$y_s = \frac{33}{16} = 2.0625 \text{ m}$$

وهذه القيمة المستخرجة للإحداثى y_s ، تطابق القيمة التى حصلنا عليها فى المثال ١ .

ويكون شكل المعادلات القانونية المستخدمة لتحديد القوى المجهولة الزائدة ، عند تعرض العقد لتأثير الحمل المتنقل $P = 1$ ، كما يلى :

$$X_1 \delta_{11} + \delta_{1p} = 0 \quad , \quad X_2 \delta_{22} + \delta_{2p} = 0 \quad , \quad X_3 \delta_{33} + \delta_{3p} = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$X_1 = -\frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} \, , \; X_2 = -\frac{\delta_{2p}}{\delta_{22}} \, , \; X_3 = -\frac{\delta_{3p}}{\delta_{33}}$$

أو :

$$X_1 = -\frac{\delta_{p1}}{\delta_{11}} \, , \; X_2 = -\frac{\delta_{p2}}{\delta_{22}} \, , \; X_3 = -\frac{\delta_{p3}}{\delta_{33}} \quad (8-8)$$

إن الرسوم البيانية للانحرافات δ_{p1} ، δ_{p2} ، δ_{p3} ، المخططة لمختلف أوضاع الحمل $P = 1$ ، تمثل الرسوم البيانية لانحرافات الإنشاء الرئيسى ، الناجمة عن تعرضه لتأثير القوى التالية على الترتيب $X_1 = 1$ ، $X_2 = 1$ ، $X_3 = 1$. إن الإحداثيات الرأسية لهذه الرسوم البيانية ، المقسمة على المقادير $-\delta_{11}$ ، $-\delta_{22}$ ، $-\delta_{33}$ ، تعطى قيم الإحداثيات الرأسية لخطوط تأثير القوى X_1 ، X_2 ، X_3 على الترتيب .

وتسمى هذه الطريقة المستخدمة لرسم خطوط التأثير بواسطة الرسوم البيانية للانحرافات الناجمة عن تأثير وحدات القوى ، بالطريقة الكينماتية .

ويمكن تخطيط الرسوم البيانية للانحرافات ، باستخدام طريقة الأحمال المرنة . ولهذا الغرض ، يجب سلفاً تخطيط الرسوم البيانية للعزوم $\overline{M}_1$ ، $\overline{M}_2$ و $\overline{M}_3$ ، الناجمة عن تأثير القوى (الإجهادات) $X_1 = 1$ ، $X_2 = 1$ و $X_3 = 1$ ، وبواسطتها تحسب الأحمال المرنة . إن مثل وحدات الرسوم البيانية للعزوم هذه $\overline{M}_1$ ، $\overline{M}_2$ و $\overline{M}_3$ ، مبينة فى الشكل (٨ — ٩) .

وقد أدرجت فى الجدول (٨ – ١٣) قيم الأحمال المرنة ، مضاعفة بمقدار EJ_c من المرات ، المحسوبة من الصيغ (5 — 8) ، (6 — 8) و (7 — 8) . وعلى سبيل المثال ، نجد بأن الحمل W_2 (فى النقطة 2) ، عند تعرض الإنشاء الرئيسى لتأثير القوى $X_1 = 1$ (لاحظ الرسم البيانى الموضح فى الشكل (٨ – ٩ ، أ) ، والصيغة (5 — 8) ، يساوى ما يلى :

$$W_2 = \frac{a}{6EJ_c}(M_1 + 4M_2 + M_3) = \frac{3}{6EJ_c}\left(\frac{21}{16} - 4 \times \frac{9}{16} - \frac{27}{16}\right) = -\frac{21}{16EJ_c}$$

أما قيمة الحمل W_4 (فى النقطة 4) ، عند تعرض الإنشاء الرئيسى لتأثير القوى $X_2 = 1$ (لاحظ الرسم البيانى الموضح فى الشكل (٨ – ٩ ، ب) ، والصيغة (7 — 8) ، فتساوى ما يلى :

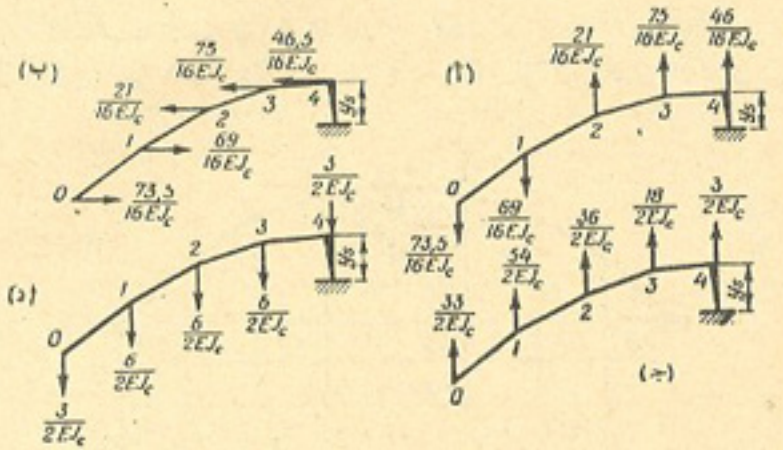
$$W_4 = \frac{a}{6EJ_c}(M_3 + 2M_4) = \frac{3}{6EJ_c}(-3 + 2 \times 0) = -\frac{3}{2EJ_c}$$

جدول ٨ – ١٣

قيم الأحمال المرنة (مضاعفة بمقدار EJ_c من المرات)

الحمل المرن المؤثر فى النقطة	عند تعرض الإنشاء الرئيسى لتأثير : القوى $X_1 = 1$	القوى $X_2 = 1$	العزوم $X_3 = 1$
0	$\frac{73.5}{16}$	$\frac{-33}{2}$	$\frac{3}{2}$
1	$\frac{69}{16}$	$\frac{-54}{2}$	$\frac{6}{2}$
2	$\frac{-21}{16}$	$\frac{-36}{2}$	$\frac{6}{2}$
3	$\frac{-75}{16}$	$\frac{-18}{2}$	$\frac{6}{2}$
4	$\frac{-46.5}{16}$	$\frac{-3}{2}$	$\frac{3}{2}$

ولتخطيط الرسم البيانى للانحرافات δ_{p1} ، نسلط على النصف الأيسر للإنشاء التخيلى ، الأحمال المرنة ، المحسوبة فى حالة تعرض الإنشاء الرئيسى لتأثير القوى $X_1 = 1$. ونسلط هذه الأحمال بموازاة الانحراف المطلوب (أى رأسياً) فى اتجاه الألياف المشدودة للإنشاء الرئيسى (شكل ٨ – ١٨ ، أ) .



الشكل ٨ – ١٨

وبما أن الكابول اللانهائى الجسوءة يبقى عمودياً عند تعرض الإنشاء الرئيسى لتأثير القوى $X_1 = 1$ ، أى أنه لا يدور ، إذن يجب أن يكون المجموع الجبرى للأحمال المرنة ، المؤثرة على الإنشاء (الأحمال المبينة فى الشكل ٨ – ١٨ ، أ) ، مساوياً للصفر .

ثم نستخدم هذا الشرط لضبط حساب الأحمال المرنة :

$$\Sigma W = \frac{73.5}{16EJ_c} + \frac{69}{16EJ_c} - \frac{21}{16EJ_c} - \frac{75}{16EJ_c} - \frac{46.5}{16EJ_c} = 0$$

إن الإحداثيات الرأسية للرسم البيانى للعزوم ، الناجمة فى الإنشاء نتيجة لتأثير الأحمال المرنة عليه ، تمثل الانحرافات الرأسية (العمودية) للإنشاء الرئيسى ، الناجمة عن تعرضه للقوى $X_1 = 1$ ، أما هذا الرسم البيانى بأجمعه ، فيمثل الرسم البيانى للانحرافات δ_{p1} . والآن نحدد قيم الإحداثيات الرأسية للرسم البيانى فى نقاط مختلفة ، وهى النقاط الموضوعة أرقامها فى الأقواس الصغيرة الموجودة فوق رمز الانحراف :

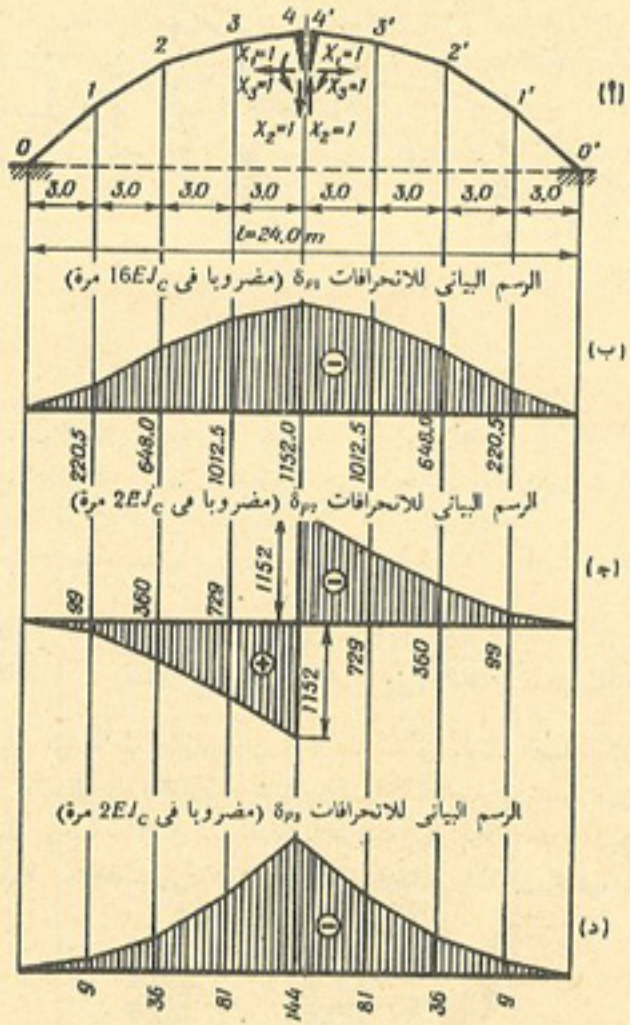
$$\delta_{p1}^{(1)} = \frac{73.5 \times 3}{16EJ_c} = \frac{220,5}{16EJ_c}$$

$$\delta_{p1}^{(2)} = \frac{73.5 \times 6 + 69 \times 3}{16EJ_c} = \frac{648}{16EJ_c}$$

$$\delta_{p1}^{(3)} = \frac{73.5 \times 9 + 69 \times 6 - 21 \times 3}{16E\mathcal{J}_c} = \frac{1012.5}{16E\mathcal{J}_c}$$

$$\delta_{p1}^{(4)} = \frac{73.5 \times 12 + 69 \times 9 - 21 \times 6 - 75 \times 3}{16E\mathcal{J}_c} = \frac{1152}{16E\mathcal{J}_c}$$

وبوضع الإحداثيات الرأسية التى حصلنا عليها ، ابتداء من المحور السينى فى اتجاه الألياف المشدودة فى الإنشاء التخيل (شكل ٨ – ١٨ ، أ) ، نحصل على الرسم البيانى للانحراف δ_{1p} ،



الشكل ٨ – ١٩

المبين فى الشكل (٨ – ١٩ ، ب) * ويتضح من هذا الرسم البيانى ، بأن نقاط محور العقد ، تنحرف إلى الأعلى تحت تأثير القوى $X_1 = 1$. ويكون هذا الانحراف δ_{p1} سالباً ، وذلك لأن دليل الانحراف الموجب ، هو الحمل $P = 1$ ، المتجه إلى الأسفل ، ولهذا السبب وضعت علامة سالبة أمام الرسم البيانى للانحراف δ_{p1} .

ولتحديد الانحراف δ_{11} ، نذير الأحمال المرنة بزاوية قدرها ٩٠° ، أى نجعل اتجاهها أفقياً (شكل ٨–١٨ ، ب) ، ونحسب عزم هذه الأحمال حول مركز الثقل المرن ، على أن نأخذ فى الاعتبار هنا (بعامل الضرب 2) ، بأن الانحراف δ_{11} يمثل التغير المتبادل للمسافة الموجودة بين الأطراف السفلى للكوابيل اللانهائية الجسوءة ، فى اتجاه ووحدات القوى $X_1 = 1$ (أى أفقياً) :

$$\delta_{11} = 2\left[\frac{73.5}{16E\mathcal{J}_c}\left(\frac{48}{8} - \frac{16.5}{8}\right) + \frac{69}{16E\mathcal{J}_c}\left(\frac{27}{8} - \frac{16.5}{8}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{21}{16E\mathcal{J}_c}\left(\frac{16.5}{8} - \frac{12}{8}\right) + \frac{75}{16E\mathcal{J}_c}\left(\frac{16.5}{8} - \frac{3}{8}\right) + \frac{46.5}{16E\mathcal{J}_c} \times \frac{16.5}{8}\right] =$$

$$= \frac{3}{8 \times 16E\mathcal{J}_c}(73.5 \times 31.5 + 69 \times 10.5 + 21 \times 4.5 + 75 \times$$

$$\times 13.5 + 46.5 \times 16.5) = \frac{1228.5}{16E\mathcal{J}_c}$$

وقد حصلنا على نفس قيمة الانحراف δ_{11} هذه ، فى المثال ١ ، بطريقة ضرب الرسوم البيانية .

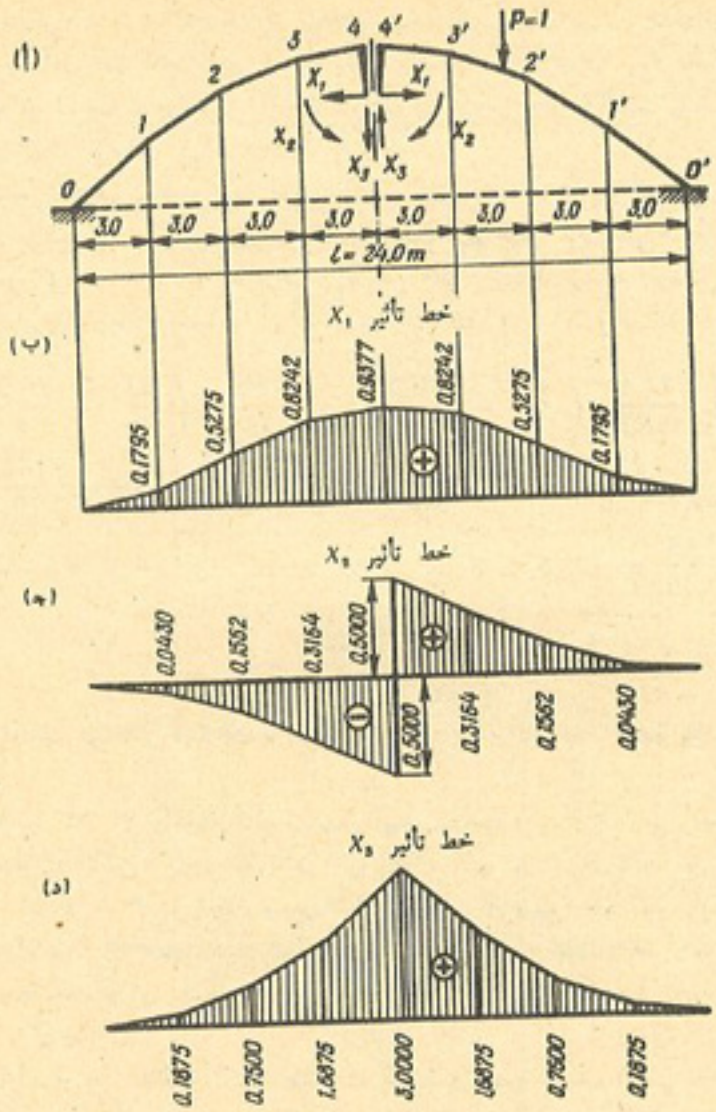
وبتقسيم كافة الإحداثيات الرأسية للرسم البيانى للانحراف δ_{p1} ، على المقدار δ_{11} ، وتغير العلامة إلى العكس ، نوجد خط تأثير القوة X_1 ، الذى يبين خواص قانون تغير الإجهاد X_1 عند تحرك الحمل $P = 1$ على العقد . ويبين الشكل (٨ – ٢٠ ، ب) خط تأثير الإجهاد X_1 .

وعند الانتقال إلى تخطيط الرسم البيانى للانحرافات δ_{p2} ، نجرى نفس العمليات الحسابية التى أجريناها أعلاه ، أى نسلط الأحمال المرنة على الإنشاء التخيل ، ونخطط الرسم البيانى لعزوم الانحناء ، الناجمة عنها .

وبما أنه فى هذه الحالة ، تكون منطقة الشد الواقعة فى حدود النصف الأيسر للإنشاء الرئيسى ، الناجمة عن تعرضه لتأثير القوى $X_2 = 1$ (لاحظ الشكل ٨ – ١٩ ، ب) ، واقعة إلى الأعلى ، إذن يجب أن تكون الأحمال المرنة ، المؤثرة على الإنشاء التخيل ، المناظر لهذا النصف الأيسر من الإنشاء الرئيسى ، متجهة إلى الأعلى (شكل ٨ – ١٨ ، جـ) . وبحساب العزوم فى الإنشاء التخيل ، نحدد الانحرافات الرأسية للعقد :

---

* إن الإحداثيات الرأسية للرسم البيانى الموضح فى الشكل (٨ – ١٩ ، ب) مضاعفة بمقدار $16E\mathcal{J}_c$ من المرات .



الشكل ٨ – ٢٠

$$\delta_{P2}^{(1)} = \frac{33 \times 3}{2EJ_c} = \frac{99}{2EJ_c}$$

$$\delta_{P2}^{(2)} = \frac{33 \times 6 + 54 \times 3}{2EJ_c} = \frac{360}{2EJ_c}$$

$$\delta_{P2}^{(3)} = \frac{33 \times 9 + 54 \times 6 + 36 \times 3}{2EJ_c} = \frac{729}{2EJ_c}$$

$$\delta_{P2}^{(4)} = \frac{33 \times 12 + 54 \times 9 + 36 \times 6 + 18 \times 3}{2EJ_c} = \frac{1152}{2EJ_c}$$

وبوضع قيم الانحرافات التى حصلنا عليها ، ابتداء من المحور السينى ، فى اتجاه الألياف ، المشدودة فى الإنشاء التخيل ، نحصل على الرسم البيانى للانحرافات* δ_{P2} ، المبين فى الشكل (٨ – ١٩ ، جـ) . وهذا الرسم البيانى غير متماثل .

والانحراف δ_{22} ، يمثل الانحراف المتبادل للنقاط السفلى للكوابيل اللانهائية الجسوءة ، فى اتجاه القوى $X_2 = 1$ ، أو الانحراف الرأسى المتبادل للنقطتين 4 و 4' ، الذى يساوى ضعف قيمة الانحراف $\delta_{P2}^{(4)}$ ، أى يساوى :

$$\delta_{22} = 2\delta_{P2}^{(4)} = 2 \times \frac{1152}{2EJ_c} = \frac{1152}{EJ_c}$$

وقد حصلنا سابقاً فى المثال ١ على نفس قيمة δ_{22} هذه بطريقة ضرب الرسوم البيانية .

وبتقسيم كافة الإحداثيات الرأسية للرسم البيانى للانحراف δ_{P2} ، على المقدار $(-\delta_{22})$ ، نحصل على خط تأثير الإجهاد X_2 . وهذا الخط مبين فى الشكل (٨ – ٢٠ ، جـ) .

ولتخطيط الرسم البيانى للانحرافات δ_{P3} ، نسلط الأحمال المرنة على الإنشاء التخيل (لاحظ الشكل ٨ – ١٨ ، د) ، بعد أن نوجهها فى اتجاه الألياف المشدودة ، أى إلى الاسفل .

وبوضع معادلات العزوم فى الإنشاء التخيل ، نوجد الانحراف الرأسى للعقد :

$$\delta_{P3}^{(1)} = \frac{3 \times 3}{2EJ_c} = \frac{9}{2EJ_c}$$

$$\delta_{P3}^{(2)} = \frac{3 \times 6 + 6 \times 3}{2EJ_c} = \frac{36}{2EJ_c}$$

$$\delta_{P3}^{(3)} = \frac{3 \times 9 + 6 \times 6 + 6 \times 3}{2EJ_c} = \frac{81}{2EJ_c}$$

$$\delta_{P3}^{(4)} = \frac{3 \times 12 + 6 \times 9 + 6 \times 6 + 6 \times 3}{2EJ_c} = \frac{144}{2EJ_c}$$

وبوضع هذه الإحداثيات الرأسية المستخرجة ، فوق المحور السينى ، فى اتجاه الألياف ،

---

* إن الإحداثيات الرأسية للرسم البيانى الموضح فى الشكل (٨ – ١٩ ، جـ) ، مضاعفة بمقدار $2EJ_c$ من المرات .

المشدودة فى الإنشاء التخيلى ، أى إلى الاعلى ، نحصل على الرسم البيانى للانحرافات* δ_{om} ، المبين فى الشكل (٨ – ١٩ ، د) .

إن الانحراف δ_{33} الذى يمثل زاوية الدوران المتبادلة للأطراف السفلى للكوابيل ذات الجسوة اللامتناهية (أو المقطعين 4 و 4′ لنصفى العقد الأيسر والأيمن) ، يساوى مجموع الأحمال المرنة ، أى :

$$\delta_{33} = 2\left(\frac{3 \times 2}{2EJ_c} + \frac{6 \times 3}{2EJ_c}\right) = \frac{24}{EJ_c}$$

وقد حصلنا سابقاً على نفس قيمة الانحراف δ_{33} ، فى المثال ١ ، بطريقة ضرب الرسوم البيانية .

وبتقسيم كافة الإحداثيات الرأسية للرسم البيانى للانحراف δ_{om} على المقدار ($-\delta_{33}$) ، نحصل على خط تأثير الإجهاد X_3 ، المبين فى الشكل (٨ – ٢٠ ، د) .

وبمعرفة خطوط تأثير الاجهادات المجهولة الزائدة X_1 ، X_2 و X_3 ، يمكن رسم خطوط تأثير عزم الانحناء وقوة القص والقوة الطولية ، لأى مقطع كان من مقاطع العقد ، الذى ينطبق مع قمة الشكل المتعددة الأضلاع .

والآن نرسم خطوط تأثير القوى M_K ، Q_K و N_K ، فى المقطع K من العقد ، الواقع على بعد ٦ امتار (6 m) من الكتف الأيسر للعقد ، والمنطبق مع المقطع رقم 2 (لاحظ الشكل ٨ – ٨ ، ب) .

إن الزاوية φ_2 المحصورة بين مماس محور العقد فى النقطة 2 وبين الأفق ، تساوى $26° 34'$ ، $\sin \varphi_2 = 0.447$ ، $\cos \varphi_2 = 0.894$ (راجع المثال ١ ، الجدول ٨ – ١) . وذراع القوة X_1 حول المقطع K يساوى :

$$y_4 - y_2 = \frac{33}{16} - \frac{3}{2} = \frac{9}{16}\ \text{m}$$

وذراع القوة X_2 يساوى 6 m .

ونقوم بحساب الإحداثيات الرأسية لخطوط تأثير كل من M_k ، Q_k و N_k باستخدام الصيغ التالية** :

---

* أن الاحداثيات الرأسية لهذا الرسم البيانى ، الموضح فى الشكل (٨ – ١٩ ، د) مضاعفة بمقدار $2EJ_c$ من المرات :

** تعتبر القوة الطولية موجبة فى حالة الانضغاط ، أما بالنسبة لعزم الانحناء وقوة القص ، فيطبق عليهما قانون العلامات العام .

(أ) عندما يكون الحمل $P = 1$ واقعاً على النصف الأيمن للعقد ، أو على القسم الواقع بين الكتف الأيسر للعقد وبين المقطع K (المقطع 2) :

$$M_K = -X_1 \times \frac{9}{16} - X_2 \times 6 + X_3$$
$$Q_K = -X_1 \sin \varphi_2 + X_2 \cos \varphi_2 = -X_1 \times 0.447 + X_2 \times 0.894$$
$$N_K = X_1 \cos \varphi_2 + X_2 \sin \varphi_2 = X_1 \times 0.894 + X_2 \times 0.447$$

(ب) عندما يكون الحمل $P = 1$ واقعاً على النصف الأيسر للعقد ، بين المقطع K (المقطع 2) وبين مقطع القمة :

$$M_K = -X_1 \times \frac{9}{16} - X_2 \times 6 + X_3 - 1\ r$$

حيث r – ذراع الحمل $P = 1$ ، حول المقطع .

$$Q_K = -X_1 \times 0.447 + X_2 \times 0.894 + 1 \times 0.894$$
$$N_K = -X_1 \times 0.894 + X_2 \times 0.447 + 1 \times 0.447$$

ولا تختلف صيغ الحالة (ب) عن صيغ الحالة (أ) إلا بوجود الحد الأخير ، الذى يأخذ فى الاعتبار الحمل $P = 1$.

وعند حساب الإحداثيات الرأسية لخطوط تأثير كل من M_k ، Q_k و N_k ، يجب أن تعوض فى الصيغ المذكورة ، قيم القوى X_1 ، X_2 ، X_3 ، المحددة من خطوط تأثير هذه القوى المجهولة (لاحظ الشكل ٨ – ٢٠) .

وقد تم حساب الإحداثيات الرأسية لخطوط تأثير كل من M_k ، Q_k و N_k ، فى الجداول (٨ – ١٤) ، (٨ – ١٥) و(٨ – ١٦) . وبناء على معطيات الأعمدة الأخيرة من هذه الجداول ، رسمت خطوط تأثير العزم M_K وقوة القص Q_k والقوة الطولية N_k (شكل ٨ – ٢١) .

والآن نحدد الإجهادات M_k ، Q_k و N_k الناشئة فى نصف العقد الأيسر ، عند تعرضه لتأثير الحمل الرأسى الموزع بانتظام ، الذى شدته تساوى $q = 2$ t/m (لاحظ الشكل ٨ – ٨ ، أ) . نستبدل هذا الحمل ، بقوى مركزة ، مؤثرة فى النقاط العليا 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 من العقد المتعدد الأضلاع وهذه القوى تساوى :

$$P_0 = P_4 = q\,\frac{a}{2} = \frac{2 \times 3}{2} = 3\ \text{t}$$

جدول ٨ – ١٤

حساب الإحداثيات الرأسية لخط تأثير العزم M_k

الإحداثي الرأسي لخط تأثير العزم M_k (بالأمتار)	$-r$	X_3	$-X_2 \times 6$	X_2	$-X_1 \times \frac{9}{16}$	X_1	المحل $P = 1$ في النقطة
0	—	0	0	0	0	0	0
0.344	—	0.187	0.258	— 0.0430	— 0.101	0.1795	1
1.390	0	0.750	0.937	— 0.1562	— 0.297	0.5275	2
0.124	— 3	1.687	1.898	— 0.3164	— 0.464	0.8242	3
— 0.528	— 6	3.000	3.000	— 0.5000	— 0.528	0.9377	4
— 0.528	—	3.000	— 3.000	0.5000	— 0.528	0.9377	4′
— 0.675	—	1.687	— 1.898	0.3164	— 0.464	0.8242	3′
— 0.484	—	0.750	— 0.937	0.1562	— 0.297	0.5275	2′
— 0.172	—	0.187	— 0.258	0.0430	— 0.101	0.1795	1′
0	—	0	0	0	0	0	0′

جدول ٨ – ١٥

حساب الإحداثيات الرأسية لخط تأثير قوة القص Q_k

المحل $P = 1$ في النقطة	X_1	$-X_1 \times 0.447$	X_2	$X_2 \times 0.894$	0.894	الإحداثيات الرأسية لخط تأثير العزم Q_k
0	0	0	0	0	—	0
1 إلى يسار النقطة 2 على مسافة قدرها ds	0.1795	— 0.080	— 0.0430	— 0.039	—	— 0.119
إلى يمين النقطة 2 على مسافة قدرها ds	0.5275	— 0.236	— 0.1562	— 0.140	—	— 0.376
3	0.8242	— 0.368	— 0.3164	— 0.283	0.894	0.518
4	0.9377	— 0.419	— 0.5000	— 0.447	0.894	0.243
4	0.9377	— 0.419	0.5000	0.447	—	0.028
3′	0.8242	— 0.368	0.3164	0.283	—	0.028
2′	0.5275	— 0.236	0.1562	0.140	—	— 0.085
1′	0.1795	— 0.080	0.0430	0.039	—	— 0.096
0′	0	0	0	0	—	— 0.041
						0

جدول ٨ – ١٦

حساب الإحداثيات الرأسية لخط تأثير القوة الطولية N_k

الحمل $P = 1$ في النقطة	X_1	$X_1 \times 0.894$	X_2	$X_2 \times 0.447$	الإحداثيات الرأسية لخط تأثير القوة الطولية N_k
0	0	0	0	0	0
1	0.1795	0.160	— 0.0430	— 0.019	0.141
2 إلى يسار النقطة على مسافة قدرها ك	0.5275	0.471	— 0.1562	— 0.070	0.401
2 إلى يمين النقطة على مسافة قدرها ك	0.5275	0.471	— 0.1562	— 0.070	0.848
3	0.8242	0.737	— 0.3164	— 0.141	1.043
4	0.9377	0.838	— 0.5000	— 0.223	1.061
4′	0.9377	0.838	0.5000	0.223	1.061
3′	0.8242	0.737	0.3164	0.141	0.878
2′	0.5275	0.471	0.1562	0.070	0.541
1′	0.1795	0.160	0.0430	0.019	0.179
0′	0	0	0	0	0

$$P_1 = P_2 = P_3 = qa = 2 \times 3 = 6 \text{ t}$$

وبضرب كل قوة من هذه القوى فى الإحداثى الرأسى المناظر لخط التأثير (من الخطوط المبينة فى الشكل ٨ – ٢١) ، وجمع حواصل الضرب الناتجة ، نحصل على قيم M_k ، Q_k ، N_k ، والناجمة عن تأثير الحمل الموزع بانتظام :

$$M_k = 3 \times 0 + 6 \times 0.344 + 6 \times 1.390 + 6 \times 0.124 - 3 \times \times 0.528 = 9.564 \text{ t/m}$$

$$Q_k = 3 \times 0 - 6 \times 0.119 + 6 \frac{-0.376 + 0.518}{2} + 6 \times \times 0.243 + 3 \times 0.028 = 1.254 \text{ t}$$

$$N_k = 3 \times 0 + 6 \times 0.114 + 6 \frac{0.401 + 0.848}{2} + 6 \times 1.043 + + 3 \times 1.061 = 14.034 \text{ t}$$

وهذه القيم للإجهادات الناشئة فى المقطع K لا تختلف بشىء تقريباً ، عن القيم التى حصلنا عليها فى المثال ١ ، راجع الجداول (٨ – ٢) ، (٨ – ٣) و (٨ – ٤) ولاحظ الشكل (٨ – ١٢) ، والتى تساوى : $M_k = 9.56$ tm ، $Q_k = 1.26$ t و $N_k = 14.04$ t .

وبواسطة خطوط تأثير القوى X_1 ، X_2 و X_3 ، التى حصلنا عليها ، يمكن بسهولة تخطيط الرسوم البيانية للإجهادات الناشئة فى العقد ، نتيجة لتعرضه لتأثير الحمل الرأسى . ولهذا الغرض ، يستبدل الحمل المعلوم بقوى مركزة (مؤثرة فى قمم العقد المتعدد الأضلاع) ، ومنها تحدد قيمها من خطوط تأثير الإجهادات X_1 ، X_2 ، X_3 . ثم تسلط على الإنشاء الرئيسى ، الإجهادات المستخرجة X_1 ، X_2 و X_3 والحمل المعلوم ، ثم تخطط الرسوم البيانية للإجهادات الداخلية الناشئة فى المقاطع العرضية للعقد ، نتيجة للتأثير الموحد للإجهادات المذكورة والحمل المعلوم ، وذلك بالطريقة العادية ، المتبعة فى حساب الإنشاءات المحددة استاتيكيا .

الشكل ٨ – ٢١

والآن لنرسم أحد خطوط التأثير (مثلا خط تأثير الإجهاد X_2) بالطريقة الثانية ، من الطريقتين المذكورتين فى بداية هذا البند (وقد بحثت هذه الطريقة بالتفصيل ، فى المثال ٢) .

وعند استخدام هذه الطريقة فى الحساب ، تصبح صيغة الحمل المرن على الشكل التالى*

$$W_n = M_n \frac{\overline{S}_n}{E\overline{J}_n}$$

حيث $\overline{S}_n = \frac{S_n + S_{n+1}}{2}$ تمثل نصف مجموع أطوال الأقسام المجاورة للمقطع رقم n .

ونعتبر بأن قيم $\overline{S}_i$ ، تساوى ما يلى بصورة تقريبية :

$$\overline{S}_0 = \frac{a}{2\cos\varphi_0} ; \overline{S}_1 = \frac{a}{\cos\varphi_1} ; \overline{S}_2 = \frac{a}{\cos\varphi_2} ; \overline{S}_3 = \frac{a}{\cos\varphi_3} ; \overline{S}_4 = \frac{a}{2\cos\varphi_4}$$

ومن شرط المسألة لدينا $\overline{J}_i = \frac{J_c}{\cos\varphi_i}$ ، إذن نجد بأن :

$$\frac{\overline{S}_0}{\overline{J}_0} = \frac{\overline{S}_4}{\overline{J}_4} = \frac{a}{2\overline{J}_c} = \frac{3}{2\overline{J}_c}$$

$$\frac{\overline{S}_1}{\overline{J}_1} = \frac{\overline{S}_2}{\overline{J}_2} = \frac{\overline{S}_3}{\overline{J}_3} = \frac{a}{\overline{J}_c} = \frac{3}{\overline{J}_c}$$

ثم نوجد قيم الأحمال المرنة ، عند تعرض الإنشاء الرئيسى لتأثير القوى $X_2 = 1$ (لاحظ الشكل ٨ – ٩ ، ب) :

$$W_0 = M_0 \frac{\overline{S}_0}{E\overline{J}_0} = -12 \times \frac{3}{2E\overline{J}_c} = -\frac{18}{E\overline{J}_c}$$

$$W_1 = M_1 \frac{\overline{S}_1}{E\overline{J}_1} = -9 \times \frac{3}{E\overline{J}_c} = -\frac{27}{E\overline{J}_c}$$

$$W_2 = M_2 \frac{\overline{S}_2}{E\overline{J}_2} = -6 \times \frac{3}{E\overline{J}_c} = -\frac{18}{E\overline{J}_c}$$

$$W_3 = M_3 \frac{\overline{S}_3}{E\overline{J}_3} = -3 \times \frac{3}{E\overline{J}_c} = -\frac{9}{E\overline{J}_c}$$

$$W_4 = M_4 \frac{\overline{S}_4}{E\overline{J}_4} = 0 \times \frac{3}{2E\overline{J}_c} = 0$$

---

* لم تؤخذ فى الاعتبار هنا التشوهات الطولية للإنشاء .

ولتحديد قيم الانحراف δ_{22} ، نسلط على الإنشاء التخيلى ، الأحمال المرنة (شكل ٨ – ٢٢) ، ونوجد منها عزوم الانحناء الناتجة فى الإنشاء ، نتيجة لتأثير هذه الأحمال :

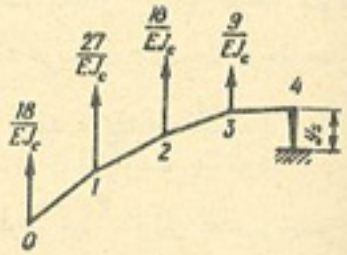
$$\delta_{p2}^{(1)} = \frac{18 \times 3}{E\overline{J}_c} = \frac{54}{E\overline{J}_c}$$

$$\delta_{p2}^{(2)} = \frac{18 \times 6 + 27 \times 3}{E\overline{J}_c} = \frac{189}{E\overline{J}_c}$$

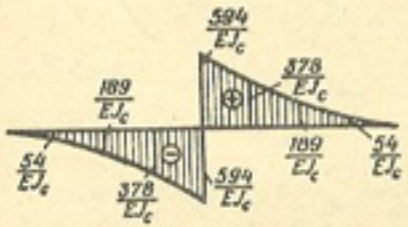
$$\delta_{p2}^{(3)} = \frac{18 \times 9 + 27 \times 6 + 18 \times 3}{E\overline{J}_c} = \frac{378}{E\overline{J}_c}$$

$$\delta_{p2}^{(4)} = \frac{18 \times 12 + 27 \times 9 + 18 \times 6 + 9 \times 3}{E\overline{J}_c} = \frac{594}{E\overline{J}_c}$$

وبوضع القيم المستخرجة ، فوق المحور السينى فى اتجاه الألياف المشدودة ، فى الانشاء التخيلى نحصل على الرسم البيانى للانحرافات δ_{2p} ، المبين فى الشكل (٨ – ٢٣) .



الشكل ٨ – ٢٢

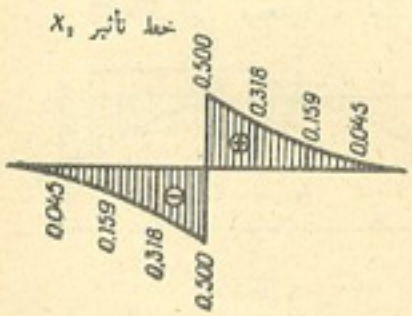


الشكل ٨ – ٢٣

إن قيمة الانحراف δ_{22} تساوى ضعف قيمة الانحراف $\delta_{p2}^{(4)}$ ، أى تساوى ما يلى :

$$\delta_{22} = 2\,\frac{594}{E\overline{J}_c} = \frac{1188}{E\overline{J}_c}$$

وبتقسيم كافة الإحداثيات الرأسية للرسم البيانى للانحراف δ_{p2} ، على المقدار $(-\delta_{22})$ ، نحصل على خط تأثير الإجهاد X_2 (وذلك لأن $X_2 = -\frac{\delta_{p2}}{\delta_{22}}$) ، وهو الخط المبين فى الشكل (٨ – ٢٤) . وخط التأثير هذا ، لا يختلف إلا قليلا جداً ، عن خط تأثير الإجهاد X_2 ، المرسوم بالطريقة الأولى والمبين فى الشكل ٨ – ٢٠ ، جـ) .



الشكل ٨ – ٢٤

البند ٨ – ٥ : حساب تأثير تغير درجة الحرارة ، وانكماش الخرسانة عند حساب العقود الخالية من المفصلات

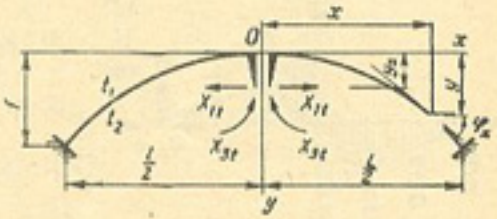
تأثير درجة الحرارة : عند تغير درجة الحرارة ، تنشأ فى العقد الخالى من المفصلات ، إجهادات داخلية معينة . والآن نضع الصيغ اللازمة لتحديد هذه الإجهادات . ولهذا الغرض نبحث الحالة العامة التالية : لنفرض بأن درجة حرارة الألياف الخارجية للعقد الخالى من المفصلات ، قد تغيرت على طول العقد بأكمله ، بمقدار $+t_1$ درجة مئوية ، ودرجة حرارة الألياف الداخلية قد تغيرت بمقدار $+t_2$ درجة مئوية (شكل ٨ – ٢٥) . وبناء على ذلك ، تغيرت درجة حرارة الألياف المنطبقة مع محور العقد ، بمقدار $\frac{t_1 + t_2}{2}$.

الشكل ٨ – ٢٥

نرمز إلى الفرق بين درجتى الحرارة $t_1 - t_2$ بالرمز Δt ، وإلى نصف مجموع درجتى الحرارة بالرمز t ، أى :

$$t_1 - t_2 = \Delta t$$
$$\frac{t_1 + t_2}{2} = t$$

وللحالة التى نبحثها ، نجد بأن المعادلات القانونية ، المعبرة عن مساواة الانحرافات الناجمة فى اتجاهات القوى المجهولة الإضافية ، المؤثرة فى مركز الثقل المرن ، للصفر (شكل ٨ – ٢٦) ، تكتب على الشكل التالى :



الشكل ٨ – ٢٦

$$\left.\begin{aligned} X_{1t}\,\delta_{11} + \Delta_{1t} &= 0 \\ X_{2t}\,\delta_{22} + \Delta_{2t} &= 0 \\ X_{3t}\,\delta_{33} + \Delta_{3t} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (8-9)$$

إن انحرافات (تشوهات) العقد الناجمة عن تغير درجة الحرارة ، تكون متماثلة ، ولهذا $\Delta_{2t} = 0$ ، وبالتالى $X_{2t} = 0$.

والانحرافات الناجمة عن تغير درجة الحرارة ، الداخلة فى المعادلات القانونية ، تحدد من الصيغ التالية :

$$\Delta_{1t} = \alpha\,(t_1 - t_2) \int_s \overline{M}_1 \frac{ds}{h} + \alpha\,\frac{t_1 + t_2}{2} \int_s \overline{N}_1\, ds$$

$$\Delta_{3t} = \alpha\,(t_1 - t_2) \int_s \overline{M}_3 \frac{ds}{h}$$

أو

$$\Delta_{1t} = -\alpha\,\Delta t \int_s (y - y_s) \frac{ds}{h} - \alpha t \int_s \cos\varphi_x\, ds$$

$$\Delta_{3t} = -\alpha\,\Delta t \int_s \frac{ds}{h}$$

حيث h – ارتفاع المقطع ،

α – معامل التمدد الحرارى الطولى .

ثم نوجد الانحراف δ_{11} ، مع أخذ تأثير القوى الطولية فى الاعتبار ، من الصيغة التالية :

$$\delta_{11} = \int_s (y - y_s)^2 \frac{ds}{EJ} + \int_s \cos^2\varphi_x \frac{ds}{EF}$$

ويحدد الانحراف δ_{33} من المعادلة التالية :

$$\delta_{33} = \int \frac{ds}{EJ}$$

وبتعويض قيم Δ_{1t} ، Δ_{3t} ، δ_{11} و δ_{33} فى الصيغ القانونية رقم (9 — 8) ، نحصل على ما يلى :

$$X_{1t} = -\frac{\Delta_{1t}}{\delta_{11}} = \frac{\alpha\,\Delta\,t \int_s (y - y_s)\frac{ds}{h} + \alpha\,t \int_s \cos\varphi_x\,ds}{\int_s (y - y_s)^2 \frac{ds}{EJ} + \int_s \cos^2\varphi_x \frac{ds}{EF}}$$

$$X_{3t} = -\frac{\Delta_{3t}}{\delta_{33}} = \frac{\alpha\,\Delta\,t \int_s \frac{ds}{h}}{\int_s \frac{ds}{EJ}}$$

إن عزم المسند الناشئ فى العقد ، نتيجة لتغير درجة الحرارة ، يحدد من الصيغة التالية :

$$M_{At} = X_{3t} \times X_{1t}\,(f - y_s)$$

وإذا كان العقد على شكل قطع مكافئ تربيعى معادلته هى $y = \frac{4f}{l^2}x^2$ ، وكانت طبيعته الهندسية تتغير حسب القانونين التاليين :

$$h = \frac{h_c^*}{\cos\varphi_x} \quad \text{و} \quad J = \frac{J_c}{\cos\varphi_x}$$

حيث J_c و h_c — تمثلان عزم القصور الذاتى للمقطع وارتفاعه ، على التوالى ،

* إن مثل هذه النسب أو العلاقات غير ممكنة التحقيق فى آن واحد ، عندما يكون مقطع العقد مستطيلا ، وذلك لأنه بالنسبة لهذا العقد ، لدينا من الشرط $J = \frac{J_c}{\cos\varphi_x}$ بأن $h = \sqrt[3]{\frac{h_c}{\cos\varphi_x}}$. ولكن يمكن بدقة كافية من الناحية العملية (وخاصة فى العقود المستوية) أن يؤخذ لهذا العقد عند الحساب ، ارتفاع مقطع يساوى $h = \frac{h_c}{\cos\varphi_x}$.

إذن فى هذه الحالة ، يحدد الإجهادان X_{1t} ، X_{3t} من الصيغتين التاليتين* :

$$X_{1t} = \frac{\alpha t l}{(1+\mu)\frac{4}{45}f^2\frac{l}{EJ_c}} = \frac{45\,\alpha t E J_c}{4(1+\mu)f^2} \qquad (8-10)$$

$$X_{3t} = \frac{1}{h_c}\,\alpha\,\Delta\,t\,E\,J_c$$

حيث :

$$\mu = \frac{\int_s \cos^2\varphi_x \frac{ds}{F}}{\int_s (y - y_s)^2 \frac{ds}{J}}$$

ويتضح من الصيغة (10 — 8) ، بأن القوة الدفعية (أى X_{1t}) تزداد بزيادة جسوءة المقطع العرضى للعقد ، وبتناقص سهم انحناء العقد . إن تقليل ارتفاع المقطع ، واستخدام مادة للعقد ، ذات معامل مرونة أقل ، يؤديان إلى تقليل الإجهادات الناشئة عن تغير درجة الحرارة .

تأثير الانكماش (shrinkage) : إن حساب تشوهات الانكماش الناجمة فى العقد الخرسانى ، يتلخص فى حساب التشوهات (الانحرافات) الناجمة عن تغير درجة الحرارة ، المكافئة لها . وبالفعل ، إذا كانت α تمثل معامل التمدد الحرارى الطولى للخرسانة ، نجد بأن المقدار αt يمثل تمدد وحدة طول العقد الخرسانى ، عندما تتغير درجة الحرارة بمقدار t° مئوية .

وعند انكماش الخرسانة ، تقل الأبعاد الطولية للإنشاء بمقدار ٠,٠٢٥٪ . وإذا اعتبرنا بأن معامل التمدد الطولى للخرسانة يساوى ٠,٠٠٠٠١ ، إذن سيكون انكماش الخرسانة ، مكافئاً لانخفاض درجة حرارة العقد بمقدار ٢٥ درجة مئوية . ومن الناحية العملية ، يؤخذ هذا الرقم متراوحاً بين ١٠ — ١٥° مئوية ، وذلك لأن العقد فى الواقع ، لا يصب بالخرسانة مرة واحدة ، أى كلياً ،

* يجب أن يؤخذ فى الاعتبار بالنسبة لهذا العقد $y_s = \frac{f}{3}$.

بل على هيئة أقسام منفردة . وهكذا ، يتلخص حساب انكماش العقد ، فى حساب الانخفاض المنتظم فى درجة الحرارة ، على طول العقد بأجمعه (من الجهتين الداخلية والخارجية) ، بمقدار ١٠ — ١٥° مئوية .

وأخيراً نلاحظ بأنه يمكن التخلص من تأثير انكماش الخرسانة فى العقد ، بتنظيم أو ضبط الإجهادات بالطرق الاصطناعية .

البند ٨ — ٦ : الحساب التحليلى للعقد الخالى من المفصلات الذى على شكل قطع مكافىء

إذا كان محور العقد ، على شكل قطع مكافئ مخروطى ، وكانت عزوم القصور الذاتى للمقاطع العرضية للعقد ، تتغير بموجب القانون التالى :

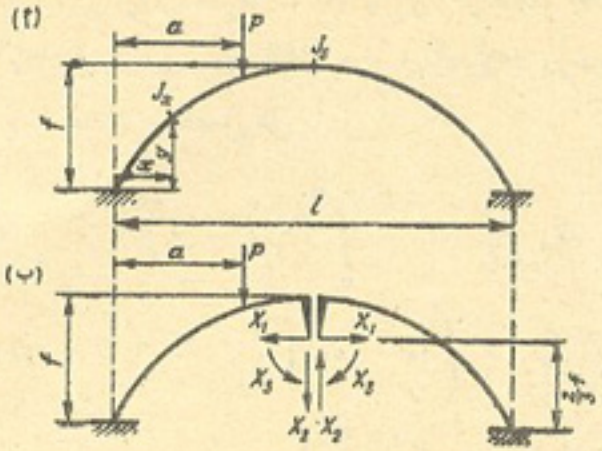
$$J_x = \frac{J_c}{\cos \varphi_x}$$

حيث J_c — عزم القصور الذاتى فى مقطع القمة ، عندئذ يؤخذ تكامل صيغ المعاملات الموضوعة قبل القوى المجهولة الإضافية ، وصيغ الحدود المطلقة فى مجموعة المعادلات القانونية . وفى هذه الحالة لتحديد الإجهادات المجهولة الإضافية X_1 ، X_2 و X_3 ، المؤثرة فى المركز المرن ، يمكن الحصول على صيغ ، تعبر بشكل واضح عن العلاقة بين كل إجهاد من هذه الإجهادات وبين الحمل المؤثر على العقد .

والآن نستخرج هذه الصيغ ، لحالة تعرض العقد لتأثير الحمل $P = 1$ ، الموضوع على مسافة a من كتف العقد الأيسر (شكل ٨ — ٢٧ ، أ) .

إن المعادلات القانونية الخاصة بالإنشاء الرئيسى ، المبين فى الشكل (٨ — ٢٧ ، ب) تكون على الشكل التالى :

$$X_1 \delta_{11} + \delta_{1P} = 0$$
$$X_2 \delta_{22} + \delta_{2P} = 0$$
$$X_3 \delta_{33} + \delta_{3P} = 0$$



الشكل ٨ — ٢٧

ومنها ينتج ان :

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} \\ X_2 &= -\frac{\delta_{2P}}{\delta_{22}} \\ X_3 &= -\frac{\delta_{3P}}{\delta_{33}} \end{aligned}\right\} \qquad (8-11)$$

ونوجد الانحرافات δ_{1P} ، δ_{2P} و δ_{3P} من صيغة الانحرافات ، مع إهمال تأثير القوى الطولية :

$$\delta_{1P} \int_0^s \overline{M}_1 \, \overline{M}_P \, \frac{ds}{EJ_x}$$

حيث $\overline{M}_P$ — عزم الانحناء الناشىء فى مقاطع الإنشاء الرئيسى ، نتيجة لتأثير الحمل $P = 1$ ،

$\overline{M}_1$ — عزم الانحناء الناشىء فى مقاطع الإنشاء الرئيسى ، نتيجة لتأثير القوى $X_1 = 1$.

وإذا عوضنا قيم $\overline{M}_P$ ، $\overline{M}_1$ ، ds و EJ_x فى صيغة الانحراف δ_{1P} ، واعتبرنا بأن الإحداثى الرأسى لمركز الثقل المرن ، فى العقد الذى نبحثه ، هو $y = \frac{2}{3} f$ ، عندئذ سنحصل على ما يلى :

$$\delta_{1P} = \int_0^a \overline{M}_1 \, \overline{M}_P \frac{ds}{EJ_x} = -\int_0^a \left(\frac{2}{3} f - y\right) 1 \times 1 \, (a - x) \times$$

$$\times \frac{dx \cos \varphi_x}{\cos \varphi_x \, EJ_e} = \int_0^a (x - a) \left[\frac{2}{3} f - \frac{4f}{l^2} (l - x) \, x\right] \frac{dx}{EJ_e} =$$

$$= \frac{fa^2}{3 EJ_e} \left(2 \frac{a}{l} - 1 - \frac{a^2}{l^2}\right)$$

لأن $y = \frac{4f}{l^2} (l - x) \, x$.

وإذا رمزنا إلى النسبة $\frac{a}{l}$ بالرمز η ، سوف نحصل أخيراً على ما يلى :

$$\delta_{1P} = -\frac{f l^2}{3 EJ_e} \eta^2 (\eta^2 - 2 \eta + 1)$$

والآن نحدد قيمة الأنحراف δ_{11} :

$$\delta_{11} = \int_0^l \overline{M}_1^2 \frac{ds}{EJ_x} = \int_0^l \left(\frac{2}{3} f - y\right)^2 \frac{dx}{EJ_e} = \frac{4}{45} \times \frac{f^2 l}{EJ_e}$$

وبتعويض قيمتى δ_{1P} و δ_{11} فى الصيغة (8 — 11) ، الخاصة بالإجهاد X_1 ، نحصل على ما يلى :

$$X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} = +\frac{15}{4} \times \frac{l}{f} \eta^2 (\eta^2 - 2\eta + 1) \qquad (8 - 12)$$

ويمكن استخدام المعادلة الأخيرة لرسم خط تأثير الإجهاد X_1 . ولهذا الغرض ، يجب إعطاء المقدار η ، عدداً من القيم التى تتراوح بين صفر و 0.5 ، ثم تحسب القيمة المناظرة ، للإحداثيات الرأسية لخط تأثير الإجهاد X_1 . أما بالنسبة لنصف العقد الأيمن $(0.5 \leqslant \eta \leqslant 1)$ ، فتحدد الإحداثيات الرأسية ،

من شرط تماثل خط تأثير الإجهاد X_1 ، بالنسبة لمنتصف أو وسط العقد .

والآن نحدد قيمة الانحراف δ_{2P} :

$$\delta_{2P} = \int_0^a \overline{M}_2 \, \overline{M}_P \frac{ds}{EJ_x} = +\int_0^a \left(\frac{l}{2} - x\right) (a - x) \frac{dx}{EJ_e} =$$

$$= \frac{l^3}{EJ_e} \eta^2 \left(\frac{\eta}{6} - \frac{1}{4}\right)$$

حيث $\eta = \frac{a}{l}$.

وقيمة الانحراف δ_{22} تساوى ما يلى :

$$\delta_{22} = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \overline{M}_2^2 \frac{ds}{EJ_x} = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{l}{2} - x\right)^2 \frac{dx}{EJ_e} = \frac{l^3}{12 EJ_e}$$

إذن :

$$X_2 = -\frac{\delta_{2P}}{\delta_{22}} = -12 \eta^2 \left(\frac{\eta}{6} - \frac{1}{4}\right) \qquad (8 - 13)$$

ويمكن استخدام المعادلة الأخيرة ، لرسم خط تأثير الإجهاد X_2 ، عند $0 \leqslant \eta \leqslant 0.5$. وتحدد الإحداثيات الرأسية لنصف العقد الأيمن $(0.5 \leqslant \eta \leqslant 1)$ ، من شرط عدم تماثل خط تأثير الإجهاد X_2 ، بالنسبة لمنتصف العقد .

والآن نحدد قيمة الانحراف δ_{3P} :

$$\delta_{3P} = \int_0^a \overline{M}_3 \, \overline{M}_P \frac{ds}{EJ_x} = -\int_0^l 1 \, (a - x) \frac{dx}{EJ_e} = -\frac{a^2}{EJ_e}$$

وقيمة الانحراف δ_{33} تساوى ما يلى :

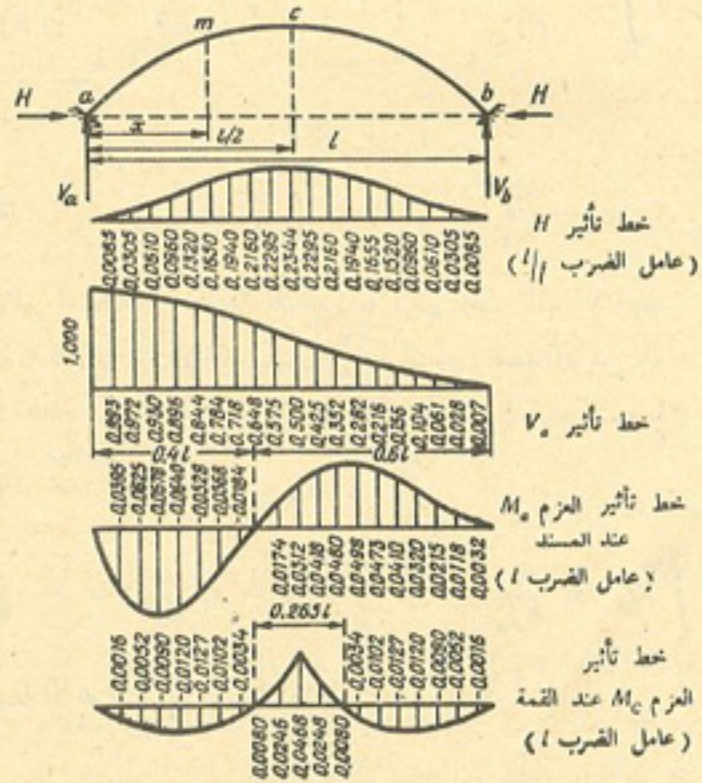
$$\delta_{33} = \int_0^l \overline{M}_3^2 \frac{ds}{EJ_x} = \int_0^l 1 \frac{dx}{EJ_e} = \frac{l}{EJ_e}$$

إذن :

$$X_3 = -\frac{\delta_{3p}}{\delta_{33}} = \frac{l\eta^2}{2} \qquad (8-14)$$

وباستخدام المعادلة الأخيرة ، يمكن بسهولة رسم خط تأثير الإجهاد X_3 ، لنصف العقد الأيسر . ولهذا الغرض يجب إعطاء المقدار η عددا من القيم التى تتراوح بين الصفر و 0.5 . وتحدد الإحداثيات الرأسية لنصف العقد الأيمن $(0.5 \leqslant \eta \leqslant 1)$ ، من شرط تماثل خط التأثير ، بالنسبة لمنتصف العقد .

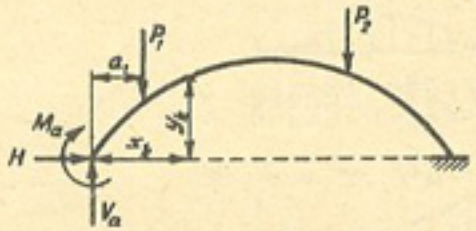
وباستخدام المعادلات الموضوعة للقوى المجهولة الزائدة X_1 ، X_2 و X_3 ، يمكن تحديد الإجهادات الداخلية ، الناشئة فى أى مقطع من مقاطع العقد ، نتيجة لتأثير أى حمل رأسى ، ويمكن كذلك رسم خطوط تأثير هذه الإجهادات .



الشكل ٨ – ٢٨

ويبين الشكل (٨ – ٢٨) خطوط تأثير القوة الدفعية H ، ورد الفعل الرأسى V_a ، وعزم المسند M_a (أى خطوط تأثير الإجهادات الداخلية ، الناشئة فى مقطع المسند الأيسر للعقد) ، وكذلك خط تأثير عزم الانحناء M_c فى مقطع قمة العقد . وعند حساب الإحداثيات الرأسية لخطوط التأثير هذه ، استخدمت المعادلات الموضوعة للقوى المجهولة الزائدة X_1 ، X_2 و X_3 ، المؤثرة فى المركز المرن .

إن خطوط التأثير المبينة فى الشكل (٨ – ٢٨) ، صحيحة بالنسبة لأى عقود خالية من المفصلات ، مصممة على شكل قطع مكافئ تربيعى ، وعزم قصورها الذاتى يتغير طبقاً للقانون المشار إليه فى بداية هذا البند . وباستخدام خطوط التأثير هذه ، يمكن تحديد الإجهادات الداخلية الناشئة فى أى مقطع من مقاطع العقد ، نتيجة لتأثير أى حمل من الأحمال الرأسية . ولهذا الغرض يجب اتباع الطريقة التالية : نوجد فى البداية قيم كل من القوى V_a و H و M_a ، الناجمة عن تأثير الحمل المعلوم ، بضرب القوى فى الإحداثيات الرأسية لخطوط التأثير ، المناظرة لها ، أما شدة الحمل الموزع بانتظام ، فتضرب فى مساحة خط التأثير المناظرة . ثم نسلط القيم المستخرجة لردى الفعل V_a و H وعزم المسند M_a ، على الكتف الأيسر للعقد ، المحرر من التثبيتة ، ونعتبر هذه القوى بمثابة أحمال خارجية ، وبعد ذلك تحدد القوى الداخلية فى أى مقطع من مقاطع العقد ، كما تحدد فى العتبة البسيطة المحددة استاتيكيا ، ذات المحور المنحنى * . وعلى سبيل المثال ، عندما يتعرض العقد لتأثير الحملين P_1 و P_2 (شكل ٨ – ٢٩) ، يكون العزم الناشىء فى المقطع K ، مساوياً لما يلى :



الشكل ٨ – ٢٩

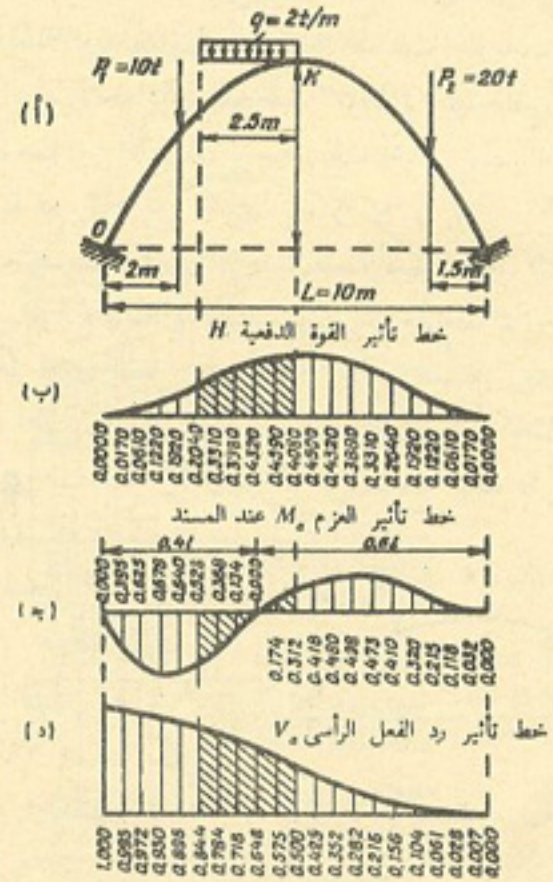
* يمكن لهذا الغرض استخدام خطوط تأثير الإجهادات X_1 ، X_2 و X_3 ، بدلا من خطوط تأثير القوى H ، V_a و M_a .

$$M_k = V_a x_k - H y_k + M_a - P_1 (x_k - a_1)$$

مثال : لدينا عقد مصمم على هيئة قطع مكافىء (شكل ٨ – ٣٠ ، أ) ، معرض لتأثير الحملين المركزين $P_1 = 10\ t$ و $P_2 = 20\ t$ ؛ وحمل موزع بانتظام بشدة قدرها $q = 2\ t/m$ ، موضوع فى الربع الثانى من الباع . يطلب تحديد ما يلى :

(١) ردى الفعل H و V_a وعزم المسند M_a ،

(٢) عزم الانحناء ، القوى الطولية وقوى القص فى المقطع K ، ذى الإحداثى السينى $x_k = \frac{l}{2}$ (مقطع القمة) .



الشكل ٨ – ٣٠

هذا مع العلم بأن معادلة محور العقد هى :

$$y = \frac{4f}{l_2} (l - x)\, x = 0.2\, (10 - x)\, x$$

وعزوم القصور الذاتى لمقاطع العقد ، تتغير حسب القانون التالى :

$$J_x = \frac{J_c}{\cos \varphi_x}$$

الحل : نبدأ برسم خط تأثير رد الفعل H . ولهذا الغرض ، نضرب جميع الإحداثيات الرأسية لخط تأثير رد الفعل H ، المبين فى الشكل (٨ – ٢٨) فى المعامل $\frac{l}{f}$ ، الذى فى هذه الحالة يساوى 2 ، لأن $l = 10\ m$ و $f = 5\ m$. والشكل (٨ – ٣٠ ، ب) يبين خط تأثير رد الفعل H للعقد الذى نبحثه .

ثم نرسم خط تأثير العزم M_a . ولهذا الغرض نضرب جميع الإحداثيات الرأسية لخط تأثير M_a (شكل ٨ – ٢٨) فى المعامل l . والشكل (٨ – ٣٠ ، جـ) يمثل خط تأثير العزم M_a .

وبما أن الإحداثيات الرأسية لخط تأثير العزم V_a ، فى العقد الذى على شكل قطع مكافىء ، لا تعتمد على النسبة بين الباع l وسهم الانحناء f ، إذن نرسم خط تأثير رد الفعل V_a كليا ، المبين فى الشكل (٨ – ٢٨) . وبواسطة خط التأثير المرسوم ، نحدد قيمة القوة الدفعية H ، الناجمة عن تعرض العقد لتأثير الحمل المبين فى الشكل (٨ – ٣٠ ، أ) . ولهذا الغرض ، نضرب كل حمل مركز ، فى الإحداثى الرأسى لخط التأثير ، الواقع تحته ، ونضرب شدة الحمل الموزع بانتظام ، فى مساحة خط التأثير ، التى تحصر تأثير هذا الحمل ضمن حدودها . وسوف تحسب مساحة خط التأثير ، من الصيغة التقريبية ، المبنية على اساس استبدال الاقسام المنحنية الواقعة بين الإحداثيات الرأسية المعلومة ، بأقسام مستقيمة .

وعندما تكون المسافة a الواقعة بين الإحداثيات الرأسية ، متساوية جميعاً ، تكون صيغة تحديد مساحة خط التأثير ، المحصورة بين الإحداثيين الرأسيين h_n و h_m على الشكل التالى :

$$(\omega)_n^m = a \left(\frac{h_n}{2} + h_{n+1} + h_{n+2} + \dots + h_{m-1} + \frac{h_m}{2} \right)$$

وقيمة القوة الدفعية H تساوى ما يلى :

$$H = P_1 \times 0.1920 + P_2 \times 0.1220 + q \left(\frac{0.2640}{2} + 0.3310 + 0.3880 + 0.4320 + 0.4590 + \frac{0.4688}{2} \right) \times 0.5 = 6.3364\ t$$

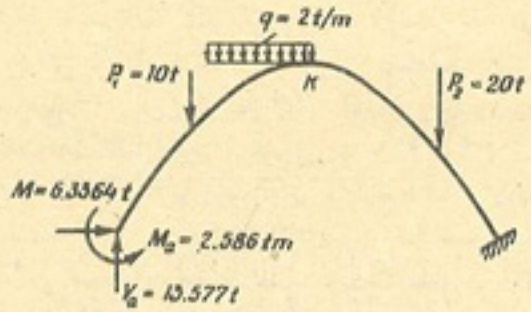
والآن نوجد رد الفعل الرأسى V_a (نحدده باستخدام خط التأثير) :

$$V_a = P_1 \times 0.896 + P_2 \times 0.061 + q \left(\frac{0.844}{2} + 0.784 + 0.718 + \right.$$
$$\left. + 0.648 + 0.575 + \frac{0.500}{2} \right) \times 0.5 = 13.577 \text{ t}$$

وبنفس الطريقة نحدد عزم المسند M_a :

$$M_a = P_1 \left(- 0.640 + P_2 \times 0.215 + q \left(- \frac{0.528}{2} - 0.368 - \right.\right.$$
$$\left.\left. - 0.184 + 0.000 + 0.174 + \frac{0.312}{2} \right) \times 0.5 = - 2.586 \text{ tm} \right.$$

ثم نسلط قيمتى ردى الفعل المستخرجين H و V_a ، والعزم M_a ، على كتف العقد الأيسر ، المحرر من التثبيت (شكل ٨ – ٣١) .



الشكل ٨ – ٣١

إن عزم الانحناء فى مقطع القمة K ، يساوى ما يلى :

$$M_k = - M_a + V_a \frac{l}{2} - Hf - P_1 \left(\frac{l}{2} - 2 \right) - q \frac{l}{2} \times \frac{l}{8} = - 2.586 +$$
$$+ 13.577 \times 5 - 6.3364 \times 5 - 10 \times 3 - \frac{2 \times 100}{32} = - 2.633 \text{ tm}$$

ولتحديد القوة الطولية فى مقطع القمة ، نرسم مماس محور العقد فى هذا المقطع ، ونسقط كافة القوى اليسرى ، على اتجاه المماس :

$$N_k = H = 6.3364 \text{ t} \quad \text{(الانضغاط)}$$

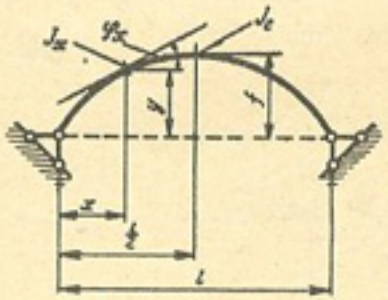
ولتحديد قوة القص فى هذا المقطع بالذات ، نسقط القوى اليسرى ، على المستقيم العمودى على المماس :

$$Q_k = V_a - P_1 - q \frac{l}{4} = 13.577 - 10 - \frac{2 \times 10}{4} = - 1.423 \text{ t}$$

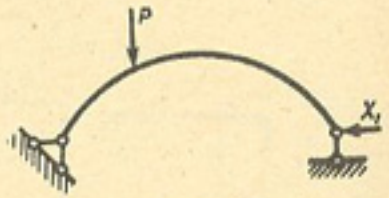
ونلاحظ أخيرا ، أنه بالإضافة إلى حساب عقود الجسور ، المبنى على الاستخدام المباشر لصيغ الميكانيكا الإنشائية ، تستخدم فى التطبيق العملى ، طرق تسمى **بالطرق السريعة لحساب العقود** . وفى هذه الحالة ، تستخدم جداول جاهزة ، موضوعة لمختلف البارامترات (القيم المتغيرة) ، التى توضح درجة استواء وانحناء العقد ، وكذلك قانون تغير أبعاد مقاطعه العرضية . إن استخدام هذه الطرق ، يؤدى أولا إلى اختصار الوقت ، وثانياً يقلل أحتمال الوقوع فى الخطأ ، المرتبط بأجراء عمليات حسابية ضخمة ومعقدة ، تعتمد على الاستخدام المباشر للصيغ الاستاتيكية للإنشاءات .

البند ٨ – ٧ : العقد المتصل بمفصلتين

عند حساب العقد المتصل بمفصلتين ، تعتبر العتبة المنحنية المبينة فى الشكل (٨ – ٣٢) عادة ، بمثابة الإنشاء الرئيسى .



الشكل ٨ – ٣٣



الشكل ٨ – ٣٢

والمعادلة القانونية ، التى تنفى حدوث الانحراف فى اتجاه الإجهاد المجهول الزائد X_1 ، تكون على الشكل التالى :

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1p} = 0$$

إن قيم الانحرافين δ_{11} و Δ_{1p} للعقود المستوية ، تحدد من الصيغتين التاليتين ، مع أخذ القوى الطولية فى الاعتبار :

$$\delta_{11} = \Sigma \int_0^s \overline{M}_1^2 \frac{ds}{EJ} + \Sigma \int_0^s \overline{N}_1^2 \frac{ds}{EF}$$

$$\Delta_{1P} = \Sigma \int_0^s \overline{M}_1 M_P \frac{ds}{EJ} + \Sigma \int_0^s \overline{N}_1 N_P \frac{ds}{EF}$$

وفى الحالات التى يكون فيها أخذ تكامل صيغتى الانحرافين δ_{11} و Δ_{1P} ، صعباً أو غير ممكن ، يستخدم التكامل العددى ، أو طريقة الأحمال المرنة .

وعادة تؤخذ عزوم القصور الذاتى لمقاطع العقد المتصل بمفصلتين ، ثابتة على طول العقد ، أو متغيرة حسب القانون التالى (شكل ٨ – ٣٣) :

$$J_x = J_c \cos \varphi_x$$

حيث J_x – عزم القصور الذاتى للعقد ، فى مقطع القمة .

وكذلك غالبا ما تؤخذ مساحة المقطع العرضى للعقد ، متغيرة حسب القانون التالى :

$$F_x = F_c \cos \varphi_x$$

حيث F_c – مساحة المقطع العرضى عند القمة .

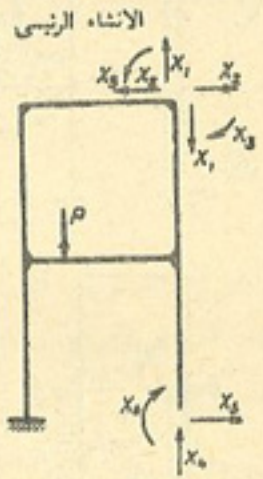
الفصل التاسع

حساب الانشاءات غير المحددة استاتيكيا المعقدة ، بطريقة القوى

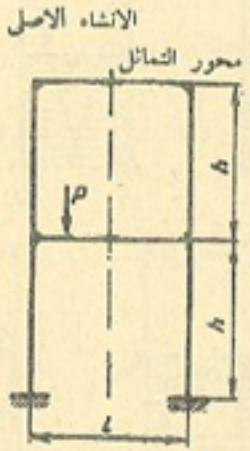
البند ٩ – ١ : استخدام التماثل

عند حساب الإنشاء غير المحدد استاتيكيًا ، الذى يحتوى على عدد كبير من القوى المجهولة ، يتحتم علينا أن نجرى الحل الآنى للمعادلات القانونية المحتوية على مجاهيل كثيرة .

لنبحث على سبيل المثال ، الإطار المبين فى الشكل (٩ – ١) ، المؤلف من محيطين مقفلين ، وهو بالتالى إنشاء غير محدد استاتيكيًا من الدرجة السادسة . وعند حساب هذا الإطار ، بواسطة الإنشاء الرئيسى المبين فى الشكل (٩ – ٢) ،



الشكل ٩ – ٢

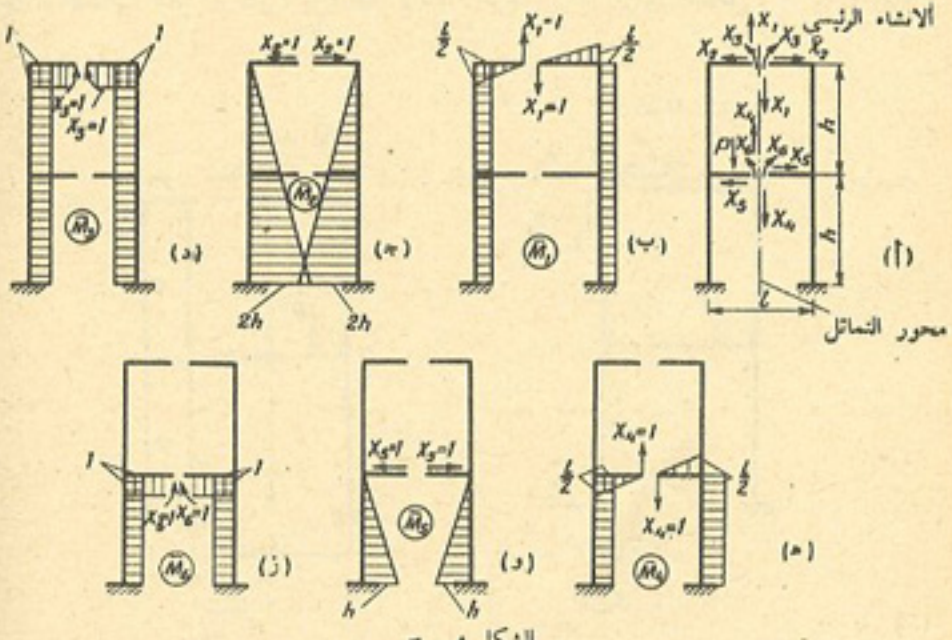


الشكل ٩ – ١

يجب وضع وحل ست معادلات تحتوى على ستة مجاهيل :

$$
\left.
\begin{aligned}
X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} + X_4\delta_{14} + X_5\delta_{15} + X_6\delta_{16} + \Delta_{1P} &= 0\\
X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} + X_4\delta_{24} + X_5\delta_{25} + X_6\delta_{26} + \Delta_{2P} &= 0\\
X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + X_4\delta_{34} + X_5\delta_{35} + X_6\delta_{36} + \Delta_{3P} &= 0\\
X_1\delta_{41} + X_2\delta_{42} + X_3\delta_{43} + X_4\delta_{44} + X_5\delta_{45} + X_6\delta_{46} + \Delta_{4P} &= 0\\
X_1\delta_{51} + X_2\delta_{52} + X_3\delta_{53} + X_4\delta_{54} + X_5\delta_{55} + X_6\delta_{56} + \Delta_{5P} &= 0\\
X_1\delta_{61} + X_2\delta_{62} + X_3\delta_{63} + X_4\delta_{64} + X_5\delta_{65} + X_6\delta_{66} + \Delta_{6P} &= 0
\end{aligned}
\right\} \quad (9-1)
$$

إن حل مثل هذه المجموعة من المعادلات ، يتطلب وقتاً طويلا . ولكن الظرف الذى جعل الإطار المبحوث يعتبر إنشاءاً متماثلا ، أى انشاءاً ، ليس لشكله الهندسى وحده محور تماثل (وهو الشكل المؤلف من محاور القضبان) ، بل وجسوءات القضبان المتماثلة الوضع فيه ، متساوية فيما بينها أيضاً ، هو الظرف الذى يساعد على تبسيط حساب الإطار المذكور إلى درجة كبيرة . وهذا التبسيط يستند إلى الإمكانية المتاحة لنا ، عند حساب الإنشاءات المتماثلة ، بأن نختار الإنشاء الرئيسى دائماً ، بحيث تكون وحدة الرسم البيانى للعزوم $\overline{M}_i$ ، الناجمة عن كل قوة من القوى المجهولة $X_i = 1$ ، إما متماثلة أو متماثلة عكسيًّا (عكسية التماثل) .



الشكل ٩ – ٣

وإذا اعتبرنا عند حساب الإطار المبحوث (شكل ٩ – ١) ، بأن الإنشاء الرئيسى هو على سبيل المثال ، الإنشاء المبين فى الشكل (٩ – ٣ ، أ) فسوف تكون الرسوم البيانية للعزوم $\overline{M}_2$ ، $\overline{M}_3$ ، $\overline{M}_5$ و $\overline{M}_6$ ، الناجمة عن وحدات الإجهادات المتماثلة X_2 ، X_3 ، X_5 و X_6 ، متماثلة أيضاً (شكل ٩ – ٣ ، جـ ، د ، و ، ز) ، أما الرسوم البيانية للعزوم $\overline{M}_1$ و $\overline{M}_4$ الناجمة عن تأثير وحدات الإجهاد العكسية التماثل X_1 و X_4 ، فسوف تكون هى الأخرى عكسية التماثل أيضاً (شكل ٩ – ٣ ، ب ، هـ) .

إن حاصل ضرب الرسم البيانى المتماثل فى الرسم البيانى العكسى التماثل ، يساوى صفراً . وعلى سبيل المثال ، إذا ضربنا الرسم البيانى للعزوم $\overline{M}_1$ (شكل ٩ – ٣ ، ب) فى الرسم البيانى للعزوم $\overline{M}_2$ (شكل ٩ – ٣ ، جـ) ، فسوف نحصل على ما يلى بالنسبة للنصف الأيسر من الإطار :

$$+ 2h\,\frac{2h}{2} \times \frac{l}{2} = + h^2 l$$

وللنصف الأيمن من الإطار :

$$- 2h\,\frac{2h}{2} \times \frac{l}{2} = - h^2 l$$

إذن نجد بأن الانحراف δ_{12} يساوى ما يلى :

$$\delta_{12} = \frac{1}{EJ}\left(+ h^2 l - h^2 l \right) = 0$$

وبنفس الطريقة السابقة ، نجد بأن جميع الانحرافات الثانوية ، للإطار المبحوث ، المحددة بضرب الرسم البيانى المتماثل فى الرسم البيانى العكسى التماثل ، وعلى الأخص الانحرافات التالية ، وهى : δ_{12} ، δ_{13} ، δ_{15} ، δ_{16} ، δ_{21} ، δ_{24} ، δ_{31} ، δ_{34} ، δ_{42} ، δ_{43} ، δ_{45} ، δ_{46} ، δ_{51} ، δ_{54} ، δ_{61} ، و δ_{64} تساوى صفراً .

ونتيجة لذلك ، يكون شكل مجموعة المعادلات القانونية ، كما يلى :

$$
\begin{aligned}
X_1\,\delta_{11} + X_4\,\delta_{14} + \Delta_{1P} &= 0\\
X_2\,\delta_{22} + X_3\,\delta_{23} + X_5\,\delta_{25} + X_6\,\delta_{26} + \Delta_{2P} &= 0\\
X_2\,\delta_{32} + X_3\,\delta_{33} + X_5\,\delta_{35} + X_6\,\delta_{36} + \Delta_{3P} &= 0\\
X_1\,\delta_{41} + X_4\,\delta_{44} + \Delta_{4P} &= 0\\
X_2\,\delta_{52} + X_3\,\delta_{53} + X_5\,\delta_{55} + X_6\,\Delta_{55} + \Delta_{5P} &= 0\\
X_2\,\delta_{62} + X_3\,\delta_{63} + X_5\,\delta_{65} + X_6\,\delta_{66} + \Delta_{6P} &= 0
\end{aligned}
$$

أى تنفصل إلى مجموعتين مستقلتين من المعادلات القانونية وهما :

$$
\left.\begin{aligned}
X_1\,\delta_{11} + X_4\,\delta_{14} + \Delta_{1P} &= 0\\
X_1\,\delta_{41} + X_4\,\delta_{44} + \Delta_{4P} &= 0
\end{aligned}\right\} \qquad (9-2)
$$

و

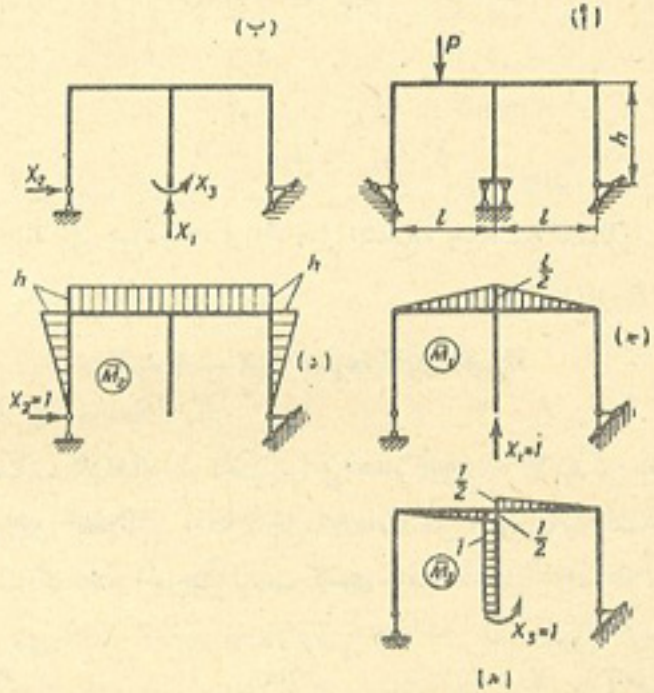
$$
\left.\begin{aligned}
X_2\,\delta_{22} + X_3\,\delta_{23} + X_5\,\delta_{25} + X_6\,\delta_{26} + \Delta_{2P} &= 0\\
X_2\,\delta_{32} + X_3\,\delta_{33} + X_5\,\delta_{35} + X_6\,\delta_{36} + \Delta_{3P} &= 0\\
X_2\,\delta_{52} + X_3\,\delta_{53} + X_5\,\delta_{55} + X_6\,\delta_{56} + \Delta_{5P} &= 0\\
X_2\,\delta_{62} + X_3\,\delta_{63} + X_5\,\delta_{65} + X_6\,\delta_{66} + \Delta_{6P} &= 0
\end{aligned}\right\} \qquad (9-3)
$$

وتحتوى المجموعة الأولى من هاتين المجموعتين على مجهولين عكسيى التماثل ومعادلتين ، أما المجموعة الثانية فتحتوى على أربعة مجاهيل متماثلة وأربع معادلات .

وهكذا نجد بأن استخدام التماثل عند اختيار الإنشاء الرئيسى ، ساعد على استبدال حل مجموعة مؤلفة من ست معادلات ، تحتوى على ستة مجاهيل ، بحل مجموعتين مستقلتين من المعادلات ، تحتوى إحداهما على معادلتين ومجهولين ، وتحتوى الأخرى على أربع معادلات وأربعة مجاهيل . وهذا يقلص حجم العمليات الحسابية كثيراً ، ولذلك يساعد على تحديد قيم المجاهيل بدقة أكبر . ولا يتقلص حجم العمليات الحسابية نتيجة لتبسيط مجموعة المعادلات القانونية وتقليل عدد الانحرافات δ المحسوبة ، بل وكذلك لأنه يمكن الآن تحديد هذه الانحرافات بضرب الرسوم البيانية المناظرة ، بالنسبة لقضبان نصف واحد فقط من الإنشاء (مع مضاعفة النتيجة التى نحصل عليها) .

وإذا كان الإطار المتماثل يحتوى على ضلع قائم متوسط ، عندئذ تحسب الانحرافات δ الناجمة عن القوى المجهولة المتماثلة ، أولا بضرب الرسوم البيانية المناظرة ، لقطع أو قضبان نصف واحد فقط من الإطار (بدون أخذ الضلع القائم المتوسط فى الاعتبار) ، ثم تضاعف النتيجة المستخرجة ، وتضاف إليها نتيجة ضرب الرسوم البيانية للضلع القائم المتوسط فى الإطار .

والآن نأتى إلى بحث الإطار المتماثل ، المبين فى الشكل (٩ – ٤ ، أ) . إن هذا الإطار غير محدد استاتيكياً من الدرجة الثالثة . ويبين الشكل (٩–٤ ، ب)



الشكل ٩ – ٤

أحد الأوجه الممكنة للإنشاء الرئيسى ، المستخدم لحساب الإطار . وهذا الإنشاء الرئيسى غير متماثل ، وذلك لأن وصلات تثبيت الأطراف السفلى للأضلاع القائمة الطرفية ، مختلفة . وكذلك فإن القوى المجهولة X_1 ، X_2 و X_3 هى الأخرى

غير متماثلة . ولكن الرسوم البيانية لعزوم الانحناء ، فى الإنشاء الرئيسى ، الناجمة عن تأثير القوى المجهولة $X_1 = 1$ و $X_2 = 1$ (شكل ٩ — ٤ ، ج ، د) . هى رسوم متماثلة ، أما الرسم البيانى الناجم عن تأثير القوة المجهولة $X_3 = 1$ (شكل ٩ — ٤ ، هـ) ، فهو رسم بيانى عكسى التماثل .

ولهذا السبب نجد بأن المعادلات القانونية (فى حالة الإنشاء الرئيسى المعلوم) تنفصل إلى مجموعتين مستقلتين من المعادلات ، هما :

$$X_1\,\delta_{11} + X_2\,\delta_{12} + \Delta_{1P} = 0$$
$$X_1\,\delta_{21} + X_2\,\delta_{22} + \Delta_{2P} = 0$$

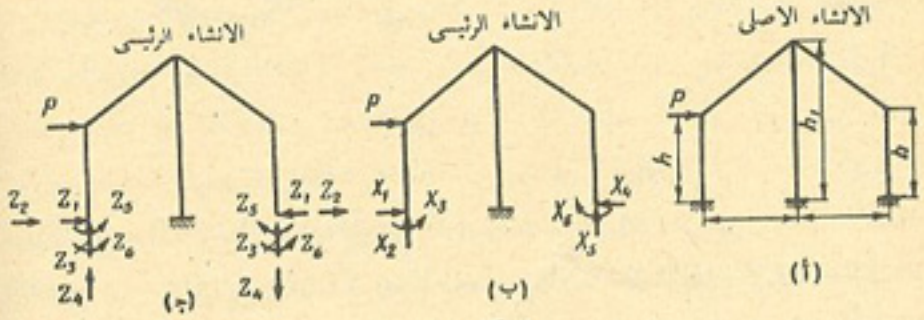
و

$$X_3\,\delta_{33} + \Delta_{3P} = 0$$

وهى نفس الحالة التى صادفناها فى المجاهيل المتماثلة والعكسية التماثل .

البند ٩ — ٢ : مجموعة القوى المجهولة

عند حساب الإنشاءات المحتوية على عدة أبواع ، لا يمكن وضع جميع المجاهيل على محور التماثل . ولهذا لأجل الحصول على رسوم بيانية متماثلة وعكسية التماثل ، يجب أن تعتبر المجاهيل ليست كقوى منفردة ، بل كمجموعة من القوى .



الشكل ٩ — ٥

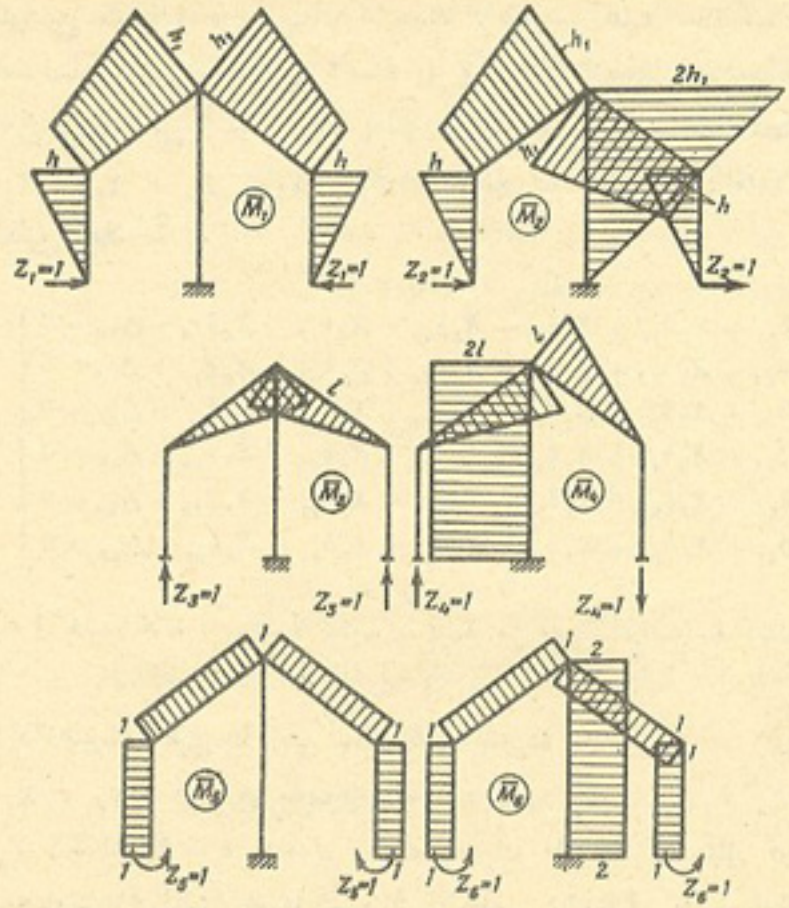
وكمثال لتوضيح حقيقة هذه الطريقة ، سنبحث الإطار غير المحدد استاتيكياً من الدرجة السادسة ، المبين فى الشكل (٩ — ٥ ، أ) . فإذا اتخذنا عند حسابه ، الإنشاء الرئيسى (شكل ٩ — ٥ ، ب) ذى القوى المجهولة الزائدة غير المتماثلة X_1 ، X_2 ، X_3 ، X_4 ، X_5 ، X_6 ، عندئذ يجب علينا حل المعادلات الستة التالية ، حلا آنياً :

$$\left.\begin{aligned}
X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} + X_4\delta_{14} + X_5\delta_{15} + X_6\delta_{16} + \Delta_{1P} &= 0\\
X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} + X_4\delta_{24} + X_5\delta_{25} + X_6\delta_{26} + \Delta_{2P} &= 0\\
X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + X_4\delta_{34} + X_5\delta_{35} + X_6\delta_{36} + \Delta_{3P} &= 0\\
X_1\delta_{41} + X_2\delta_{42} + X_3\delta_{43} + X_4\delta_{44} + X_5\delta_{45} + X_6\delta_{46} + \Delta_{4P} &= 0\\
X_1\delta_{51} + X_2\delta_{52} + X_3\delta_{53} + X_4\delta_{54} + X_5\delta_{55} + X_6\delta_{56} + \Delta_{5P} &= 0\\
X_1\delta_{61} + X_2\delta_{62} + X_3\delta_{63} + X_4\delta_{64} + X_5\delta_{65} + X_6\delta_{66} + \Delta_{6P} &= 0
\end{aligned}\right\} \quad (9-4)$$

وذلك لأنه فى هذه الحالة ، سوف لا تكون أية قيمة من قيم الانحراف δ مساوية للصفر .

أما إذا اعتبرنا المجاهيل هنا ، هى ليست القوى المنفردة X_1 ، X_2 ، X_3 ، X_4 ، X_5 ، X_6 ، بل هى مجموعات القوى Z_1 ، Z_2 ، Z_3 ، Z_4 ، Z_5 و Z_6 (شكل ٩ — ٥ ، ج) ، واعتبرنا بأن المجموعة Z_1 تمثل قوتين أفقيتين متساويتين فى المقدار ومتعاكستين فى الاتجاه ، تؤثران فى وقت واحد ، والمجموعة Z_2 تمثل قوتين أفقيتين متساويتين فى المقدار والاتجاه ، والمجموعة Z_3 تمثل قوتين رأسيتين متساويتين ، ومتجهتين إلى الأعلى ، والمجموعة Z_4 تمثل قوتين رأسيتين متساويتين فى المقدار ومتعاكستين فى الاتجاه ، والمجموعة Z_5 تمثل عزمين متساويين فى المقدار ومتعاكستين فى الاتجاه ، والمجموعة Z_6 تمثل عزمين متساويين فى المقدار والاتجاه ، عندئذ سنجد بأن كثيراً من المعاملات ، ستصبح مساوية للصفر ، وذلك لأنها سوف تحدد بضرب الرسوم البيانية المتماثلة فى الرسوم البيانية العكسية التماثل .

ويبين الشكل (٩ — ٦) ، الرسوم البيانية لعزوم الانحناء ، الناجمة عن تأثير مجموعات القوى المذكورة ، والرسوم البيانية المتماثلة منها ، هى الرسوم



الشكل ٩ – ٦

البيانية لكل من العزوم $\overline{M}_1$ ، $\overline{M}_3$ و $\overline{M}_5$ ، أما الرسوم البيانية للعزوم $\overline{M}_2$ ، $\overline{M}_4$ و $\overline{M}_6$ ، فهى عكسية التماثل .

وبمقارنة الإنشائين الرئيسيين ، المبينين فى الشكل (٩ – ٥ ، ب وجـ) مع بعضهما البعض ، يتضح لنا بسهولة ، وجود العلاقة التالية * بين المجهولين الزائدين X و Z :

* نلاحظ بأنه لتخطيط الرسوم البيانية النهائية للإجهادات ، لا نحتاج إلى حساب قيم المجهول X .

$$X_1 = Z_1 + Z_2 \quad ; \quad X_4 = Z_1 - Z_2$$
$$X_2 = Z_3 + Z_4 \quad ; \quad X_5 = Z_3 - Z_4$$
$$X_3 = Z_5 + Z_6 \quad ; \quad X_6 = Z_5 - Z_6$$

ويمكن وضع هذه العلاقة على الشكل التالى :

$$Z_1 = \frac{X_1 + X_4}{2} \quad ; \quad Z_4 = \frac{X_2 - X_5}{2}$$
$$Z_2 = \frac{X_1 - X_4}{2} \quad ; \quad Z_5 = \frac{X_3 + X_6}{2}$$
$$Z_3 = \frac{X_2 + X_5}{2} \quad ; \quad Z_6 = \frac{X_3 - X_6}{2}$$

ونتيجة لتقسيم المجاهيل إلى مجموعات ، تنفصل مجموعة المعادلات القانونية (4 – 9) إلى مجموعتين مستقلتين ، هما (5 – 9) و (6 – 9) ، تدخل فى إحداهما المجاهيل المتماثلة فقط ، بينما تدخل فى الأخرى المجاهيل العكسية التماثل :

(أ) المجموعة الأولى :

$$\left.\begin{aligned} Z_1\,(\delta_{11}) + Z_3\,(\delta_{13}) + Z_5\,(\delta_{15}) + (\Delta_{1P}) &= 0 \\ Z_1\,(\delta_{31}) + Z_3\,(\delta_{33}) + Z_5\,(\delta_{35}) + (\Delta_{3P}) &= 0 \\ Z_1\,(\delta_{51}) + Z_3\,(\delta_{53}) + Z_5\,(\delta_{55}) + (\Delta_{5P}) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (9-5)$$

(ب) المجموعة الثانية :

$$\left.\begin{aligned} Z_2\,(\delta_{22}) + Z_4\,(\delta_{24}) + Z_6\,(\delta_{26}) + (\Delta_{2P}) &= 0 \\ Z_2\,(\delta_{42}) + Z_4\,(\delta_{44}) + Z_6\,(\delta_{46}) + (\Delta_{4P}) &= 0 \\ Z_2\,(\delta_{62}) + Z_4\,(\delta_{64}) + Z_6\,(\delta_{66}) + (\Delta_{6P}) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (9-6)$$

وهنا δ_{ik} و Δ_{iP} تمثلان الانحرافات الجماعية .

وهكذا ، نجد بأن مجموعة المعادلات المعقدة ، تنقسم بفضل التصنيف الفنى للمجاهيل ، إلى مجموعتين أكثر بساطة . وبفضل ذلك ، يتقلص حجم العمليات الحسابية ويصبح أصغر بعدة مرات .

وفيما بعد ، سنرمز إلى القوى (الإجهادات) المجهولة ، بالرمز X ، بغض النظر عن كونها منفردة أو على هيئة مجموعات . وسوف لا نضع رموز الانحرافات الجماعية ، فى داخل الأقواس .

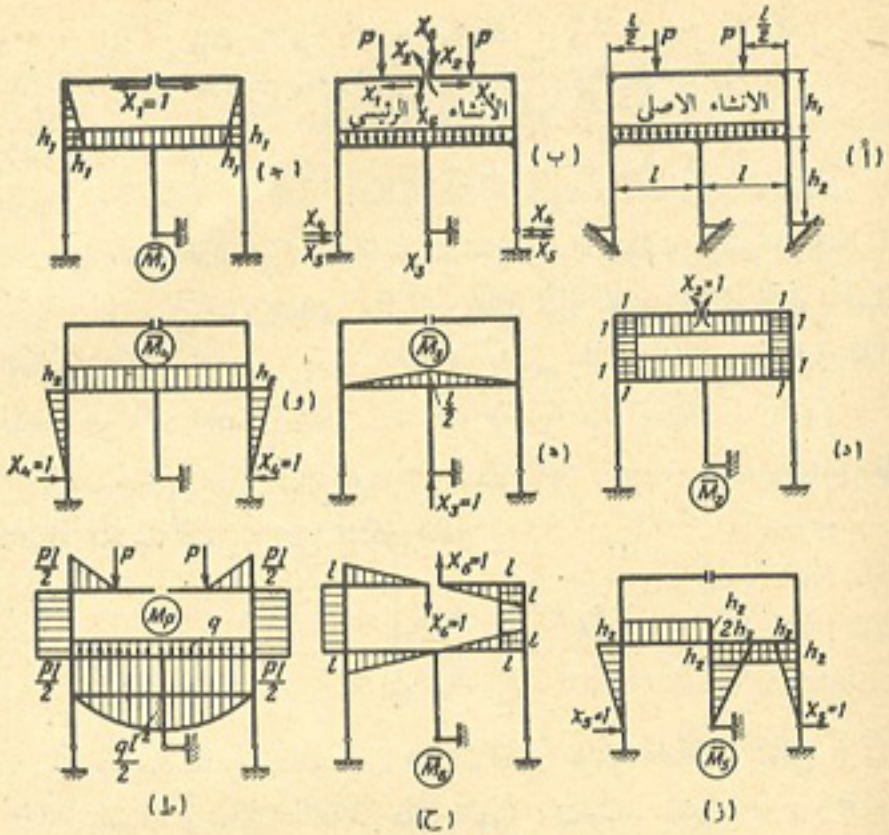
وتحدد الانحرافات الجماعية ، كما تحدد الانحرافات العادية غير الجماعية δ_{iK} ، Δ_{iP} ، أى بضرب الرسوم البيانية المناظرة ، المخططة للإنشاء الرئيسى .

إن تحديد الانحرافات الجماعية ليس أصعب من تحديد الانحرافات العادية ؛ لأنه يتم ايضاً بضرب الرسوم البيانية ، لنصف الإطار ، مع مضاعفة النتيجة التى نحصل عليها . وعند احتواء الإطار على ضلع قائم متوسط ، يتم ضرب الرسوم البيانية ، أولا بالنسبة لقضبان (قطع) نصف واحد فقط من الإطار (بدون أخذ الضلع القائم المتوسط فى الاعتبار) ، ثم تضاعف النتيجة الحاصلة ؛ وتضاف إليها نتيجة ضرب الرسوم البيانية للضلع القائم المتوسط فى الإطار :

البند ٩ — ٣ : الأحمال المتماثلة والأحمال العكسية التماثل

عند تعرض الإنشاء لتأثير الأحمال المتماثلة فقط ، أو لتأثير الأحمال العكسية التماثل فقط ، تصبح المسألة أكثر بساطة ، ذلك لأنه فى هذه الحالة ، يمكن اختيار الإنشاء الرئيسى ، بحيث لا تكون كافة وحدات الرسوم البيانية وحدها متماثلة أو عكسية التماثل ، بل كذلك الرسوم البيانية لحالة التحميل الحقيقى : ونتيجة لذلك ، سوف لا يصبح العديد من معادلات المجاهيل وحدها ، مساوياً للصفر ، بل وكذلك ستصبح بعض الحدود المطلقة لمجموعة المعادلات القانونية ، مساوية للصفر أيضاً :

لنبحث الإطار (شكل ٩ — ٧ ، أ) الواقع تحت تأثير الحمل المتماثل : يحتوى هذا الإطار على ستة مجاهيل زائدة . وباستحداث مقطع فى وسط العارضة العليا ، ورفع (إزالة) ثلاثة قضبان ساندة ، نحصل على إنشاء رئيسى — (شكل ٩ — ٧ ، ب) يحتوى على مجاهيل متماثلة ومجاهيل عكسية التماثل . والمجاهيل الزائدة ، لا تقع على محور التماثل ، وتمثل فى هذه الحالة بالذات المركبات



الشكل ٩ — ٧

الأفقية لردود فعل المساند الطرفية ، المحولة إلى مجموعتين من القوى هى X_4 و X_5 :

ويبين الشكل (٩ — ٧ ، من ج إلى ط) الرسوم البيانية لعزوم الانحناء ، للإنشاء الرئيسى ، الناجمة عن تأثير كافة وحدات القوى المجهولة وعن تأثير الحمل المعلوم . وبما أن كافة القوى (الإجهادات) قد اختيرت ، بحيث تم تصنيفها إلى مجموعتين ، هما المجموعة المتماثلة (X_1 ، X_2 ، X_3 ، X_4) والمجموعة العكسية التماثل (X_5 و X_6) ، إذن تنقسم المعادلات القانونية إلى مجموعتين مستقلتين من المعادلات ، هما :

$$X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13} + X_4 \delta_{14} + \Delta_{1P} = 0$$
$$X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} + X_4 \delta_{24} + \Delta_{2P} = 0$$

$$X_1\,\delta_{31} + X_2\,\delta_{32} + X_3\,\delta_{33} + X_4\,\delta_{34} + \Delta_{3P} = 0$$
$$X_1\,\delta_{41} + X_2\,\delta_{42} + X_3\,\delta_{43} + X_4\,\delta_{44} + \Delta_{4P} = 0$$
$$\left.\begin{aligned} X_5\,\delta_{55} + X_6\,\delta_{56} + \Delta_{5P} &= 0 \\ X_5\,\delta_{65} + X_6\,\delta_{66} + \Delta_{6P} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (9-7)$$

وفى هاتين المجموعتين ، نجد بأن الانحرافات الناجمة عن تأثير الأحمال ، وهى Δ_{5P} و Δ_{6P} ، تساوى صفراً ، وذلك لأنها تحدد بضرب الرسوم البيانية العكسية التماثل للعزوم $\overline{M}_5$ و $\overline{M}_6$ فى الرسم البيانى المتماثل للعزم M_P ، الناجم عن تأثير الحمل (شكل ٩ – ٧ ، ط) .

إذن يمكن اعادة كتابة مجموعة المعادلات (7 – 9) ، المحتوية على قوى مجهولة عكسية التماثل ، على الشكل التالى :

$$X_5\,\delta_{55} + X_6\,\delta_{56} = 0$$
$$X_5\,\delta_{65} + X_6\,\delta_{66} = 0$$

وعدم وجود حدود مطلقة ، يدل على أن القوى المجهولة العكسية التماثل X_5 و X_6 تساوى صفراً ، ويمكن التأكد من ذلك بسهولة ، بتعويض القيم $X_5 = 0$ و $X_6 = 0$ فى هذه المجموعة من المعادلات .

وإذا تعرض الإنشاء المعلوم (شكل ٩ – ٧ ، أ) لتأثير حمل عكسى التماثل ، لأصبح من الواضح بأن جميع القوى المجهولة المتماثلة ، ستكون فى هذه الحالة مساوية للصفر .

وبوضع النتيجة التى توصلنا اليها فى صيغة عامة ، يمكن وضع القاعدتين التاليتين :

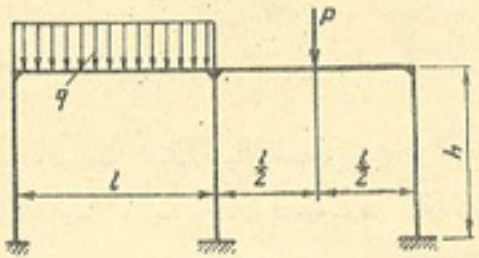
١ – عند تعرض الإنشاء المتماثل ، لتأثير حمل متماثل ، تنشأ فيه إجهادات مجهولة متماثلة فقط (أى أن الإجهادات المجهولة العكسية التماثل ، تساوى صفراً) .

٢ – عند تعرض الأنشاء المتماثل ، لتأثير حمل عكسى التماثل تنشأ فيه إجهادات مجهولة عكسية التماثل فقط (أى أن الإجهادات المجهولة المتماثلة تساوى صفراً) :

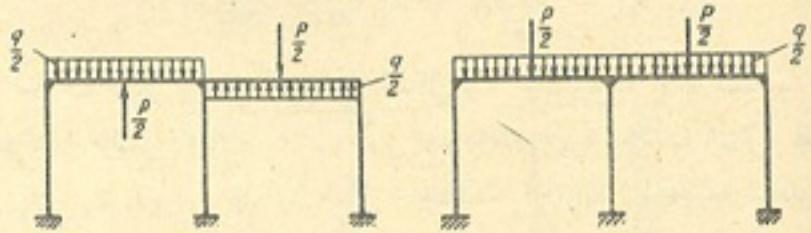
البند ٩ – ٤ : طريقة تحويل الحمل

إن القواعد التى حصلنا عليها فى البند السابق ، يمكن أن تستخدم فى حساب تأثير الاحمال غير المتماثلة ، على الإنشاء المتماثل ، وذلك لأن أى حمل أو أية قوة بصورة عامة ، مسلطة على الإنشاء المتماثل ، يمكن أن تحلل إلى مركبات متماثلة ومركبات عكسية التماثل .

وبالفعل ، لنفرض بأن الإنشاء المتماثل المبين فى الشكل (٩ – ٨) ، معرض لتأثير حمل موزع بانتظام ، شدته تساوى q ، وحمل مركز P ، وهذان الحملان مؤثران بصورة غير متماثلة . نحلل الحمل q والقوة P إلى مركبات متماثلة شكل (٩ – ٨ ، أ) ومركبات عكسية التماثل (شكل ٩ – ٩ ، ب) : إن مجموع هذه الأحمال فى كل نقطة من محور العارضة ، يساوى



الشكل ٩ – ٨

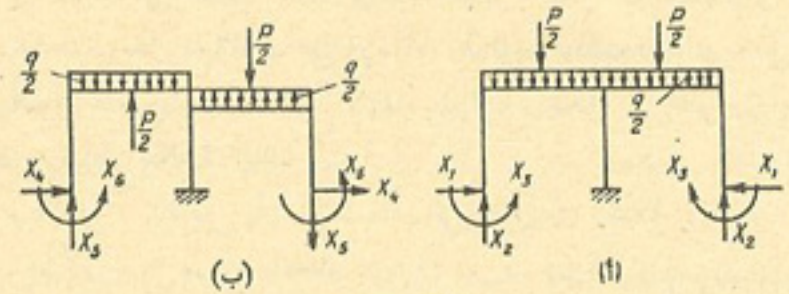


الشكل ٩ – ٩

الحمل المعلوم . وبالفعل ، يظهر بنتيجة جمع الأحمال المبين فى الشكل (٩ – ١٠ ، أ و ب) ، بأن العارضة اليسرى تبدو محملة بالحمل الموزع بانتظام q فقط ، أما العارضة اليمنى فتبدو محملة بالحمل المركز P فقط .

وقد أثبتنا فى البند السابق ، بأنه إذا تعرض الإنشاء المتماثل إلى تأثير حمل

متماثل ، فسوف تظهر فيه إجهادات مجهولة متماثلة فقط . ولهذا السبب ، فعند تعرض الإنشاء الرئيسى (شكل٩ – ١٠ ، أ) لتأثير الحمل المبين فى الشكل (٩ – ٩،أ) ، فسوف تظهر فقط الإجهادات المجهولة المتماثلة ، وهى الإجهادات



الشكل ٩ – ١٠

الجماعية التالية بالخصوص X_1 ، X_2 ، X_3 وسوف يكون شكل المعادلات القانونية ، المستخدمة لتحديدها كما يلى :

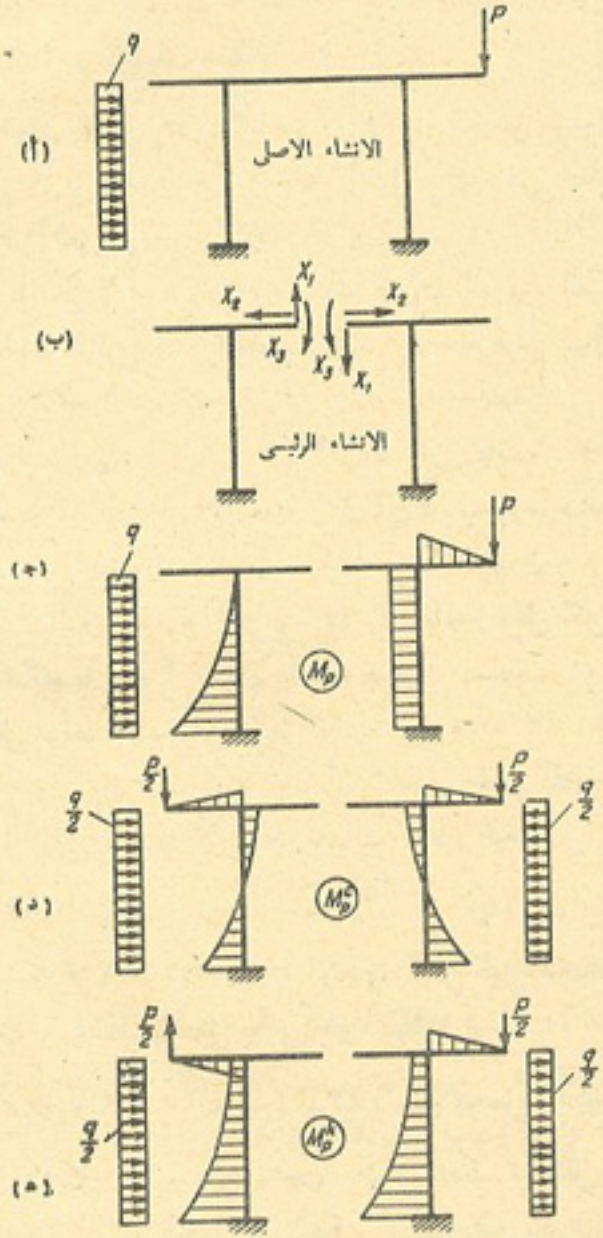
$$X_1\,\delta_{11} + X_2\,\delta_{12} + X_3\,\delta_{13} + \Delta_{1P} = 0$$
$$X_1\,\delta_{21} + X_2\,\delta_{22} + X_3\,\delta_{23} + \Delta_{2P} = 0$$
$$X_1\,\delta_{31} + X_2\,\delta_{32} + X_3\,\delta_{33} + \Delta_{3P} = 0$$

أما عند تأثير الحمل المبين فى الشكل (٩ – ٩ ،ب) ، فسوف تظهر فى الإنشاء الرئيسى (٩ – ١٠ ،ب) إجهادات مجهولة عكسية التماثل فقط ، وهى X_4 ، X_5 و X_6 . ويكون شكل المعادلات القانونية المستخدمة لتحديدها، كما يلى :

$$X_4\,\delta_{44} + X_5\,\delta_{45} + X_6\,\delta_{46} + \Delta_{4P} = 0$$
$$X_4\,\delta_{54} + X_5\,\delta_{55} + X_6\,\delta_{56} + \Delta_{5P} = 0$$
$$X_4\,\delta_{64} + X_5\,\delta_{65} + X_6\,\delta_{66} + \Delta_{6P} = 0$$

إن طريقة تحويل الحمل بتحليله إلى مركبات متماثلة وعكسية التماثل ، لا تؤدى فى معظم الحالات إلى تبسيط عملية حساب الانحرافات الناجمة عن

تأثير الاحمال الحقيقية Δ ، فى مجموعة المعادلات القانونية ، ولذلك فإنها ليست ملائمة للاستخدام فى مثل هذه الحالات .



الشكل ٩ – ١١

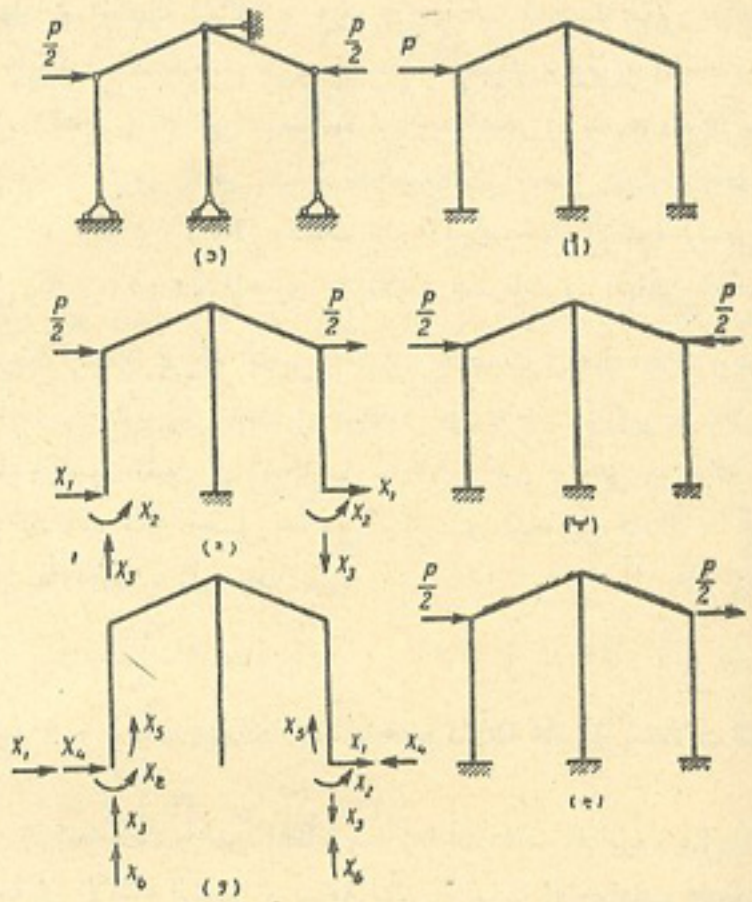
ويبين الشكل (٩ — ١١ ، ا) إطارا متماثلا ، معرضاً لتأثير حمل غير متماثل P . وفى حالة الإنشاء الرئيسى المبين فى الشكل (٩ — ١١ ، ب) تنقسم المعادلات القانونية إلى مجموعتين : مجموعة تضم المجهول العكسى المتماثل X_1 ، والمجموعة الأخرى تضم المجهولين المتماثلين X_2 و X_3 .

إن الرسم البيانى للعزم M_p ، الناجم فى الإنشاء الرئيسى نتيجة لتأثير الحمل المعلوم (شكل ٩ — ١١ ، ج) يخطط أسهل بكثير من تخطيط الرسمين البيانيين لكل من العزم M_p^c — وهو العزم الناجم عن تأثير المركبة المتماثلة للحمل المعلوم (شكل ٩ — ١١ ، د) ، والعزم M_p^k — وهو العزم الناجم عن تأثير المركبة العكسية المتماثل للحمل المعلوم . وعند استخدام الرسم البيانى للعزم M_p ، لغرض حساب الانحرافات الناجمة عن الأحمال الحقيقية Δ_{2p} و Δ_{3p} ، يجب القيام بضرب الرسوم البيانية ، على كلا الضلعين القائمين للإطار . أما عند استخدام الرسمين البيانيين للعزوم M_p^c و M_p^k ، فتضرب الرسوم البيانية ، الواقعة على ضلع واحد من الضلعين القائمين . كما أنه عند ضرب الرسوم البيانية ، يجب تحليل الرسمين البيانيين للعزوم M_p^c و M_p^k ، الواقعين على كل ضلع قائم ، والذى يكون شكلهما معقداً ، إلى رسمين بيانيين بسيطين (مستطيل وقطع مكافىء مخروطى مقعر) ، وهو الأمر الذى لانقوم به عند استخدام الرسم البيانى للعزم M_p . وفى النتيجة ، نجد بأن تحليل الحمل المعلوم إلى مركبتين ، متماثلة وعكسية التماثل ، ليس لا يبسط حساب الإطار فحسب ، بل يؤدى إلى تعقيد الحساب فى هذه الحالة .

ويبين الشكل (٩ — ١٢ ، ا) ، الإطار المتماثل غير المحدد استاتيكياً من الدرجة السادسة ، المحمل بالحمل الأفقى غير المتماثل P .

ويبين الشكل (٩ — ١٢ ، ب) المركبة المتماثلة للحمل المذكور .

كما يبين الشكل (٩ — ١٢ ، ج) المركبة العكسية التماثل لهذا الحمل . وعند تأثير المركبة المتماثلة للحمل ، لايمكن أن ينحرف الطرف العلوى للضلع القائم المتوسط ، انحرافاً أفقياً (وذلك لأن هذا الانحراف عكسى التماثل) ،



الشكل ٩ — ١٢

ولذلك عند تأثير هذا الحمل ، يمكن تصور وجود مسند عند ذلك الطرف ، يعمل على مقاومة الانحراف الأفقى : وبعد ذلك ، إذا اعتبرنا الإنشاء المبين فى الشكل (٩ — ١٢ ، د) بمثابة إنشاء رئيسى ، فسوف نرى بأن عزوم الانحناء الناجمة فى هذا الإنشاء ، نتيجة لتأثير المركبة المتماثلة للحمل المعلوم ، ستكون مساوية للصفر . ولهذا السبب فإن الانحرافات الناجمة عن تأثير الحمل Δ^* ،

* عند حساب الإطار هنا ، لا تؤخذ فى الاعتبار تشوهات القضبان (القطع) ، الناجمة عن تأثير القوى الطولية .

والإجهادات المجهولة المتماثلة X (إن الإجهادات العكسية التماثل ، الناجمة عن تأثير المركبة المتماثلة للحمل ، تساوى صفراً أيضاً) ، وعزوم الانحناء فى كافة قضبان (قطع) الإطار ، ستكون مساوية للصفر . إن عزوم الانحناء تنشأ فى الإطار ، نتيجة لتأثير المركبة العكسية التماثل للحمل المعلوم فقط (شكل ٩ — ١٢ ، ج) ، ويمكن حساب تأثيرها ، باستخدام الإنشاء الرئيسى المبين فى الشكل (٩ — ١٢ ، هـ) ، المحتوى على ثلاث مجموعات من المجاهيل العكسية التماثل .

وهكذا ، فإن طريقة تحويل الحمل ، ساعدت فى هذه الحالة ، على حساب تأثير الحمل المعلوم ذى المجاهيل الستة ، على الاطار المذكور (مثلا فى حالة الانشاء الرئيسى المبين فى الشكل ٩ — ١٢ ، و) ، وعلى استبدال الحساب المعقد بحساب تأثير الحمل العكسى التماثل ذى المجاهيل الثلاثة ، أى تساعد على تبسيط الحساب إلى درجة كبيرة .

البند ٩ — ٥ : مراجعة المعاملات والحدود المطلقة لمجموعة المعادلات القانونية

إن المعاملات والحدود المطلقة لمجموعة المعادلات القانونية ، تمثل الانحرافات الناجمة فى الإنشاء الرئيسى ، نتيجة لتأثير وحدات الإجهادات المجهولة وتأثير الحمل . وتحدد هذه الانحرافات بضرب الرسوم البيانية المناظرة ، لعزوم الانحناء . وعند ضرب الرسوم البيانية ، يمكن ارتكاب بعض الأخطاء ، التى تؤدى إلى عدم صحة قيم بعض الانحرافات . إن حل المعادلات القانونية فى هذه الحالة ، يعطى نتائج غير صحيحة لقيم الإجهادات المجهولة الزائدة .

وكقاعدة عامة ، يمكن العثور على الأخطاء المرتكبة أثناء حساب الانحرافات ، بواسطة مراجعة خاصة ، تتلخص فيما يلى : لنفرض بانه عند حساب أحد الانشاءات غير المحددة استاتيكيا من الدرجة n ، اعتبرنا الاجهادات المنفردة أو الجماعية التالية X_1 ، X_2 ، ... ، X_i ، ... ، X_n بمثابة الإجهادات المجهولة الزائدة .

والآن نعرض الإنشاء الرئيسى لتأثير كافة الإجهادات المجهولة الزائدة فى وقت واحد ، ونخطط الرسم البيانى لعزوم الانحناء ، الناجمة فى الإنشاء الرئيسى نتيجة لتأثير الإجهادات المذكورة . ويسمى هذا الرسم البيانى **بوحدة الرسم البيانى الإجمالى** . وسنرمز إلى إحداثياته الرأسية بالرمز $\overline{M}_s$. ويتضح بأن الإحداثى الرأسى $\overline{M}_s$ لكل مقطع من مقاطع الإنشاء المبحوث ، يساوى مجموع الإحداثيات الرأسية $\overline{M}_1$ ، $\overline{M}_2$ ، ... ، $\overline{M}_i$ ، ... ، $\overline{M}_n$.

نضرب الرسم البيانى الإجمالى للعزم $\overline{M}_s$ فى كل وحدة من وحدات الرسوم البيانية التالية $\overline{M}_1$ و $\overline{M}_2$ ... إلخ على الترتيب . وبالنتيجة نحصل على قيم مجموع معاملات المجاهيل (قيم وحدات الانحراف) ، الداخلة فى المعادلة الأولى والثانية . . . إلخ من المعادلات القانونية . وبالفعل نجد ما يلى :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \delta_{1i} = \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{13} + \dots + \delta_{1n} = \Sigma \int \overline{M}_1 \overline{M}_1 \frac{ds}{EJ} +$$

$$+ \Sigma \int \overline{M}_1 \overline{M}_2 \frac{ds}{EJ} + \dots + \Sigma \int \overline{M}_1 \overline{M}_n \frac{ds}{EJ} =$$

$$= \Sigma \int \overline{M}_1 (\overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \dots + \overline{M}_n) \frac{ds}{EJ} =$$

$$= \Sigma \int \overline{M}_1 \overline{M}_s \frac{ds}{EJ} = \delta_{1s}$$

وبنفس الطريقة :

$$\delta_{21} + \delta_{22} + \delta_{23} + \dots + \delta_{2n} = \delta_{2s}$$

وهلم جرا .

إذن مجموع معاملات المجاهيل فى المعادلة رقم i ، يجب أن يساوى قيمة δ_{is} ، حيث :

$$\delta_{is} = \Sigma \int \overline{M}_i \overline{M}_s \frac{ds}{EJ} \qquad (9 — 8)$$

وهكذا نجد بأن مراجعة القيم المستخرجة لوحدات الانحراف ، الداخلة

فى المعادلة القانونية الأولى ، تتلخص فى مقارنة مجموعها مع قيمة δ_{1s} :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \delta_{1i} = \delta_{1s} \qquad (9-9)$$

وبنفس الطريقة تتم مراجعة معاملات (وحدات انحراف) كافة المعادلات الباقية . وتسمى هذه المراجعة بالمراجعة حسب السطور (كل معادلة — سطر أفقى — تراجع على انفراد) .

نأخذ مجموع الحدود δ_{1s} ، δ_{2s} ، ... ، δ_{ns} ونرمز إليه بالرمز $\Sigma\,\delta$

$$\Sigma\,\delta = \delta_{1s} + \delta_{2s} + \dots + \delta_{ns}$$

وبما أن :

$$\delta_{1s} = \Sigma \int \overline{M}_1\, \overline{M}_s \frac{ds}{\overline{EJ}}$$

$$\delta_{2s} = \Sigma \int \overline{M}_2\, \overline{M}_s \frac{ds}{\overline{EJ}}$$

. . . . . .

$$\delta_{ns} = \Sigma \int \overline{M}_n\, \overline{M}_s \frac{ds}{\overline{EJ}}$$

إذن يكون لدينا :

$$\Sigma\,\delta = \Sigma \int \overline{M}_s\, \overline{M}_1 \frac{ds}{\overline{EJ}} + \Sigma \int \overline{M}_s\, \overline{M}_2 \frac{ds}{\overline{EJ}} + \dots$$

$$\dots + \Sigma \int \overline{M}_s\, \overline{M}_n \frac{ds}{\overline{EJ}} = \Sigma \int \overline{M}_s\, (\overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \dots + \overline{M}_n) \frac{ds}{\overline{EJ}} =$$

$$= \Sigma \int \overline{M}_s^2 \frac{ds}{\overline{EJ}} = \delta_{ss}$$

وأخيراً نحصل على ما يلى :

$$\delta_{ss} = \Sigma \int \overline{M}_s^2 \frac{ds}{\overline{EJ}} \qquad (9-10)$$

و

$$\Sigma\,\delta = \delta_{ss} \qquad (9-11)$$

إن مراجعة المعاملات بواسطة الصيغة الأخيرة ، تسمى بالمراجعة العامة ، وتتلخص فيما يلى :

(أ) يحدد مجموع كافة المعاملات المستخرجة (وحدات الانحراف) ، الداخلة فى مجموعة المعادلات القانونية ، بواسطة الجمع الجبرى :

$$\Sigma\,\delta = (\delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} + \dots + \delta_{nn}) + 2\,(\delta_{12} + \delta_{13} + \dots +$$
$$+ \delta_{1n} + \delta_{23} + \delta_{24} + \dots + \delta_{2n} + \delta_{34} + \dots + \delta_{n-1,n})$$

وهنا نكتب داخل القوس الأول ، جميع الانحرافات الرئيسية ، الواقعة على القطر الرئيسى ، وداخل القوس الثانى ، جميع الانحرافات الثانوية الواقعة إلى جهة واحدة من القطر الرئيسى (على الأقطار الثانوية) .

(ب) نحسب قيمة $\delta_{ss} = \Sigma \int \overline{M}_s^2 \frac{ds}{\overline{EJ}}$ (بضرب الرسم البيانى للعزم $\overline{M}_s$ فى الرسم البيانى للعزم $\overline{M}_s$) .

(ج) يراجع استكمال الشرط (11 — 9) :

وللبحث عن الأخطاء المرتكبة فى تحديد معاملات مجموعة المعادلات القانونية ، من السهل فى جميع الحالات ، استخدام المتباينة التالية :

$$\delta_{ii}\, \delta_{kk} \geqslant \delta_{ik}^2$$

وتتلخص مراجعة معاملات التحميل ، فيما يلى :

(أ) تحسب قيمة المقدار التالى :

$$\Delta_{sp} = \Sigma \int \overline{M}_s\, \overline{M}_p \frac{ds}{\overline{EJ}} \qquad (9-12)$$

حيث M_p – عزم الإنحناء الناجم فى الإنشاء الرئيسى ، نتيجة لتأثير الحمل المعلوم .

(ب) يراجع استكمال الشرط التالى :

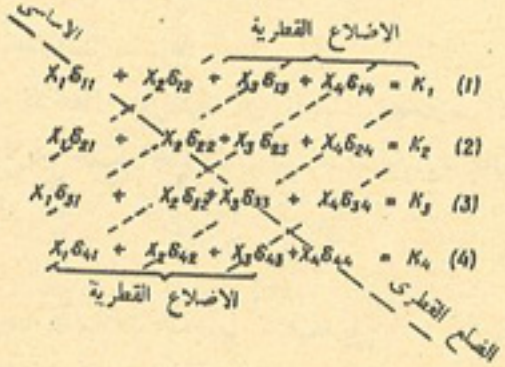
$$\Sigma \Delta = \Delta_{1p} + \Delta_{2p} + \dots + \Delta_{np} = \Delta_{np} \qquad (9-13)$$

وكقاعدة عامة ، يمكن عند الحساب الاكتفاء بالمراجعة العامة فقط : فإذا لم يتحقق الشرط (11 – 9) فى هذه الحالة ، ينصح لأجل العثور على الخطأ ، باستخدام المراجعة حسب السطور .

البند ٩ – ٦ : حل مجموعة المعادلات القانونية بالطريقة المختصرة

إن طريقة حل المعادلات القانونية ، التى تتلخص فى حذف المجاهيل على التوالى ، باستخدام بعض المعاملات المختارة بصورة خاصة ، المحولة إلى شكل جدولى ، والمرفقة بمراجعة الحسابات المتوسطة ، تسمى بالطريقة المختصرة ، (طريقة جاوس)* .

وكمثال يمكن بواسطته شرح ماهية هذه الطريقة ، سوف نبحث حل مجموعة المعادلات القانونية المرقمة (1) ، (2) ، (3) ، (4) المحتوية على اربعة مجاهيل** .



* توجد بالإضافة إلى الطريقة المختصرة ، طريقة كاملة أيضاً ، سوف لا نشرحها فى هذا الكتاب ، لأنها لا تحتوى على أية أهمية عملية عند حساب الإنشاءات غير المحددة استاتيكيا .

** سنرمز إلى المعادلة الأولى بالرقم الرومانى .

وفى هذه المعادلات ، نجد بأن معاملات المجاهيل ، المرتبة بصورة متماثلة حول المحور الرئيسى (أى على أى محور من المحاور الثانوية ، على مسافة متساوية من المحور الرئيسى) تساوى بعضها البعض زوجياً ، أى تحقق مبدأ التبادل : $\delta_{ik} = \delta_{ki}$. والحدود K_1 ، K_2 ... إلخ ، هى عبارة عن حدود مطلقة ، منقولة إلى الطرف الأيمن ، بإشارة معاكسة .

ولحل مجموعة المعادلات القانونية ، يوضع الجدول (٩–١) ، الذى يحتوى على جميع العناوين والسطور ، فى العمود الأيسر : وعند وجود عدد آخر من المعادلات (يختلف عن الأربعة) ، يحتوى الجدول على عدد آخر من الأعمدة والسطور . مثلا عند وجود خمس معادلات ، سيكون لدينا بدلا من الأعمدة الثمانية (المبينة فى الجدول ٩ – ١) ، تسعة أعمدة ، وعناوينها هى كالآتى : رقم المعادلة ، X_1 ، X_2 ، X_3 ، X_4 ، X_5 ، عوامل الضرب a_{ik} ، S ، K ، وبدلا من الثلاثة عشر سطراً (المبينة فى الجدول ٩ – ١) سيحتوى على ١٩ سطراً [وعناوينها هى : (I) ، (2) ، $(I) \times a_{12}$ ، (II) ، (3) ، $(I) \times a_{13}$ ، $(II) \times a_{23}$ ، (III) ، (4) ، $(I) \times a_{14}$ ، $(II) \times a_{24}$ ، $(III) \times a_{34}$ ، (IV) ، (5) ، $(I) \times a_{15}$ ، $(II) \times a_{25}$ ، $(III) \times a_{35}$ ، $(IV) \times a_{45}$ ، (V)] .

ثم تكتب فى السطور المرموز لها (فى العمود الأيسر) بالرموز (1) ، (2) ، (3) و (4) قيم المعاملات δ وقيم K من مجموعة المعادلات القانونية . وهنا يهمل العمود الخاص بـ « المعاملات a_{ik} » وتكتب فى العمود « S » القيم S_1 ، S_2 ، S_3 ، ... ، S_n ، التى تساوى ما يلى :

$$S_1 = \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{13} + \dots + \delta_{1n}$$

$$S_2 = \delta_{12} + \delta_{22} + \delta_{23} + \dots + \delta_{2n}$$

وهلم جرا . . .

جدول ٩ – ١

K	S	عامل الضرب a_{ik}	X_4	X_3	X_2	X_1	رقم المعادلة
8	7	6	5	4	3	2	1
K_1	S_1	$a_{12}=-\frac{\delta_{12}}{\delta_{11}}$ $a_{13}=-\frac{\delta_{13}}{\delta_{11}}$ $a_{14}=-\frac{\delta_{14}}{\delta_{11}}$	δ_{14}	δ_{13}	δ_{12}	δ_{11}	(I)
K_2 $K_1 a_{12}$	S_2 $S_1 a_{12}$		δ_{24} $\delta_{14}\times a_{12}$	δ_{23} $\delta_{13}\times a_{12}$	δ_{22} $\delta_{12}\times a_{12}$	δ_{12} .	$+\begin{cases}(2)\\(1)\times a_{12}\end{cases}$
K'_2	S'_2	$a_{23}=-\frac{\delta'_{23}}{\delta'_{22}}$ $a_{24}=-\frac{\delta'_{24}}{\delta'_{22}}$	δ'_{24}	δ'_{23}	δ'_{22}	.	(II)
K_3 $K_1 a_{13}$ $K'_2 a_{23}$	S_3 $S_1 a_{13}$ $S'_2 a_{23}$		δ_{34} $\delta_{14}\times a_{13}$ $\delta'_{24}\times a_{23}$	δ_{33} $\delta_{13}\times a_{13}$ $\delta_{23}\times a_{23}$	δ_{32} . .	δ_{31} . .	$+\begin{cases}(3)\\(I)\times a_{13}\\(II)\times a_{23}\end{cases}$
K''_3	S''_3	$a_{34}=-\frac{\delta''_{34}}{\delta''_{33}}$	δ''_{34}	δ''_3	.	.	(III)
K_4 $K_1 a_{14}$ $K'_2 a_{24}$ $K'' a_{34}$	S_4 $S_1 a_{14}$ $S'_2 a_{24}$ $S''_3 a_{34}$		δ_{44} $\delta_{14}\times a_{14}$ $\delta'_{24}\times a_{24}$ $\delta''_{34}\times a_{34}$	δ_{43} . . .	δ_{42} . . .	δ_{41} . . .	$+\begin{cases}(4)\\(I)\times a_{14}\\(II)\times a_{24}\\(III)\times a_{34}\end{cases}$
K'''_4	S'''_4		δ'''_4	.	.	.	(IV)

ويتم الحساب الباقى حسب النظام التالى :

(أ) تحسب قيم a_{12} ، a_{13} و a_{14} من الصيغ المكتوبة فى عمود « عوامل الضرب a_{ik} » .

(ب) تحسب القيم المناظرة للسطر $a_{12} \times (I)$ بضرب كل قيمة من قيم السطر (I) فى المعامل a_{12}

(جـ) وبجمع السطرين (2) و $a_{12} \times (I)$ تحدد قيم المعطيات δ_{22} و δ_{23} وهلم جرا ، للسطر (II) : ولا تجرى عملية الجمع بالنسبة لمعطيات العمودين « X_1 » و « عوامل الضرب a_{ik} » .

(د) وتحسب القيم a_{23} ، a_{24} الخ ، من الصيغ المدرجة فى العمود « عوامل الضرب a_{ik} » إلى أن يمتلىء الجدول بأكمله .

وفى مواضع العمود التى وضعت فيها نقاط ، لا توضع فيها أية قيم ، وذلك لأنه من المعروف بأن مجاميع السطور (II) ، (III) و (IV) فى هذه المواضع ، يجب أن تساوى صفراً .

إن كل سطر مشار إليه برقم رومانى ، يمثل معادلة من المعادلات ، مثلا السطر (III) يمثل المعادلة $X_3\delta''_{33} + X_4\delta''_{34} = K_3$ وهكذا .

وإذا كان الحساب صحيحاً ، فإن مجموع عوامل المجاهيل فى كل معادلة مشار إليها برقم رومانى ، يجب أن يساوى القيمة الموضوعة فى نفس السطر من العمود « S » . وعلى سبيل المثال ، يجب أن نحصل بالنسبة للمعادلة (III) على ما يلى :

$$\delta''_3 + \delta''_{34} = S''_3$$

ويجب التأكد من تحقق هذا الشرط ، بعد حساب كل سطر من السطور التالية : (II) ، (III) و (IV) .

إن المعادلة الأخيرة [المعادلة (IV)] المشار إليها برقم رومانى ، هى معادلة ذات مجهول واحد ، ولذلك يكون من السهل أن نستخرج منها قيمة المجهول الأخير X_4 : ثم من المعادلة (III) ، التى تضم المجهولين X_3 و X_4 ، نحدد قيمة X_3 ، ومن المعادلة (II) نحدد قيمة X_2 ، ومن المعادلة (I) نحدد قيمة X_1 : ويجب مراجعة قيم المجاهيل المحسوبة ، بتعويضها فى كافة معادلات المجموعة القانونية .

وكمثال لاستخدام الطريقة المختصرة ، سنبحث حل مجموعة المعادلات التالية :

$$2X_1 - X_2 + 3X_3 - X_4 = 5 \qquad (1) \qquad S_1 = 2 - 1 + 3 - 1 = 3$$

$$-X_1 + 3X_2 - 2X_3 - 5X_4 = -21 \qquad (2) \qquad S_2 = -1 + 3 - 2 - 5 = -5$$

$$3X_1 - 2X_2 - 5X_3 + 4X_4 = 0 \qquad (3) \qquad S_3 = 3 - 2 - 5 + 4 = 0$$

$$-X_1 - 5X_2 + 4X_3 + X_4 = 5 \qquad (4) \qquad S_4 = -1 - 5 + 4 + 1 = -1$$

إن معاملات هذه المجموعة تحقق مبدأ التبادل . وقد رتب الحل على هيئة جدول (الجدول ٩ – ٢) : وبوضع هذا الجدول ، نحل المعادلات ، ابتداء من المعادلة الأخيرة :

$$-\frac{575}{60} X_4 = -\frac{2300}{60}$$

$$X_4 = 4$$

$$-\frac{96}{10} X_3 + \frac{44}{10} \times 4 = -\frac{112}{10}$$

$$X_3 = \frac{112 + 176}{96} = 3$$

$$2.5\, X_2 = -18.5 + 0.5 \times 3 + 5.5 \times 4$$

$$X_2 = 2$$

$$2X_1 = 5 + 2 - 3 \times 3 + 4$$

$$X_1 = 1$$

جدول ٩ – ٢

رقم المعادلة	X_1	X_2	X_3	X_4	عامل الضرب a_{1k}	S	K
(1)	2	−1	3	−1	$a_{12} = \frac{1}{2}$ $a_{13} = -\frac{3}{2}$ $a_{14} = \frac{1}{2}$	3	5
(2) $(I) \times a_{12}$	−1	3 $-\frac{1}{2}$	−2 $\frac{3}{2}$	−5 $-\frac{1}{2}$		−5 $\frac{3}{2}$	−21 $\frac{5}{2}$
(II)		$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{11}{2}$	$a_{23} = \frac{1}{5}$ $a_{24} = \frac{11}{5}$	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{37}{2}$
+ (3) + $(I) \times a_{13}$ + $(II) \times a_{23}$	3 . .	−2 . .	−5 $-\frac{9}{2}$ $-\frac{1}{10}$	4 $\frac{3}{2}$ $-\frac{11}{10}$		0 $-\frac{9}{2}$ $-\frac{7}{10}$	0 $-\frac{15}{2}$ $-\frac{37}{10}$
(III)	.	.	$-\frac{96}{10}$	$\frac{44}{10}$	$a_{34} = \frac{11}{24}$	$-\frac{52}{10}$	$-\frac{112}{10}$
+ (4) + $(I) \times a_{14}$ + $(II) \times a_{24}$ + $(III) \times a_{34}$	−1 . . .	−5 . . .	4 . . .	1 $-\frac{1}{2}$ $-\frac{121}{10}$ $\frac{121}{60}$		−1 $\frac{3}{2}$ $-\frac{77}{10}$ $-\frac{143}{60}$	5 $\frac{5}{2}$ $-\frac{407}{10}$ $-\frac{154}{30}$
(IV)	.	.	.	$-\frac{575}{60}$		$-\frac{575}{60}$	$-\frac{2300}{60}$

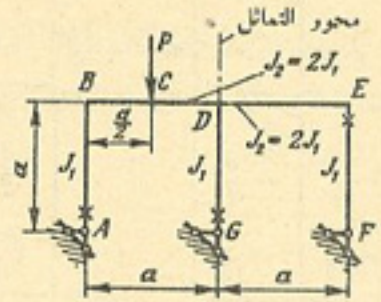
إن مراجعة الحل الناتج بتعويض القيم المستخرجة فى المعادلات القانونية يؤكد صحة تحديد قيم المجاهيل .

ويتضح من الجدول (٩ — ١) الخاص بالطريقة المختصرة ، إنه فى حالة تغير الحدود المطلقة ، يتغير العمود الأخير فقط من الجدول .

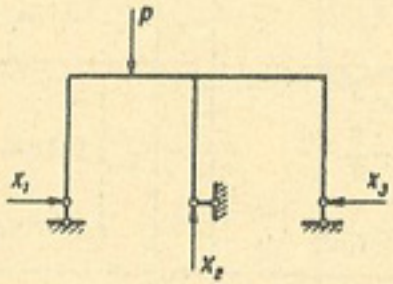
وهذه الظاهرة ، تساعد على سهولة تحديد قيم المجاهيل ، عند تعرض الإنشاءات غير المحددة استاتيكيًا ، للأحمال المختلفة .

البند ٩ — ٧ : أمثلة لحساب الأطر

مثال ١ : يطلب تخطيط الرسوم البيانية لكل من M ، Q و N للإطار المتماثل ، المبين فى الشكل (٩ — ١٣) ، ومراجعة هذه الرسوم البيانية .



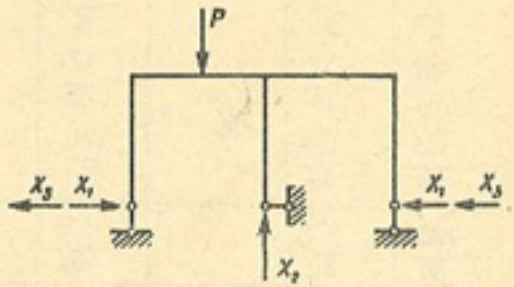
الشكل ٩ — ١٣



الشكل ٩ — ١٤

الحل : إن الإطار المعلوم غير محدد استاتيكيا من الدرجة الثالثة . ويمكن اعتبار الإنشاء المبين فى الشكل (٩—١٤) بمثابة إنشاء رئيسى . وعند حساب هذا الإطار باستخدام مثل هذا الإنشاء الرئيسى ، يتحتم علينا أن نحل ثلاث معادلات قانونية ، تحتوى على ثلاثة مجاهيل ، حلا آنيا .

ولكن يمكن حل المسألة بطريقة أسهل ، إذا اتخذنا الإنشاء ذى المجاهيل الجماعية ، المبين فى الشكل (٩ — ١٥) ، بمثابة إنشاء رئيسى .

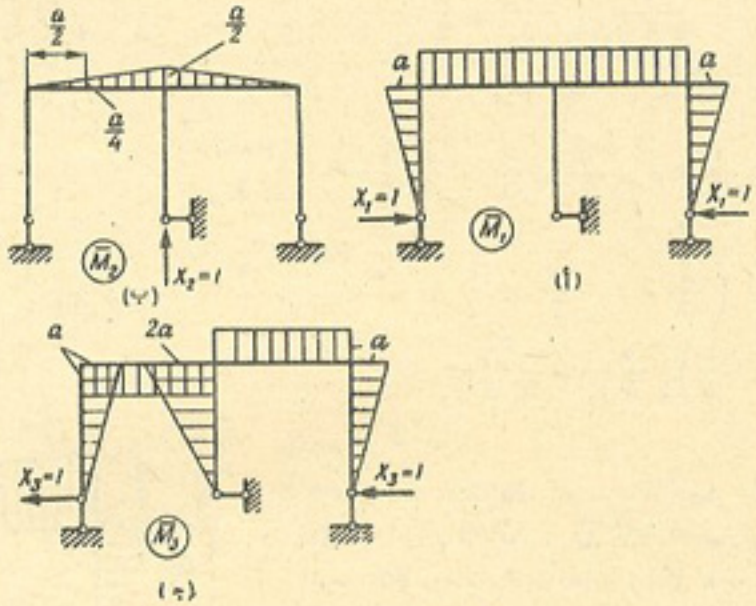


الشكل ٩ — ١٥

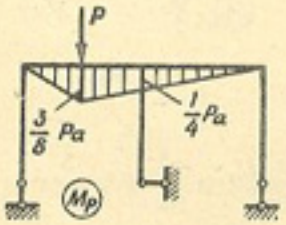
إن شكل المعادلات القانونية ، المستخدمة لحساب الإطار ، باستخدام هذا الإنشاء الرئيسى ، سيكون على الشكل التالى :

$$X_1\,\delta_{11} + X_2\,\delta_{12} + \Delta_{1P} = 0$$
$$X_1\,\delta_{21} + X_2\,\delta_{22} + \Delta_{2P} = 0$$
$$X_3\,\delta_{33} + \Delta_{3P} = 0$$

إن وحدات الرسوم البيانية لعزوم الانحناء $\overline{M}_1$ ، $\overline{M}_2$ ، $\overline{M}_3$ ، للإنشاء الرئيسى ، مبينة فى الشكل (٩ — ١٦ ، ا ، ب ، جـ) ، والرسم البيانى للتحميل الحقيقى مبين فى الشكل (٩ — ١٧) .



الشكل ٩ — ١٦



الشكل ٩ — ١٧

وبضرب وحدات الرسوم البيانية المناظرة فى بعضها البعض وفى الرسوم البيانية للتحميل ، نحدد قيم المعاملات والحدود الخاصة بالتحميل ، فى المعادلات القانونية . وهنا نأخذ فى الاعتبار ، بأن عزوم القصور الذاتى للقضبان (القطع) الرأسية للإطار ، أقل بمرتين من عزوم القضبان الأفقية :

$$\delta_{11} = 2\left(a \times \frac{a}{2} \times \frac{2}{3}\,a\,\frac{1}{EJ_1} + a \times a \times a \times \frac{1}{2EJ_1}\right) = \frac{5\,a^3}{3\,EJ_1}$$

$$\delta_{12} = \frac{a}{2} \times \frac{2\,a}{2} \times \frac{a}{2EJ_1} = \frac{a^3}{4\,EJ_1}$$

$$\delta_{22} = 2\,\frac{a}{2} \times \frac{a}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{a}{2} \times \frac{1}{2\,E\,J_1} = \frac{a^3}{12\,E\,J_1}$$

$$\delta_{33} = 2\left(a \times \frac{a}{2} \times \frac{2}{3}\,a\,\frac{1}{E\,J_1} + a \times a \times a\,\frac{1}{2\,E\,J_1}\right) + 2\,a\,\frac{a}{2} \times \frac{2}{3} \times$$

$$\times\, 2\,a\,\frac{1}{E\,J_1} = 3\,\frac{a^3}{E\,J_1}$$

$$\Delta_{1P} = -\frac{3\,P\,a}{8} \times \frac{2\,a}{2} \times \frac{a}{2\,E\,J_1} = -\frac{3\,P\,a^3}{16\,E\,J_1}$$

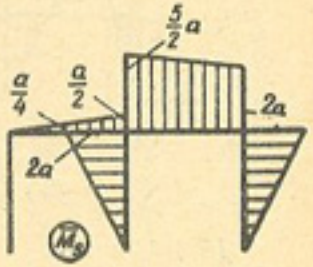
$$\Delta_{2P} = -\frac{1}{2\,E\,J_1}\left[\frac{3\,P\,a}{8} \times \frac{a}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{a}{4} + \frac{a}{2 \times 6}\left(2\,\frac{3}{8}\,P\,a \times\right.\right.$$

$$\left.\times\, \frac{a}{4} + 2 \times \frac{1}{4}\,P\,a \times \frac{a}{2} + \frac{3}{8}\,P\,a \times \frac{a}{2} + \frac{1}{4}\,P\,a \times \frac{a}{4}\right) +$$

$$\left.+\, \frac{1}{4}\,P\,a \times \frac{a}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{a}{2}\right] = -\frac{11\,P\,a^3}{192\,E\,J_1}$$

$$\Delta_{3P} = \left(\frac{3}{8}\,P\,a \times \frac{a}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{8}\,Pa + \frac{1}{4}\,Pa}{2} \times \frac{a}{2} - \frac{1}{4}\,Pa \times\right.$$

$$\left.\times\, \frac{a}{2}\right)\frac{a}{2\,E\,J_1} = \frac{P\,a^3}{16\,E\,J_1}$$



الشكل ٩ – ١٨

ولمراجعة الانحرافات المستخرجة، نخطط الرسم البيانى الإجمالى لعزوم الانحناء $\overline{M}_s$ ، الناجمة عن التأثير الموحد لكافة وحدات القوى المجهولة (شكل ٩ – ١٨) .

ولتحديد قيمة δ_{ss} ، نضرب الرسم البيانى للعزم $\overline{M}_s$ (شكل ٩ – ١٨) فى الرسم البيانى للعزم $\overline{M}_s$.

$$\delta_{ss} = \Sigma \int \overline{M}_s^2\,\frac{ds}{E\,J} = \left[\frac{a}{2} \times \frac{a}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{a}{2} + \frac{a}{6}\left(2 \times \frac{5}{2}\,a \times \frac{5}{2}\,a +\right.\right.$$

$$\left.\left.+\, 2 \times 2\,a \times 2\,a + 2 \times \frac{5}{2}\,a \times 2\,a\right)\right]\frac{1}{2\,E\,J_1} + 2 \times 2\,a \times$$

$$\times\, \frac{a}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{2\,a}{E\,J_1} = \frac{21\,a^3}{4\,E\,J_1}$$

والآن نتأكد من استكمال الشرط (11 — 9) $\delta_{ss} = \Sigma\,\delta$:

$$\frac{21\,a^3}{4E\,J_1} = \frac{5a^3}{3E\,J_1} + \frac{a^3}{12E\,J_1} + \frac{3\,a^3}{E\,J_1} + 2\,\frac{a^3}{4E\,J_1}$$

أو

$$\frac{21\,a^3}{4E\,J_1} = \frac{21\,a^3}{4E\,J_1}$$

إذن تكون قيم وحدات الانحراف المستخرجة ، صحيحة تماماً .

ونحدد الآن قيمة الانحراف Δ_{sP} ، بضرب الرسم البيانى للعزم $\overline{M}_s$ (شكل ٩ – ١٧) فى الرسم البيانى للعزم M_P (شكل ٩ – ١٧) :

$$\Delta_{sP} = \Sigma \int \overline{M}_s\,M_P\,\frac{ds}{E\,J} = \frac{-1}{2\,E\,J_1}\left[\frac{3}{8}\,Pa \times \frac{a}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{a}{4} +\right.$$

$$+\, \frac{a}{2 \times 6}\left(2 \times \frac{3}{8}\,Pa \times \frac{a}{4} + 2 \times \frac{1}{4}\,Pa \times \frac{a}{2} + \frac{3}{8}\,Pa \times \frac{a}{2} +\right.$$

$$\left.\left.+\, \frac{1}{4}\,Pa \times \frac{a}{4}\right) + \frac{1}{4}\,Pa \times \frac{a}{2}\left(\frac{2}{3} \times \frac{5}{2}\,a \times \frac{1}{3} \times 2a\right)\right] =$$

$$= \frac{-35Pa^3}{192\,E\,J_1}$$

نتأكد من استكمال الشرط (13 — 9) :

$$\Delta_{sP} = \Sigma\,\Delta$$

$$-\frac{35Pa^3}{192E\,J_1} = -\frac{3Pa^3}{16E\,J_1} - \frac{11Pa^3}{192E\,J_1} + \frac{Pa^3}{16E\,J_1}$$

أو

$$-\frac{35Pa^3}{192E\,J_1} = -\frac{35Pa^3}{192E\,J_1}$$

إذن تكون قيم الانحرافات الناجمة عن الأحمال الحقيقية ، محسوبة بصورة صحيحة .

نعوض القيم المستخرجة للمعاملات والحدود الخاصة، بالتحميل ، فى المعادلات القانونية .

وبعد ضرب كافة حدود المعادلتين الأولين فى المقدار $\frac{192\,E\,J_1}{a^3}$ ، وضرب حدود المعادلة الأخيرة فى المقدار $\frac{16\,E\,J_1}{a^3}$ ، نحصل على ما يلى :

$$320\,X_1 + 48\,X_2 - 36\,P = 0$$
$$48\,X_1 + 16\,X_2 - 11\,P = 0$$
$$48\,X_3 + P = 0$$

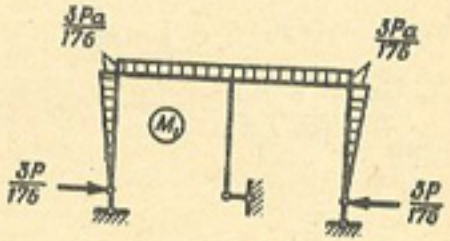
وبحل هذه المعادلات ، نحصل على :

$$X_1 = \frac{3P}{176}$$

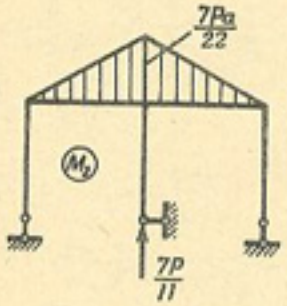
$$X_2 = \frac{7P}{11}$$

$$X_3 = \frac{-P}{48}$$

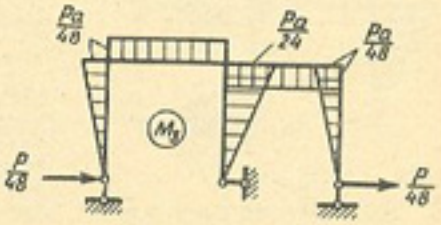
ولتخطيط الرسم البيانى النهائى لعزوم الانحناء ، نحدد العزوم الناجمة فى الإنشاء الرئيسى ، نتيجة لتأثير القوى المستخرجة X_1 ، X_2 ، X_3 ، ولهذا الغرض ، نضرب وحدات الرسوم البيانية للعزوم $\overline{M}_1$ ، $\overline{M}_2$ ، $\overline{M}_3$ ، فى قيم هذه القوى على الترتيب . إن الرسوم البيانية للعزوم M_1 ، M_2 ، M_3 ، التى نحصل عليها بهذه الطريقة ، مبينة فى الأشكال (٩ – ١٩) ، (٩ – ٢٠) و (٩ – ٢١) .



الشكل ٩ – ١٩



الشكل ٩ – ٢٠



الشكل ٩ – ٢١

ولحصول على قيم الإحداثيات الرأسية للرسم البيانى النهائى لعزوم الانحناء ، نجمع بالنسبة ، لمقاطع الإطار المستقلة ، الأحداثيات الرأسية للرسوم البيانية للعزوم M_1 ، M_2 ، M_3 (الأشكال (٩ – ١٩) ، (٩ – ٢٠) و (٩ – ٢١)) وللرسم البيانى للعزم M_p ، المبين فى الشكل (٩ – ١٧) .

(فى الشكل ٩ – ١٣ ، وضعت إشارات تعسفية على أطراف القطع أو القضبان الرأسية ، التى اعتبرت عند تحديد عزوم الانحناء ، بمثابة الأطراف اليسرى) :

$$M_{BA} = M_{BC} = -\frac{3\,Pa}{176} + 0 - \frac{Pa}{48} + 0 = -\frac{5\,Pa}{132}$$

$$M_{CB} = M_{CD} = -\frac{3\,Pa}{176} - \frac{7\,Pa}{44} - \frac{Pa}{48} + \frac{3\,Pa}{8} = \frac{47\,Pa}{264}$$

$$M_{DC} = -\frac{3\,Pa}{176} - \frac{7\,Pa}{22} - \frac{Pa}{48} + \frac{Pa}{4} = -\frac{7\,Pa}{66}$$

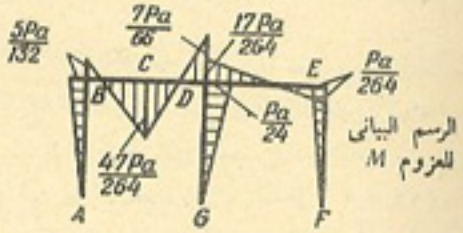
$$M_{DE} = -\frac{3\,Pa}{176} - \frac{7\,Pa}{22} + \frac{Pa}{48} + \frac{Pa}{4} = -\frac{17\,Pa}{264}$$

$$M_{DG} = 0 + 0 + \frac{Pa}{24} + 0 = \frac{Pa}{24}$$

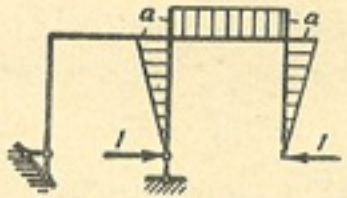
$$M_{ED} = M_{EF} = -\frac{3\,Pa}{176} + 0 + \frac{Pa}{48} + 0 = \frac{Pa}{264}$$

وهنا M_{BA} تعنى عزم الانحناء فى المقطع B للقضيب (القطعة) BA من الإطار ، و M_{BC} تعنى عزم الانحناء فى المقطع B للقضيب BC ، وهلم جرا .

إن الرسم البيانى النهائى لعزوم الانحناء M ، المخطط بموجب قيم الإحداثيات الرأسية التى حصلنا عليها ، مبين فى الشكل (٩ – ٢٢) . ولمراجعة الرسم البيانى للعزوم M ، نحدد مدى التقارب Δ_{FG} بين النقطتين F و G (لاحظ الشكل ٩ – ١٣) من نقاط الإطار (مراجعة التشوه) . ويجب أن يكون هذا التقارب ، مساوياً للصفر ، وذلك لأن هاتين النقطتين ، مثبتتان بواسطة مسند مفصل ثابت . ولتحديد مدى التقارب Δ_{FG} . نرفع ثلاثة من قضبان المساند فى الإطار المعلوم ، ونحوله إلى الإنشاء المحدد استاتيكيا ، المبين فى الشكل (٩ – ٢٣) .



الشكل ٩ – ٢٢



الشكل ٩ – ٢٣

ونسلط على هذا الإنشاء ، فى اتجاه الانحراف Δ_{FG} ، وحدات القوى ، ونخطط الرسم البيانى لعزوم الانحناء ، الناجمة عن تأثير هذه القوة (شكل ٩ – ٢٣) . وبضرب هذا الرسم البيانى ، فى الرسم البيانى النهائى للعزوم M (شكل ٩ – ٢٢) ، نحصل على ما يلى :

$$\Delta_{FG} = -a \times \frac{a}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{Pa}{264} \times \frac{1}{EJ_1} + a \times a\left(\frac{17Pa}{264} \times \frac{1}{2} - \frac{Pa}{264} \times \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2EJ_1} - a \times \frac{a}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{Pa}{24} \times \frac{1}{EJ_1} =$$

$$= \frac{Pa^3}{264EJ_1}\left(-\frac{1}{3} + \frac{17}{4} - \frac{1}{4} - \frac{11}{3}\right) = 0$$

إن نتيجة ضرب الرسم البيانى النهائى (شكل ٩ – ٢٢) فى كل وحدة رسم بيانى (شكل ٩ – ١٦) يجب أن تساوى صفرا أيضاً .

والآن نحدد قيم قوى القص فى الأقسام المستقلة للإطار :

$$Q_{AB} = Q_{BA} = \frac{M_{BA} - M_{AB}}{a} = \frac{-\frac{5\,Pa}{132} - 0}{a} = \frac{-5\,P}{132}$$

$$Q_{BC} = Q_{CB} = \left(\frac{47Pa}{264} + \frac{5Pa}{132}\right)\frac{1}{\frac{a}{2}} = \frac{57\,P}{132}$$

$$Q_{CD} = Q_{DC} = -\left(\frac{7\,Pa}{66} + \frac{47\,Pa}{264}\right)\frac{1}{\frac{a}{2}} = -\frac{75\,P}{132}$$

$$Q_{DE} = Q_{ED} = -\left(\frac{Pa}{264} + \frac{17\,Pa}{264}\right)\frac{1}{a} = \frac{3P}{44}$$

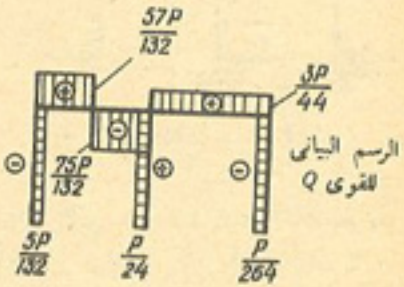
$$Q_{EF} = Q_{FE} = \frac{Pa}{264} \times \frac{1}{a} = -\frac{P}{264}$$

$$Q_{DG} = Q_{GD} = \frac{Pa}{24} \times \frac{1}{a} = \frac{P}{24}$$

قد تمت مراجعة علامات قوى القص ، بواسطة القاعدة ، التى تكون قوى القص طبقاً لها ، موجبة إذا تطلب انطباق محور القطعة مع مماس الرسم البيانى للعزوم M ، تدوير المحور فى اتجاه عقرب الساعة .

إن الرسم البيانى لقوى القص Q ، المخطط بموجب القيم التى حصلنا عليها ، مبين فى الشكل (٩ – ٢٤) .

ولتحديد قيم القوى الطولية ، نقطع وصلات الإطار B ، D ، E ، ونسلط عليها قوى القص والقوى الطولية الداخلية المؤثرة عليها (شكل ٩ – ٢٥ ، ا ، ب ، جـ) ، ونعتبر القوى الطولية ، ذات القيم المجهولة ، موجبة (قوى شد) . وتحدد قيم واتجاهات قوى القص من الرسم البيانى لقوى القص Q (شكل ٩ – ٢٤) .

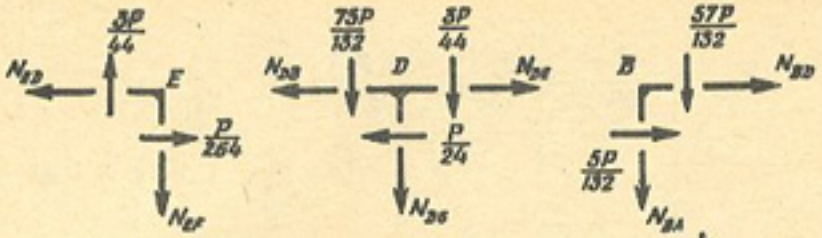


الشكل ٩ – ٢٤

والآن نضع شروط توازن الوصلات B ، D و E .

الوصلة B (شكل ٩ – ٢٥ ، ا) :

$$\Sigma\, Y = -N_{BA} - \frac{57\,P}{132} = 0$$



الشكل ٩ – ٢٥

ومنها ينتج أن :

$$N_{BA} = -\frac{57\,P}{132} \qquad (\text{انضغاط})$$

$$\Sigma\, X = \frac{5\,P}{132} + N_{BD} = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$N_{BD} = -\frac{5\,P}{132} \qquad (\text{انضغاط})$$

الوصلة D (شكل ٩ – ٢٥ ، ب) :

$$\Sigma\, Y = -N_{DG} - \frac{75\,P}{132} - \frac{3\,P}{44} = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$N_{DG} = -\frac{7\,P}{11} \qquad (\text{انضغاط})$$

$$\Sigma\, X = -N_{DB} + N_{DE} - \frac{P}{24} = 0$$

ولكن بما أن :

$$N_{DB} = N_{BD} = -\frac{5\,P}{132}$$

إذن نحصل على ما يلى :

$$N_{DE} = \frac{P}{24} - \frac{5P}{132} = \frac{P}{264} \qquad (\text{شد})$$

الوصلة E (شكل ٩ – ٢٥ ، جـ) :

$$\Sigma Y = \frac{3P}{44} - N_{EF} = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$N_{EF} = \frac{3P}{44} \qquad (\text{شد})$$

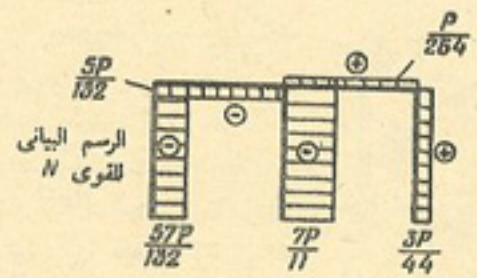
$$\Sigma X = -N_{ED} + \frac{P}{264} = 0$$

إذن :

$$N_{ED} = \frac{P}{264} \qquad (\text{شد})$$

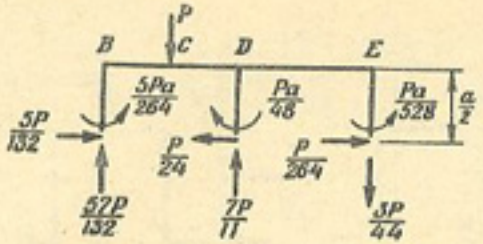
وهذا ما يجب أن نتوقعه ، وذلك لأن $N_{ED} = N_{DE}$.

وبموجب قيم القوى الطولية التى حصلنا عليها ، تم تخطيط الرسم البيانى للقوى الطولية N (شكل ٩ – ٢٦) .



الشكل ٩ – ٢٦

والآن نجرى المراجعة الاستاتيكية للرسوم البيانية التى حصلنا عليها لكل من M ، Q و N . ولهذا الغرض ، نفصل مثلا ، النصف العلوى للإطار ، ونسلط عليه الحمل المعلوم P والقوى (الإجهادات) الداخلية المؤثرة فى مواضع قطع الأضلاع القائمة للإطار ، أى فى منتصف ارتفاع



الشكل ٩ – ٢٧

هذه الأضلاع القائمة (شكل ٩ – ٢٧) . ونحدد قيم الإجهادات الداخلية من الرسوم البيانية لكل من M ، Q و N (الأشكال ٩ – ٢٢ و ٩ – ٢٤ و ٩ – ٢٦) . ثم نضع شروط توازن النصف المفصول من الإطار :

$$\Sigma X = \frac{5P}{132} - \frac{P}{24} + \frac{P}{264} = \frac{P}{264}(10 - 11 + 1) = 0$$

$$\Sigma Y = -P + \frac{57P}{132} + \frac{7P}{11} - \frac{3P}{44} = \frac{P}{132}(-132 + 57 + 84 - 9) = 0$$

$$\Sigma M_B = \left(-\frac{5P}{132} + \frac{P}{24} - \frac{P}{264}\right)\frac{a}{2} + P \times \frac{a}{2} - \frac{7P}{11} \times a +$$

$$+ \frac{3P}{44} \times 2a - \frac{5Pa}{264} + \frac{Pa}{48} - \frac{Pa}{528} = \frac{Pa}{528}\Big(-10 + 11 - 1 +$$

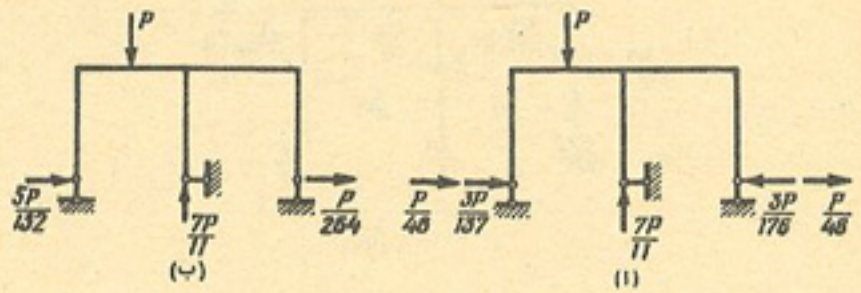
$$+ 264 - 336 + 72 - 10 + 11 - 1\Big) = 0$$

وهكذا نجد بأن النصف المفصول من الإطار ، هو فى حالة توازن .

ويمكن تخطيط الرسوم البيانية لكل من M ، Q و N بطريقة أخرى . ولهذا الغرض يجب أن نسلط على الإنشاء الرئيسى ، القوى التالية :

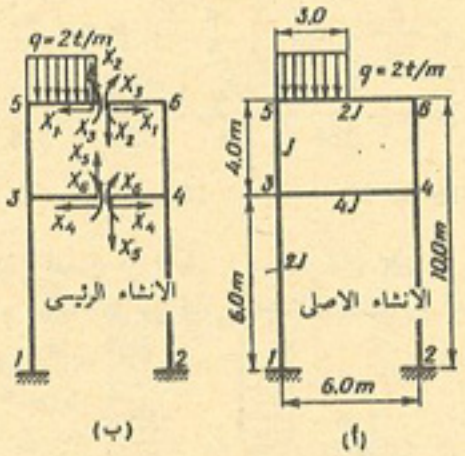
$$X_3 = -\frac{P}{48} \text{ و } X_2 = \frac{7P}{11} \text{ و } X_1 = \frac{3P}{176}$$

والحمل المعلوم (الحمل P) المؤثر على الإطار ، كما هو مبين فى الشكلين (٩ – ٢٨ ، أ) و (٩ – ٢٨ ، ب) . ثم نحدد ردود فعل المساند الناجمة عن تأثير هذه القوى والأحمال ، فى الإطار المحدد استاتيكيا ، الذى هو الإنشاء الرئيسى ، ونخطط الرسوم البيانية لكل من M ، Q و N ، لهذا الإطار .



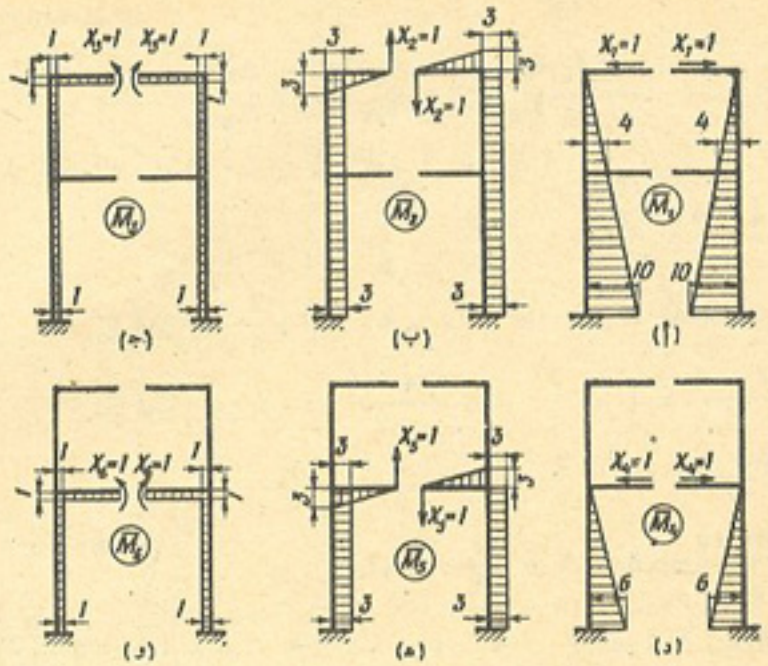
الشكل ٩ – ٢٩

مثال ٢ : يطلب حساب الإنشاء المعلوم (الإطار) ، الذى يعتبر بمثابة الإنشاء الحامل لقسم من أقسام مصنع مؤلف من طابقين ، معرض لتأثير حمل غير متماثل ، مؤثر فى العارضة العليا . هذا مع العلم بأن جسورات القطع المختلفة للإطار ، تختلف عن بعضها البعض (شكل ٩ – ٢٩) .

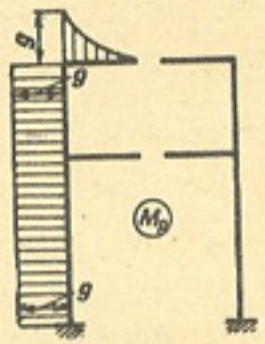


الشكل ٩ – ٢٨

الحل : نحصل على الإنشاء الرئيسى ، بقطع العارضة فى منتصفها . والرسوم البيانية للعزوم ، الناجمة عن تأثير وحدات الإجهادات المجهولة ، مبينة فى الشكل (٩ – ٣٠) . والرسم البيانى لعزوم الانحناء الناجمة عن تأثير الحمل الحقيقى ، مبين فى الشكل (٩ – ٣١) .



الشكل ٩ – ٣٠



الشكل ٩ – ٣١

وفظراً للاختيار الموفق للإنشاء الرئيسى ، نجد أن عدداً من الانحرافات الثانوية ، يصبح مساوياً للصفر :

$$\delta_{12} = \delta_{15} = \delta_{23} = \delta_{24} = \delta_{26} = \delta_{35} = \delta_{45} = \delta_{56} = 0$$

ولذلك تنقسم مجموعة المعادلات القانونية ، المؤلفة من ست معادلات ، إلى مجموعتين هما :

أ) المجموعة الأولى :

$$X_1\,\delta_{11} + X_3\,\delta_{13} + X_4\,\delta_{14} + X_6\,\delta_{16} = -\,\Delta_{1P}$$
$$X_1\,\delta_{31} + X_3\,\delta_{33} + X_4\,\delta_{34} + X_6\,\delta_{36} = -\,\Delta_{3P}$$
$$X_1\,\delta_{41} + X_3\,\delta_{43} + X_4\,\delta_{44} + X_6\,\delta_{46} = -\,\Delta_{4P}$$
$$X_1\,\delta_{61} + X_3\,\delta_{63} + X_4\,\delta_{64} + X_6\,\delta_{66} = -\,\Delta_{6P}$$

ب) المجموعة الثانية :

$$X_2\,\delta_{22} + X_5\,\delta_{25} = -\,\Delta_{2p}$$
$$X_2\,\delta_{52} + X_5\,\delta_{55} = -\,\Delta_{5p}$$

والآن نحسب الانحرافات (معتبرين بأن $EJ = 1\ t/m^2$) :

$$\delta_{11} = \frac{4\times4}{2}\times\frac{2}{3}\times4\times\frac{2}{1}+\frac{6}{6}\times$$
$$\times\,(2\times4^2+2\times10^2+2\times4\times10)\frac{2}{2} = 354.7$$

$$\delta_{13} = \frac{4\times4}{2}\times1\times\frac{2}{1}+6\times\frac{4+10}{2}\times1\times\frac{2}{2} = 58$$

$$\delta_{14} = \frac{6\times6}{2}\left(4+\frac{2}{3}\times6\right)\frac{2}{2} = 144$$

$$\delta_{16} = \frac{4+10}{2}\times6\times1\times\frac{2}{2} = 42$$

$$\delta_{33} = 6\times1\times1\times\frac{1}{2}+4\times1\times1\times\frac{2}{1}+6\times1\times1\times\frac{2}{2} = 17$$

$$\delta_{34} = \frac{6\times6}{2}\times\frac{1}{2}\times2 = 18$$

$$\delta_{36} = 1\times6\times\frac{1}{2}\times2 = 6$$

$$\delta_{44} = \frac{6\times6}{2}\times\frac{2}{3}\times6\times\frac{2}{2} = 72$$

$$\delta_{46} = \frac{6\times6}{2}\times\frac{1}{2}\times2 = 18$$

$$\delta_{66} = 6\times1\times1\times\frac{1}{4}+6\times1\times1\times\frac{1}{2}\times2 = 7.5$$

$$\delta_{22} = \frac{3\times3}{2}\times\frac{2}{3}\times3\times\frac{1}{2}\times2+4\times3\times3\times\frac{2}{1}+6\times3\times3\times$$
$$\times\frac{2}{2} = 135$$

$$\delta_{25} = 3\times6\times3\times\frac{1}{2}\times2 = 54$$

$$\delta_{55} = \frac{3\times3}{2}\times\frac{2}{3}\times3\times\frac{1}{4}\times2+6\times3\times3\times\frac{1}{2}\times2 = 58.5$$

$$\Delta_{1p} = -\frac{4\times4\times9}{2\times1}-\frac{6\,(10+4)\times9}{2\times2} = -261$$

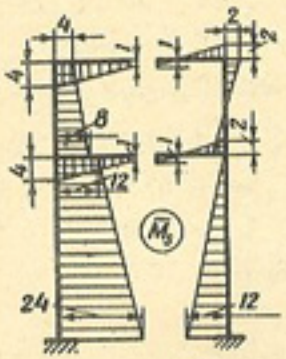
$$\Delta_{2p} = -\frac{9\times3}{3\times2}\times\frac{3}{4}\times3-4\times9\times3-\frac{6\times9\times3}{2} = -199.12$$

$$\Delta_{3p} = -\frac{3\times9\times1}{3\times2}-\frac{4\times9\times1}{1}-\frac{6\times9\times1}{2} = -67.5$$

$$\Delta_{4p} = -\frac{6\times6\times9}{2\times2} = -81$$

$$\Delta_{5p} = -\frac{6\times9\times3}{2} = -81$$

$$\Delta_{6p} = -\frac{6\times9\times1}{2} = -27$$



الشكل ٩ – ٣٢

ولمراجعة الانحرافات المستخرجة ، نخطط الرسم البياني الإجمالي للعزوم $\overline{M}_5$ ، الناجمة عن التأثير الموحد لكافة وحدات القوى المجهولة (شكل ٩ – ٣٢) .

ولتحديد الانحراف δ_{55} ، نضرب الرسم البياني للعزوم $\overline{M}_5$ في الرسم البياني $\overline{M}_5$ ، لتحديد قيمة Δ_{5p} ، نضرب الرسم البياني للعزوم $\overline{M}_5$ في الرسم البياني للعزوم M_p :

$$\delta_{55} = \Sigma\int \overline{M}_5^2\,\frac{ds}{EJ} = \frac{6}{6\times2}\,(2\times4^2+2\times2^2-4\times2\times2)+$$
$$+\frac{4}{6\times1}\,(2\times4^2+2\times8^2+4\times8\times2)+\frac{6}{6\times2}\,(2\times12^2+$$
$$+2\times24^2+12\times24\times2)+\frac{6}{6\times4}\,(2\times4^2+2\times2^2-4\times$$
$$\times2\times2)+\frac{4}{6\times1}\,(2\times2^2+2\times2^2-2\times2\times2)+\frac{6\times12\times2}{2\times2\times3}\times$$
$$\times12 = 1324.7$$

$$\Delta_{5p} = \Sigma\int \overline{M}_5\,M_p\,\frac{ds}{EJ} = -\frac{3\times9}{3\times2}\left(1+\frac{3}{4}\times3\right)-$$
$$-\frac{4\times9}{2}\,(4+8)-\frac{6\times9}{2\times2}\,(12+24) = -716.62$$

والآن نتأكد من استكمال الشرط (11 — 9) :

$$\delta_{11} = \Sigma\,\delta$$

$$1324.7 = 354.7 + 17 + 72 + 7.5 + 135 + 58.5 + 2(58 + 144 + 42 + 18 + 6 + 18 + 54)$$

أو

$$1324.7 = 1324.7$$

ثم نتأكد من استكمال الشرط (13 — 9) :

$$\Delta_{1p} = \Sigma\,\Delta$$

$$-716.62 = -261 - 199.12 - 67.5 - 81 - 81 - 27$$

$$-716.62 = -716.62$$

إذن يتضح بأن الانحرافات محسوبة بصورة صحيحة .

والآن نعوض فى المعادلات القانونية ، قيم المعاملات والحدود المطلقة :

$$354.7\,X_1 + 58\,X_3 + 144\,X_4 + 42\,X_6 = +261$$
$$58\,X_1 + 17\,X_3 + 18\,X_4 + 6\,X_6 = +67.5$$
$$144\,X_1 + 18\,X_3 + 72\,X_4 + 18\,X_6 = +81.0$$
$$42\,X_1 + 6\,X_3 + 18\,X_4 + 7.5\,X_6 = +27.0$$
$$135\,X_2 + 54\,X_5 = +199.12$$
$$54\,X_2 + 58.5\,X_5 = +81.0$$

وسوف لا نقوم هنا بتقديم حل المعادلات ، بل سنكتفى بإعطاء النتائج فقط :

$X_1 = +0.607$ t ; $X_4 = -0.692$ t

$X_2 = +1.460$ t ; $X_5 = +0.037$ t

$X_3 = +2.753$ t/m ; $X_6 = -0.340$ t/m

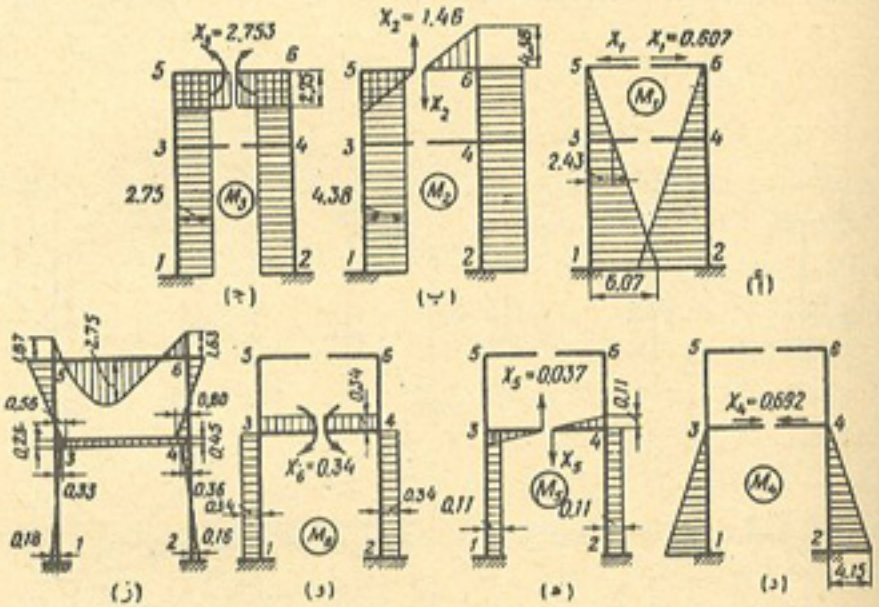
ثم نسلط الإجهادات المستخرجة ، على الإنشاء الرئيسى ، ونحسب عزوم الإنحناء الناجمة فيه ، نتيجة لتأثير هذه الإجهادات (القوى) والحمل المعلوم :

$$M_{56} = +1.460 \times 3 + 2.753 - 9 = -1.87 \text{ t/m}$$
$$M_{65} = -1.460 \times 3 + 2.753 = -1.63 \text{ t/m}$$
$$M_{34} = +0.037 \times 3 - 0.340 = -0.23 \text{ t/m}$$
$$M_{43} = -0.037 \times 3 - 0.340 = -0.45 \text{ t/m}$$
$$M_{35} = +0.607 \times 4 + 1.460 \times 3 + 2.753 - 9 = +0.56 \text{ t/m}$$
$$M_{46} = +0.607 \times 4 + 1.460 \times 3 + 2.753 = +0.80 \text{ t/m}$$

$$M_{31} = +0.607 \times 4 + 1.460 \times 3 + 2.753 + 0.037 \times 3 - 0.340 - 9 = +0.33 \text{ t/m}$$
$$M_{42} = +0.607 \times 4 - 1.460 \times 3 + 2.753 - 0.037 \times 3 - 0.340 = + = +0.36 \text{ t m}$$
$$M_{13} = +0.607 \times 10 + 1.460 \times 3 + 2.753 - 0.692 \times 6 + 0.037 \times 3 - 0.340 - 9 = -0.18 \text{ t/m}$$
$$M_{24} = +0.607 \times 10 - 1.460 \times 3 + 2.753 - 0.692 \times 6 - 0.037 \times 3 - 0.340 = -0.16 \text{ t/m}$$

ويمكن اتباع الطريقة التالية لحساب عزوم الانحناء :

نضرب وحدات الرسوم البيانية (لاحظ الشكل ٩ — ٣٠) فى القيم المناظرة للإجهادات المجهولة . ونضرب كافة الإحداثيات الرأسية للرسم البيانى للعزم ، الناجم عن تأثير الإجهاد $X_1 = 1$ (شكل ٩ — ٣٠ ، أ) فى المقدار (0.607 +) ، وإحداثيات الرسم البيانى للعزم ، الناجم عن تأثير الإجهاد $X_2 = 1$ (شكل ٩ — ٣٠ ، ب) فى المقدار (1.460 +) وهلم جرا . عندئذ نحصل على الرسوم البيانية الموضحة فى الشكل (٩ — ٣٣ ، ا ، ب ، ج ، د ، هـ ، و)* . نجمع



الشكل ٩ — ٣٣

* لا ينصح أن تستخدم بدلا من الرسوم البيانية الجديدة ، وحدات الرسوم البيانية ، بعد تغيير الأرقام فيها ، لأن ذلك يؤدى إلى الوقوع فى الخطأ .

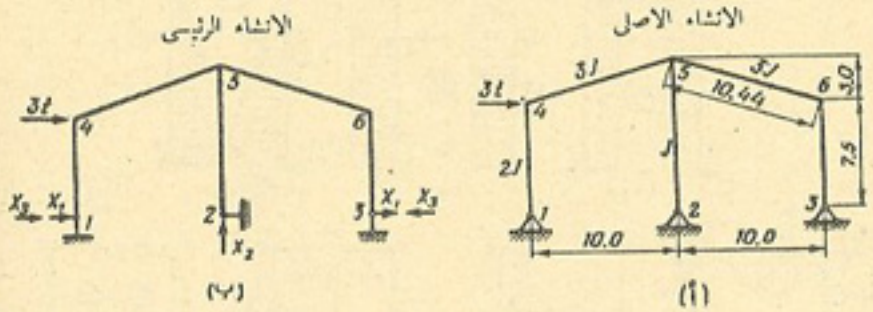
الرسوم البيانية التى حصلنا عليها ، ونضيف إليها الرسم البيانى للعزم الناجم عن تأثير الحمل الحقيقى (لاحظ الشكل ٩ – ٣١) . إن الرسم البيانى الإجمالى ، يمثل الرسم البيانى النهائى لعزوم الانحناء ، للإنشاء غير المحدد استاتيكيا المعلوم لدينا . ومن السهل أن نلاحظ بأن العزوم الناجمة فى الوصلات ، ستكون كالعزوم التى حصلنا عليها أعلاه :

$$M_{56} = 4.38 + 2.75 - 9 = -1.87 \text{ t/m}$$
$$M_{34} = +0.11 - 0.34 = -0.23 \text{ t/m}$$
$$M_{35} = +2.43 + 4.38 + 2.75 - 9 = +0.56 \text{ t/m}$$
$$M_{31} = +2.43 + 4.38 + 2.75 + 0.11 - 0.34 - 9 = +0.33 \text{ t/m}$$
$$M_{13} = +6.07 + 4.38 + 2.75 - 4.15 + 0.11 - 0.34 - 9 = -0.18 \text{ t/m}$$

وهلم جرا . . . .

إن الرسم البيانى النهائى لعزوم الانحناء ، مبين فى الشكل (٩ – ٣٣ ، ز) .

مثال ٣ : يطلب حساب الإطار المتماثل ذى الباعين ، المعرض لتأثير قوة (حمل) أفقية مركزة واحدة (شكل ٩ – ٣٤ ، أ) .



الشكل ٩ – ٣٤

الحل : إن الإطار المعلوم غير محدد استاتيكيا من الدرجة الثالثة . نحوله إلى إطار محدد استاتيكيا ، كما مبين فى الشكل (٩ – ٣٤ ، ب) .

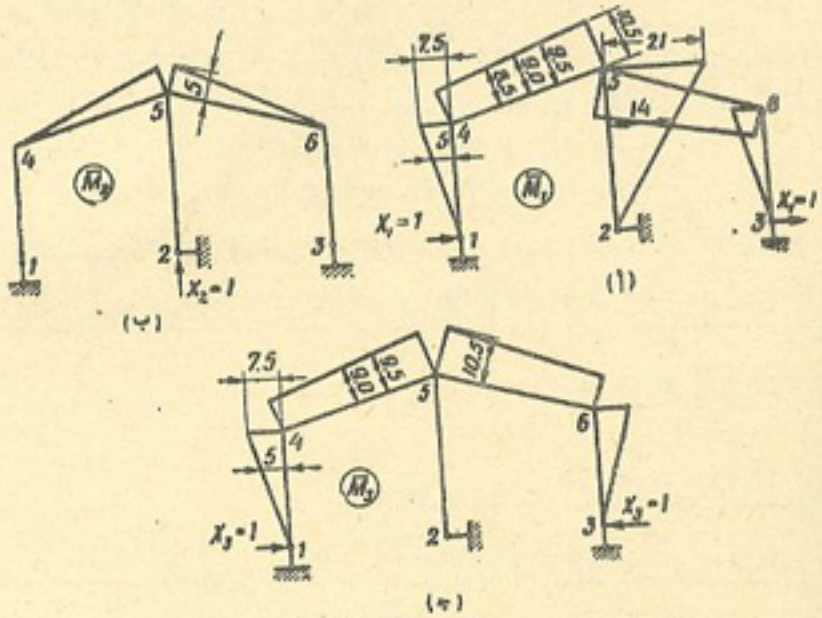
ولغرض الحصول على وحدات الرسوم البيانية ، المتماثلة أو العكسية المتماثلة فقط ، نعتبر المجاهيل ممثلة فى مجموعات القوى المجهولة التالية :

X_1 – قوتان أفقيتان موضوعتان بصورة عكسية المتماثل ،

X_2 – القوة الرأسية على المسند المتوسط ،

X_3 – قوتان أفقيتان موضوعتان بصورة متماثلة .

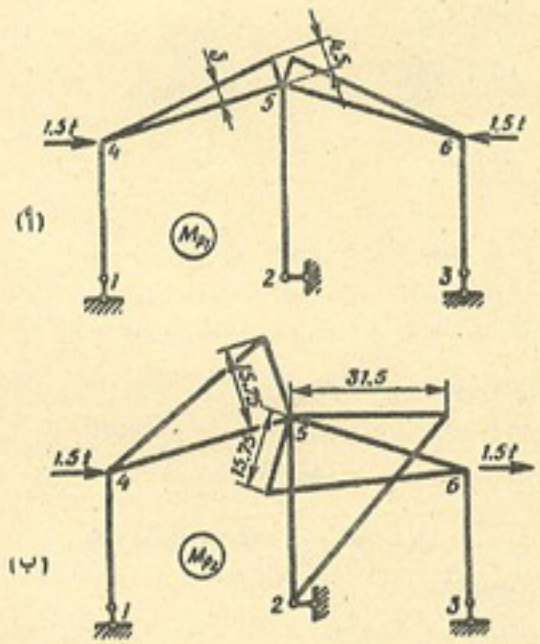
ووحدات الرسوم البيانية لعزوم الانحناء ، مبينة فى الشكل (٩ – ٣٥) .



الشكل ٩ – ٣٥

إن الحمل الخارجى ، هو الآخر مقسم إلى قسمين ، متماثل وعكسى التماثل ، ومجموعهما يمثل القوة المعلومة ومقدارها 3 t . ويبين الشكل (٩ – ٣٦) ، الرسوم البيانية لعزوم الانحناء ، الناجمة عن تأثير القوة الخارجية (الحمل المركز) .

ولحساب الانحرافات الناجمة عن الحمل الحقيقى (القوة الخارجية) ، سوف نضرب الرسم البيانى العكسى التماثل للعزم الناجم عن القوة $X_1 = 1$ (شكل ٩ – ٣٥ ، ١) فى الرسم البيانى الموضح فى الشكل (٩ – ٣٦ ، ب) للعزم الناجم عن تأثير القوة $X_2 = 1$ ، ونضرب الرسمين البيانيين المتماثلين ، للعزمين الناجمين عن تأثير القوتين $X_2 = 1$ و $X_3 = 1$ (شكل ٩ – ٣٥ ، ب ، ج) فى الرسم



الشكل ٩ – ٣٦

البيانى للعزم الناجم عن تأثير الحمل المتماثل (المبين فى الشكل ٩ – ٣٦ ، أ) .

ومن الواضح الآن بأن $\delta_{12} = \delta_{13} = 0$.

ولهذا السبب ، سيكون شكل المعادلات القانونية ، كما يلى :

$$X_1\ \delta_{11} + \Delta_{1p} = 0$$
$$X_2\ \delta_{22} + X_3\ \delta_{23} + \Delta_{2p} = 0$$
$$X_2\ \delta_{32} + X_3\ \delta_{33} + \Delta_{3p} = 0$$

والآن نحسب الانحرافات (باعتبار أن $EJ = 1\ t/m^2$) :

$$\delta_{11} = 2\ \frac{10.44 \times 7.5 \times 9}{3} + 2\ \frac{10.44 \times 3 \times 9.5}{2 \times 3} + 2\ \frac{7.5 \times 7.5 \times 5}{2 \times 2} +$$
$$+\ \frac{10.5 \times 21 \times 14}{2 \times 1} = +\ 2253.1$$

$$\delta_{22} = 2\ \frac{10.44 \times 5 \times \frac{2}{3} \times 5}{2 \times 3} = +\ 58$$

$$\delta_{33} = 2\ \frac{10.44 \times 7.5 \times 9}{3} + 2\ \frac{10.44 \times 3 \times 9.5}{2 \times 3} + 2\ \frac{7.5 \times 7.5 \times 5}{2 \times 2} =$$
$$= +\ 709.6$$

$$\delta_{23} = 2\ \frac{10.44 \times 5 \times 9.5}{2 \times 3} = +\ 165.3$$

$$\Delta_{1p} = 2\ \frac{10.44 \times 15.75 \times 9.5}{2 \times 3} + \frac{10.5 \times 31.5 \times 14}{2 \times 1} = +\ 2835.9$$

$$\Delta_{2p} = 2\ \frac{10.44 \times 5 \times 3}{2 \times 3} = +\ 52.2$$

$$\Delta_{3p} = 2\ \frac{10.44 \times 4.5 \times 9.5}{2 \times 3} = +\ 148.77$$

وبعد تعويض المعاملات والحدود الخاصة بالتحميل ، فى المعاملات القانونية ، نحصل على ما يلى :

$$2253.1\ X_1 = -\ 2835.9$$
$$58\ X_2 + 165.3\ X_3 = -\ 52.2$$
$$165.3\ X_2 + 709.6\ X_3 = -\ 148.77$$

وبحل هذه المعادلات ، نحصل على ما يلى :

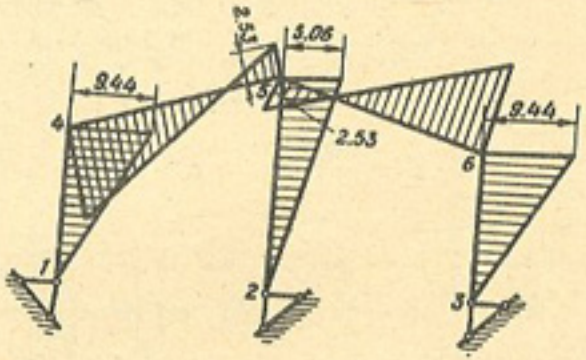
$$X_1 = -\ 1.259$$
$$X_2 = -\ 0.900 = -\ 0.9$$
$$X_3 = 0$$

ونقوم الآن بإيجاد عزوم الانحناء :

$$M_{45} = +\ 1.259 \times 7.5 = +\ 9.44\ t/m$$
$$M_{54} = +\ 1.259 \times 10.5 + 0.9 \times 5 - 4.5 - 15.75 = -\ 2.53\ t/m$$
$$M_{56} = -\ 1.259 \times 10.5 + 0.9 \times 5 - 4.5 + 15.75 = +\ 2.53\ t/m$$
$$M_{65} = -\ 1.259 \times 7.5 = -\ 9.44\ t/m$$
$$M_{52} = -\ 1.259 \times 21 + 31.5 = +\ 5.06\ t/m$$

وكان فى الإمكان ، كما فى المثال السابق ، ضرب كل وحدة رسم بيانى ، فى القيمة المناظرة للقوة المجهولة* ، ثم تجمع الرسوم البيانية الناتجة ، ويضاف إليها الرسم البيانى الناجم عن التحميل الحقيقى .

إن الرسم البيانى النهائى لعزوم الانحناء ، مبين فى الشكل (٩ – ٣٧) .



الشكل ٩ – ٣٧

وتجدر الإشارة ، إلى أنه كان فى الإمكان تبسيط حل هذه المسألة ، باتخاذ الخطوات التالية : إذا سلطنا على الإنشاء غير المحدد استاتيكيا المعلوم ، بدلا من قوة واحدة من جهة اليسار (لاحظ الشكل ٩ – ٣٤ ، أ) ، قوتين متماثلتين (لاحظ الشكل ٩ – ٣٦ ، أ) ، فإن هاتين القوتين سوف لا تؤديان إلى نشوء عزوم انحناء فى الإطار ، وذلك لأنه سوف لا تنشأ عندئذ إلا قوى طولية** فقط .

---

* أى ضرب الإحداثيات الرأسية لوحدة الرسم البيانى للعزوم $\overline{M}_1$ فى المقدار (1.259 —) وضرب الإحداثيات الرأسية للرسم البيانى للعزوم $\overline{M}_2$ فى المقدار (0.9 —) .

** ومن السهل التأكد من ذلك ، إذا اعتبرنا الإنشاء الرئيسى ، هو الإنشاء الناجم عن الإطار المعلوم ، بوضع مفصلتين فى الوصلتين 4 و 6 ، ورفع (إزالة) القضيب الأفقى من الوصلة 2 .

وبما أنه فى الإمكان تحليل الحمل المعلوم إلى مركبتين ، متماثلة وعكسية التماثل ، إذن يجب أن يكون الرسم البيانى النهائى لعزوم الانحناء ، مطابقاً تماماً ، للرسم البيانى الناتج عند تأثير الحمل العكسى التماثل ، أى سيكون هذا الرسم البيانى ، عكسى التماثل . إذن يجب أن تكون المركبات الأفقية لردود فعل المساند الطرفية ، متجهة فى نفس الاتجاه ، ومساوية لبعضها البعض ، ولذلك يمكن القول مباشرة بأن $X_3 = 0$ ، وهذا ما لم نتأكد منه ، إلا بعد حل المعادلات .

وبعد ذلك ، يجب أن تؤدى المركبة المتماثلة للحمل ، فى الإطار الحقيقى ، إلى نشوء عزوم انحناء عند الوصلة 5 ، مساوية للصفر ، وفى هذه الأثناء ، نجد أنه فى الأنشاء المحدد استاتيكيا ، يتضح من الشكل (٩ – ٣٦ ، أ) ، بأن العزوم الناجمة فى العارضتين ، تساوى (4.5 t/m —) . إذن ، يجب أن تعادل بعزوم الانحناء ، الناجمة عن تأثير القوى المجهولة : ومن هذه القوة نجد بأن القوتين X_2 و X_3 وحدهما ، تعطيان عزمين متساويين ، إلى يمين ويسار الوصلة ، ولهذا يجب أن تكون العزوم الناجمة عنهما بالذات ، عند الوصلة 5 ، مساوية للمقدار (4.5 t/m +) . ولما كانت $X_3 = 0$ ، فإن العزوم الناجمة فى العارضتين ، عند الوصلة 5 ، نتيجة لتأثير القوة X_2 وحدها ، يجب أن تساوى (4.5 t/m +) . ولهذا السبب نجد بأن :

$$-5\ X_2 = +4.5$$

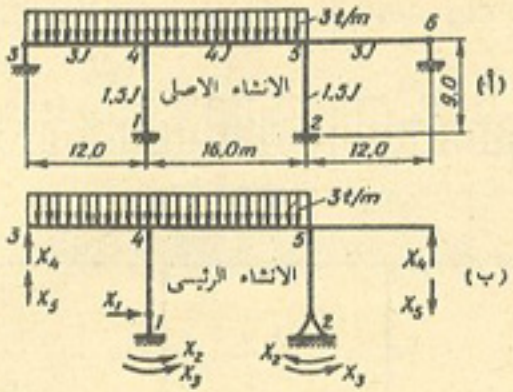
$$X_2 = \frac{-4.5}{5} = -0.9\ t$$

إن المعامل (5 —) الموجود قبل القوة X_2 ، يمثل قيمة عزوم الانحناء الناجمة فى العارضتين ، عند الوصلة 5 ، نتيجة لتأثير القوة $X_2 = 1$ (راجع الشكل ٩ – ٣٥ ، ب) .

وهكذا يمكن إيجاد القوتين المجهولتين X_2 و X_3 بصورة مباشرة ، ولذلك يجب فى الواقع حل معادلة واحدة لاستخراج المجهول X_1 ، تتطلب حساب الانحرافين δ_{11} و Δ_{1p} فقط . ويتضح من هذا المثال ، بأنه يمكن أحيانا حساب الإطار المعقد جداً ، بطريقة سهلة للغاية .

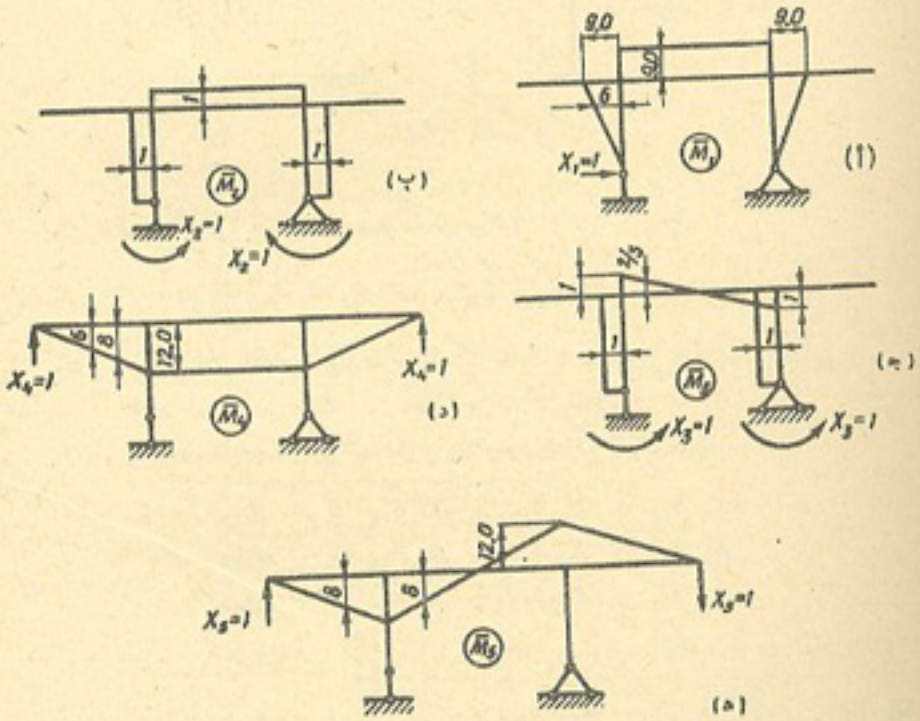
مثال ٤ : يطلب حساب الإطار المتماثل ذى الثلاثة أبواع ، لأحد الجسور المقامة فوق طريق عام للسيارات ، كما مبين فى الشكل (٩ – ٣٨ ، أ) ، بالنسبة لتأثير حمل رأسى موزع بانتظام ، على الباعين الأول والثانى . كما يطلب تخطيط الرسوم البيانية لعزوم الانحناء وقوى القص والقوى الطولية .

وفى هذا الإنشاء الرئيسى ، سوف لا تظهر أى عزوم انحناء ، نتيجة لتأثير الحمل المتماثل المذكور . ولهذا السبب ستكون كافة الحدود المطلقة لمجموعة المعادلات القانونية (وبالتالى القوى أو الإجهادات المجهولة) مساوية للصفر .



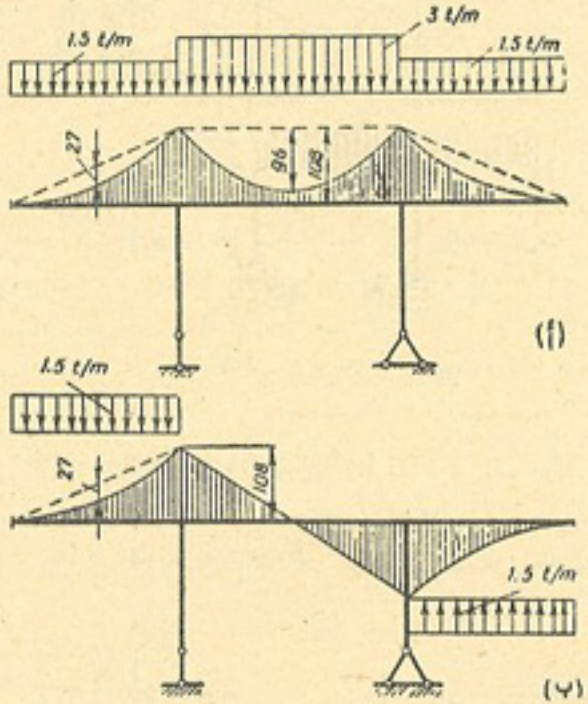
الشكل ٩ – ٣٨

الحل : إن الإنشاء الرئيسى المحدد استاتيكيا ، المتخذ فى هذه الحالة ، مبين فى الشكل (٩ – ٣٨ ، ب) . والرسوم البيانية لعزوم الانحناء ، الناجمة عن تأثير وحدات الإجهادات (القوى) المجهولة ، مبينة فى الشكل (٩ – ٣٩) . الرسوم البيانية للعزم الناجمة عن تأثير الحمل ،



الشكل ٩ – ٣٩

المقسم إلى قسمين ، متماثل وعكسى التماثل ، مبينة فى الشكل (٩ – ٤٠)* .



الشكل ٩ – ٤٠

ومن بحث هذه الرسوم البيانية ، يتضح ما يلى مباشرة :

$$\delta_{13} = \delta_{15} = \delta_{23} = \delta_{25} = \delta_{34} = \delta_{45} = 0$$

ولهذا السبب تنقسم المجموعة المؤلفة من خمس معادلات قانونية (تبعاً لعدد المجاهيل) ، إلى مجموعتين ، تتألف أولاهما من معادلتين ، والثانية من ثلاث معادلات .

وتدخل فى إحدى المجموعتين ، المجاهيل ذات الرسوم البيانية المتماثلة فقط :

$$X_1\,\delta_{11} + X_2\,\delta_{12} + X_4\,\delta_{14} = -\,\Delta_{1p}$$
$$X_1\,\delta_{21} + X_2\,\delta_{22} + X_4\,\delta_{24} = -\,\Delta_{2p}$$
$$X_1\,\delta_{41} + X_2\,\delta_{42} + X_4\,\delta_{44} = -\,\Delta_{4p}$$

---

* إن تقسيم الحمل هنا ، لا يؤدى فى الواقع إلى تبسيط حساب هذا الإطار ، ولو بقدر ضئيل .

تدخل فى المجموعة الأخرى ، المجاهيل ذات الرسوم البيانية العكسية التماثل فقط :

$$X_3\,\delta_{33} + X_5\,\delta_{35} = -\,\Delta_{3p}$$
$$X_3\,\delta_{53} + X_5\,\delta_{55} = -\,\Delta_{5p}$$

والآن نقوم بحساب الانحرافات (باعتبار أن $EJ_1 = 1\ t/m^2$) :

$$\delta_{11} = +2\,\frac{9\times9\times6}{2\times1.5} + \frac{16\times9\times9}{4} = +\,648$$

$$\delta_{12} = +2\,\frac{9\times9\times1}{2\times1.5} + \frac{16\times9\times1}{4} = +\,90$$

$$\delta_{14} = -\,\frac{16\times9\times12}{4} = -\,432$$

$$\delta_{22} = +2\,\frac{9\times1\times1}{1.5} + \frac{16\times1\times1}{4} = +\,16$$

$$\delta_{24} = -\,\frac{16\times1\times12}{4} = -\,48$$

$$\delta_{44} = +2\,\frac{12\times12\times8}{2\times3} + \frac{16\times12\times12}{4} = +\,960$$

$$\delta_{33} = +2\,\frac{9\times1\times1}{1.5} + 2\,\frac{8\times1\times\frac{2}{3}}{2\times4} = +\,13.333$$

$$\delta_{35} = -2\,\frac{8\times1\times8}{2\times4} = -\,16$$

$$\delta_{55} = +2\,\frac{12\times12\times8}{2\times3} + 2\,\frac{8\times12\times8}{2\times4} = +\,576$$

$$\Delta_{1p} = +\,\frac{(16\times108 - \frac{2}{3}\times16\times96)\,9}{4} = +\,1584$$

$$\Delta_{2p} = +\,\frac{(16\times108 - \frac{2}{3}\times16\times96)\,1}{4} = +\,176$$

$$\Delta_{3p} = +2\,\frac{8\times108\times\frac{2}{3}}{2\times4} = +\,144$$

$$\Delta_{4p} = -2\,\frac{12\times108\times8}{2\times3} + 2\,\frac{\frac{2}{3}\times12\times27\times6}{3} - \frac{(16\times108 - \frac{2}{3}\times16\times96)12}{4} =$$
$$= -\,4704$$

$$\Delta_{5p} = -2\,\frac{12 \times 108 \times 8}{2 \times 3} + 2\,\frac{\frac{2}{3} \times 12 \times 27 \times 6}{3} - 2\,\frac{8 \times 108 \times 8}{2 \times 4} =$$

$$= -4320$$

وبتعويض قيم المعاملات والحدود الخاصة بالتحميل ، المستخرجة الآن ، فى المعادلات القانونية ، نحصل على ما يلى :

$$\begin{aligned}
648\,X_1 + 90\,X_2 - 432\,X_4 &= -1584\\
90\,X_1 + 16\,X_2 - 48\,X_4 &= -176\\
-432\,X_1 - 48\,X_2 + 960\,X_4 &= +4704\\
13.333\,X_3 - 16\,X_5 &= -144\\
-16\,X_3 + 576\,X_5 &= +4320
\end{aligned}$$

وبعد اختصار المعادلة الأولى على 18 ، والثانية على 2 ، والثالثة على 48 ، والرابعة على $\frac{8}{3}$ ، والخامسة على 16 ، نحصل على ما يلى :

$$\begin{aligned}
36\,X_1 + 5\,X_2 - 24\,X_4 &= -88\\
45\,X_1 + 8\,X_2 - 24\,X_4 &= -88\\
-9\,X_1 - X_2 + 20\,X_4 &= +98\\
5\,X_3 - 6\,X_5 &= -54\\
-X_3 + 36\,X_5 &= 270
\end{aligned}$$

وبعد حل هذه المعادلات ، نحصل على النتائج التالية :

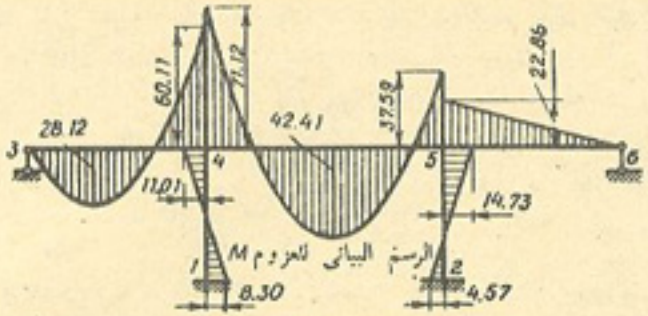
$$\begin{aligned}
X_1 &= +2.145 \text{ t}\\
X_2 &= -6.435 \text{ t/m}\\
X_3 &= -1.862 \text{ t/m}\\
X_4 &= +5.543 \text{ t}\\
X_5 &= +7.448 \text{ t}
\end{aligned}$$

وبضرب كل وحدة رسم بيانى فى القيمة المناظرة للمجهول ، وبجمع احداثياتها الرأسية مع إضافة الإحداثيات الرأسية للرسوم البيانية للعزوم الناجمة عن الحمل ، نحصل على الرسم البيانى النهائى لعزوم الانحناء (شكل ٩ – ٤١) .

وننتقل الآن إلى حساب قيم قوى القص .

إن قوة القص الناشئة عند المسند الطرفى الأيسر ، تساوى ما يلى :

$$Q_{34} = \frac{3 \times 12}{2} - \frac{60.11}{12} = 12.99 \text{ t}$$



الشكل ٩ – ٤١

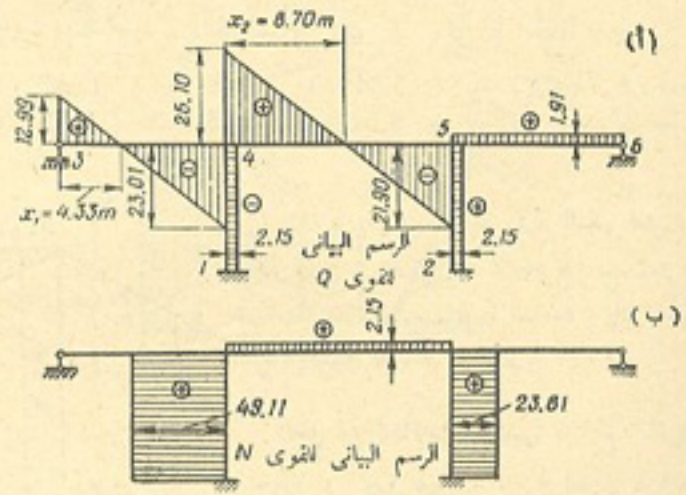
وقوة القص عند المسند الأيمن للباع الأول للعارضة (إلى يسار الوصلة 4) تساوى ما يلى :

$$Q_{43} = -\frac{3 \times 12}{2} - \frac{60.11}{12} = -23.01 \text{ t}$$

وقوة القص عند المسند الأيسر للباع الثانى (إلى يمين الوصلة 4) ، تساوى ما يلى :

$$Q_{45} = \frac{3 \times 16}{2} + \frac{71.12 - 37.59}{16} = 26.10 \text{ t}$$

وبعد إكمال الحسابات ، نحصل على كافة المعطيات ، اللازمة لتخطيط الرسم البيانى لقوى القص . وهذا الرسم البيانى موضح فى الشكل (٩ – ٤٢ ، ا) . وباستخدام الرسم البيانى لقوى القص ،



الشكل ٩ – ٤٢

تخطط الرسم البيانى للقوى الطولية (شكل ٩ – ٤٢ ، ب) . ومن الرسم البيانى لقوى القص ، نحدد الإحداثيات السينية لنقاط الصفر :

$$x_1 = \frac{12.99}{3.0} = 4.33 \text{ m}$$

$$x_2 = \frac{26.10}{3.0} = 8.70 \text{ m}$$

وذلك كما مبين فى الشكل (٩ – ٤٢ ، ا) ، ونستخدم هذه الإحداثيات السينية لحساب قيم عزوم الانحناء القصوى M_{max} (شكل ٩ – ٤١) ، وذلك كما يلى :

فى الباع 4 — 3 :

$$M_{max} = 12.99 \times 4.33 - 3.0 \times \frac{4.33^2}{2} = 28.12 \text{ t/m}$$

فى الباع 5 — 4 :

$$M_{max} = -71.12 + 26.10 \times 8.70 - 3.0 \times \frac{8.70^2}{2} = 42.41 \text{t/m}$$

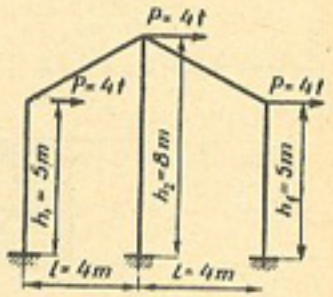
ويمكن من الرسوم البيانية لقوى القص والقوى الطولية ، أن نحدد بسهولة ردود فعل المساند :

$$A_1 = +49.11 \text{ t}$$
$$A_2 = +23.81 \text{ t}$$
$$A_3 = +12.99 \text{ t}$$
$$A_6 = -1.91 \text{ t}$$

ويمكن مراجعة صحة تحديد ردود فعل المساند A_3 و A_6 ، انطلاقاً مما يلى :

$$A_3 = X_4 + X_5 = +5.543 + 7.448 = +12.99 \text{ t}$$
$$A_6 = X_4 - X_5 = +5.543 - 7.448 = -1.91 \text{ t}$$

مثال ٥ : يطلب تخطيط الرسم البيانى لعزوم الانحناء ، للإطار المبين فى الشكل (٩ – ٤٣) . مع العلم بأن الإطار غير محدد استاتيكيا من الدرجة السادسة ، وأن جسورات المقاطع العرضية لكافة قضبانه ، متساوية .

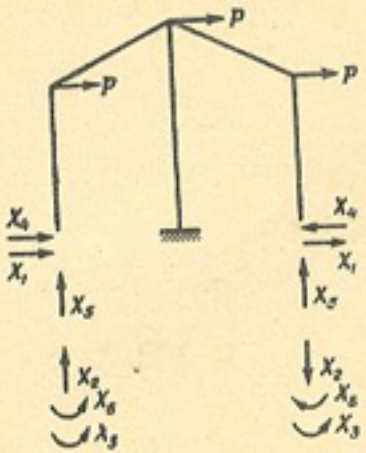


الشكل ٩ – ٤٣

الحل : إن الإنشاء الرئيسى ، مع القوى الجماعية المجهولة ، المؤثرة عليه ، مبين فى الشكل (٩ – ٤٤) . إن جميع المجاهيل تقسم إلى مجموعتين ، هما : مجموعة

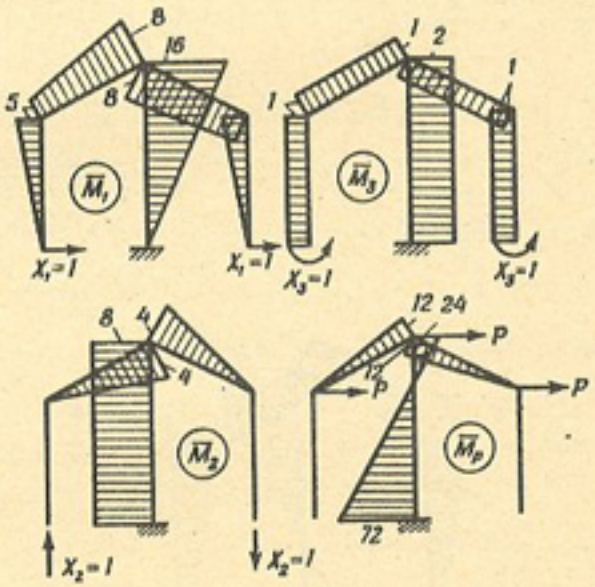
المجاهيل العكسية التماثل X_1 ، X_2 و X_3 ، ومجموعة المجاهيل المتماثلة X_4 ، X_5 و X_6 . إن الحمل المعلوم المؤثر على الإطار ، حمل عكسى التماثل ، ولهذا السبب (راجع البند ٩ – ٣) تنشأ فى الإطار إجهادات مجهولة عكسية التماثل فقط ، أما الإجهادات المجهولة المتماثلة ، فتصبح مساوية للصفر . إذن فى هذه الحالة ، يجب حل مجموعة مؤلفة من ثلاث معادلات ، تحتوى على مجاهيل عكسية التماثل فقط :

$$X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13} + \Delta_{1p} = 0$$
$$X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} + \Delta_{2p} = 0$$
$$X_1 \delta_{31} + X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} + \Delta_{3p} = 0$$



الشكل ٩ – ٤٤

ولحساب المعاملات والحدود المطلقة لهذه المجموعة من المعادلات ، نخطط الرسوم البيانية لعزوم الانحناء ، الناجمة عن التأثير الفردى للقوى المجهولة الجماعية العكسية التماثل ، وتأثير الحمل (شكل ٩ – ٤٥) . ونظراً لاستقامة قضبان الإطار ، فإنه عند حساب قيم الانحرافات ، تتم عملية ضرب الرسوم البيانية ، بطريقة فيريشاجين .



الشكل ٩ – ٤٥

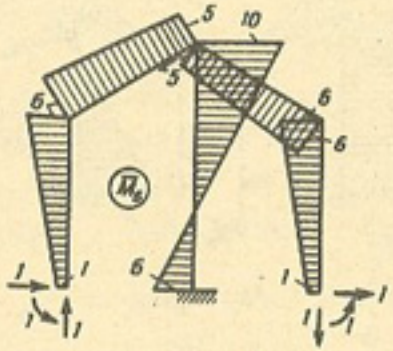
والآن نحدد وحدات الانحراف ، معتبرين بأن $EJ = 1 \text{ t/m}^2$:

$$\delta_{11} = 2 \times \frac{5\times5}{2} \times \frac{2\times5}{3} + \frac{5}{6}\,(2\times5^2 + 2\times8^2 + 2\times5\times8)\,2 +$$
$$+ \frac{16\times8\times2}{2\times3}\,16 = 1196$$
$$\delta_{22} = \frac{4\times5}{2} \times \frac{2}{3} \times 4 \times 2 + 8\times8\times8 = 565.3$$
$$\delta_{33} = 1\times5\times1\times4 + 2\times8\times2 = 52$$
$$\delta_{12} = -\frac{2\times5}{6}\,(2\times4\times8 + 5\times4) - \frac{16\times8}{2}\times8 = -652$$
$$\delta_{13} = 1.5\times\frac{5}{2}\times2 + 1\times5\times6.5\times2 + \frac{8\times16}{2} = 218$$
$$\delta_{23} = -\frac{4\times5}{2}\times1\times2 - 8\times8\times2 = -148$$

ثم نوجد الانحرافات الناجمة عن الأحمال :

$$\Delta_{1p} = 2\times\frac{5}{6}\,(2\times8\times12 + 5\times12) + \frac{8}{6}\,(2\times16\times24 - 16\times72) = -92$$
$$\Delta_{2p} = -\frac{12\times5}{2}\times\frac{2}{3}\times4\times2 + 8\times8\,\frac{72-24}{2} = 1376$$
$$\Delta_{3p} = \frac{12\times5}{2}\times1\times2 - 2\times8\times24 = -324$$

ونقوم بمراجعة المعاملات المستخرجة . ولأجل ذلك ، نخطط الرسم البياني النهائي لعزوم الانحناء ، الناجمة عن التأثير الموحد لكافة وحدات القوى (الإجهادات) المجهولة $X_1 = 1$ ، $X_2 = 1$ ، $X_3 = 1$ (شكل ٩ – ٤٦) .



شكل ٩ – ٤٦

نستخدم المراجعة العامة [راجع الشرط (11 — 9)] :

$$\Sigma\,\delta = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} + 2\,(\delta_{12} + \delta_{13} + \delta_{23})$$
$$\Sigma\,\delta = 1196 + 565.3 + 52 + 2\,(-652 + 218 - 148) = 649.3$$

ومن الرسم البياني للعزم $\overline{M}_s$ نجد ما يلي :

$$\delta_{ss} = \Sigma \int \overline{M}_s^2\,\frac{ds}{EJ} = \frac{2\times5}{2}\,(2\times1^2 + 2\times6^2 + 2\times1\times6) +$$
$$+ \frac{2\times5}{6}\,(2\times6^2 + 2\times5^2 + 2\times6\times5) + \frac{8}{6}\,(2\times10^2 +$$
$$+ 2\times6^2 - 2\times6\times10) = 649.3 = \Sigma\,\delta$$

إذن يتضح بأن حساب المعاملات الفردية ، كان صحيحاً . ثم نراجع الانحرافات الناجمة عن تأثير الأحمال [راجع الشرط (13 — 9)] :

$$\Sigma\,\Delta = \Delta_{1p} + \Delta_{2p} + \Delta_{3p}$$
$$\Sigma\,\Delta = -92 + 1376 - 324 = 960$$
$$\Delta_{sp} = \Sigma \int \overline{M}_s\,M_p = \frac{ds}{EJ} = \frac{2\times5}{6}\,(2\times5\times12 + 6\times12) + \frac{8}{6}\,(2\times$$
$$\times10\times24 + 2\times6\times72 - 10\times72 - 6\times24) = 960 = \Sigma\,\Delta$$

ويتضح من ذلك ، بأن حساب الانحرافات الناجمة عن الأحمال ، كان صحيحاً .

والآن نعوض المعاملات والحدود المطلقة ، التي تمت مراجعتها ، في مجموعة المعادلات القانونية :

$$1196\,X_1 - 652\,X_2 + 218\,X_3 = 92$$
$$-652\,X_1 + 565.3\,X_2 - 148\,X_3 = 1376$$
$$218\,X_1 - 148\,X_2 + 52\,X_3 = 324$$

ثم نختصر كافة معادلات المجموعة على 2 (لتبسيط مجموعة المعادلات) :

$$598\,X_1 - 326\,X_2 + 109\,X_3 = 46$$
$$-326\,X_1 + 283\,X_2 - 74\,X_3 = 688$$
$$109\,X_1 - 74\,X_2 + 26\,X_3 = 162$$

ونحل هذه المجموعة من المعادلات باستخدام الطريقة المختصرة (جدول ٩ – ٣) .

ومن المعادلة (III) نجد ما يلي :

$$4.1\,X_3 = 61.4 \quad ، \quad X_3 = 14.97\ \text{t/m}$$

ومن المعادلة (II) نجد ما يلي :

$$106\ X_2 - 15 \times 14.97 = -663$$
$$X_2 = -4.237\ t$$

ومن المعادلة (I) نجد ما يلى :

$$598\ X_1 + 326 \times 4.237 + 109 \times 14.97 = 46$$
$$X_1 = -4.961\ t$$

ولمراجعة صحة حل مجموعة المعادلات ، نعوض قيم المقادير المستخرجة ، فى المعادلة القانونية الثالثة* :

$$-4.961 \times 109 + 4.237 \times 74 + 14.97 \times 26 - 162 = 0.009 \approx 0$$

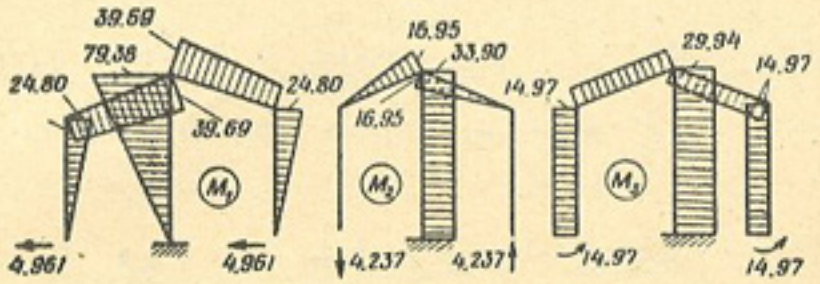
جدول ٩ – ٣

رقم المعادلة	X_1	X_2	X_3	عوامل الضرب a_{ik}	S	K
(I)	598	— 326	109	$a_{12} = 0.546$ $a_{13} = -0.182$	381	46
(2)	.	283	— 74		— 177	— 688
(I) × a_{12}	.	— 177	59		208	25
(II)	.	106	— 15	$a_{23} = 0.141$	91	— 663
(3)	.	.	26		61	162
(I) × a_{13}	.	.	—19.8		—69.5	— 8.4
(II) × a_{23}	.	.	— 2.1		12.7	— 93
(III)	.	.	4.1		4.2	61.4

وبقى الآن مضاعفة كل وحدة رسم بيانى ، بعدد من المرات ، يساوى قيمة القوة المجهولة المناظرة . والنتائج مبينة فى الشكل (٩ – ٤٧) .

* من الأفضل تعويض هذه القيم فى كافة المعادلات القانونية .

ولحصول على الرسم البيانى النهائى لعزوم الانحناء ، يجب جمع الإحداثيات الرأسية للرسوم البيانية ، الموضحة فى الشكل (٩ – ٤٧) ، مع بعضها البعض تبعاً للنقاط ، ومع الإحداثيات

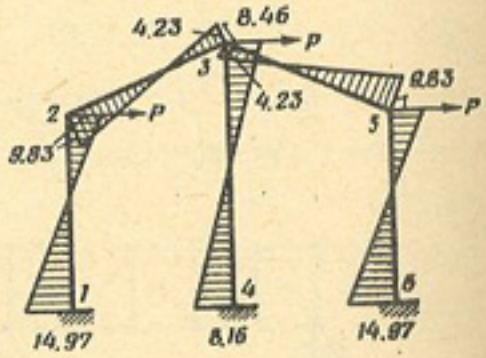


الشكل ٩ – ٤٧

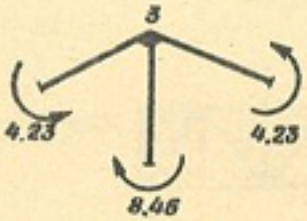
الرأسية للرسم البيانى للعزوم M_p ، الناجمة عن الحمل الحقيقى (لاحظ الشكل ٩ – ٤٥) . وأثناء الجمع ، نعتبر عزوم الانحناء ، الواقعة إلى أسفل ويمين القضبان ، بمثابة عزوم موجبة :

$$M_{12} = -14.97$$
$$M_{21} = -14.97 + 24.80 = 9.83$$
$$M_{32} = -14.97 - 16.95 + 36.69 - 12.00 = -4.23$$
$$M_{34} = 29.94 + 33.90 - 79.38 + 24.00 = 8.46$$
$$M_{43} = 29.94 + 33.90 - 72.00 = -8.16$$

نضع الرسم البيانى النهائى لعزوم الانحناء ، من جهة الألياف المشدودة (شكل ٩ – ٤٨) .



الشكل ٩ – ٤٨



الشكل ٩ – ٤٩

ويجب مراجعة الرسم البيانى النهائى لعزوم الانحناء .

١ . مراجعة توازن العقدة 3 (شكل ٩ – ٤٩) :

$$\Sigma M_3 = -4.23 - 4.23 + 8.46 = 0$$

٢ . المراجعة بواسطة المحيط المقفل : نظرا لثبات جسورات القضبان ، نحسب المساحة الكلية للرسم البيانى للعزم على طول المحيط 4 — 3 — 2 — 1 ، ونعتبر بأن قسم الرسم البيانى الواقع خارج هذا المحيط ، يكون موجباً :

$$\frac{14.97 - 9.835}{2} \times 5 + \frac{4.23 - 9.835}{2} \times 5 + \frac{8.46 - 8.164}{2} \times$$
$$\times 8 = 0.009 \approx 0$$

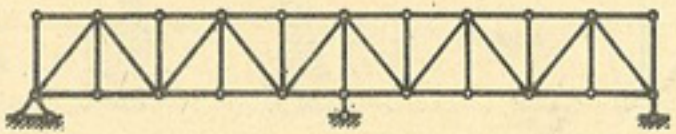
البند ٩ — ٨ : الجمالونات غير المحددة استاتيكيا

إن الجمالونات غير المحددة استاتيكيا ، هى الجمالونات المستقرة هندسياً ، التى يمكن إيجاد ردود فعل جميع أربطتها ، الناجمة عن تأثير الحمل الاستاتيكى الاختيارى ، من البحث الآنى للشروط الاستاتيكية والشروط المميزة لتشوهات الإنشاء .

وفى الجمالون غير المحدد استاتيكيا ، كما هى الحالة فى أى إنشاء آخر غير محدد استاتيكيا ، توجد بالإضافة إلى الأربطة الضرورية لتأمين استقراره الهندسى ، أربطة تسمى بالأربطة الزائدة ، التى يؤدى رفعها من الإنشاء ، إلى تحويل الجمالون إلى جمالون محدد استاتيكيا ، بدون التأثير على استقراره الهندسى .

إن عدد الأربطة الزائدة ، يدل على درجة عدم التحديد الاستاتيكى للجمالون .

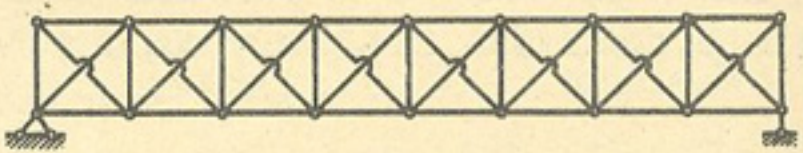
وهنا ، كما هى الحالة عند حساب الإنشاءات الإطارية ، يوجد نوعين من عدم التحديد الاستاتيكى : خارجى وداخلى . ويقترن النوع الأول بوجود اربطة زائدة عند المساند ، والنوع الثانى بوجود أربطة زائدة داخلية .



الشكل ٩ — ٥٠

ويبين الشكل (٩ — ٥٠) أحد الجمالونات ، التى ردود فعل مساندها غير محددة استاتيكيا ، وهذا الجمالون غير محدد استاتيكيا من الدرجة الأولى . ويمكن

اعتباره غير محدد استاتيكيا من الخارج ، إذا اعتبرنا الرباط الزائد ، هو أحد القضبان الساندة الرأسية ، أما إذا اعتبرنا الرباط الزائد ، على سبيل المثال ، هو قضيب الوتر السفلى (لأى جزء هيكلى) ، عندئذ سوف يعتبر الجمالون غير محدد استاتيكيا من الداخل ، من الدرجة الأولى . ويبين الشكل (٩—٥١) أحد الجمالونات المحددة استاتيكيا ، بالنسبة لردود فعل المساند ، وغير محددة استاتيكيا بالنسبة لتكوينها الداخلى . ومثل هذا الجمالون ، غير محدد استاتيكيا من الدرجة الثامنة .



الشكل ٩ — ٥١

إن الخاصية المميزة للإنشاءات غير المحددة استاتيكيا (بخلاف الإنشاءات المحددة استاتيكيا) ، كما سبق وأن ذكرنا فى البند ٧ — ١ ، هى أن توزيع الإجهادات فيها ، لا يعتمد على الأحمال والقوى الخارجية فقط ، بل وكذلك على النسبة بين أبعاد المقاطع العرضية لقضبانها المنفردة . وعندما تكون القضبان مصنوعة من مواد مختلفة ، يعتمد توزيع الإجهادات أيضاً ، على معاملات مرونة تلك المواد .

وفى الجمالون غير المحدد استاتيكيا ، يمكن أن تنشأ إجهادات ابتدائية ، نتيجة لعدم دقة التجميع ، وعدم تماثل هبوط المساند واختلاف درجة الحرارة . ومن هذه الناحية ، تصبح الجمالونات غير المحددة استاتيكيا ، أردأ من الجمالونات المحددة استاتيكيا ، التى لا تؤدى الأسباب المذكورة ، إلى ظهور إجهادات إضافية فيها .

ولكن توجد للإنشاءات غير المحددة استاتيكيا ، أفضلياتها الخاصة . وعلى سبيل المثال ، نجد بأن أبواع جسور السكك الحديدية ، المصممة على هيئة جمالونات متواصلة ، تؤمن حركة القطارات عليها بسلاسة ، أكثر مما هى عليه بالنسبة للأبواع المصممة على هيئة جمالونات بسيطة مستقلة ، وذلك لأن الخط

المرن لمثل هذه الأبواع ، لا يحتوى على انكسارات عند المساند ، وبذلك تختفى الصدمات الناجمة عن انتقال عجلات القطار ، من أحد الجمالونات البسيطة إلى الجمالون الآخر . وبالإضافة إلى ذلك فإن الجمالون المتواصل ، يكون أقل وزناً من مجموع الجمالونات البسيطة المعادلة له :

وفيما يتعلق بالناحية التصميمية ، تكون الإنشاءات غير المحددة استاتيكيا ، بصورة عامة ، أبسط من الإنشاءات المحددة استاتيكيا — وذلك لأن تحويل الإنشـــاء غير المحدد استاتيكيا إلى إنشاء محدد استاتيكيا ، يتطلب إضافة مفصلات إضافية وتقطيع الإنشاء إلى أجزاء بواسطة وصلات خاصة وهلم جرا ، الأمر الذى يؤدى إلى تعقيد الإنشاء .

وتزداد صعوبة الحساب ، بزيادة عدد القوى أو الإجهادات المجهولة الزائدة .

وقد أشرنا سابقاً فى البند ٧ — ١ ، إلى أن الإجهادات الناشئة فى الأربطة الضرورية على الإطلاق ، للإنشاء غير المحدد استاتيكيا ، تستخرج من شروط التوازن الاستاتيكى ، أما الإجهادات الناشئة فى الأربطة الضرورية فرضياً ، فيحتاج استخراجها إلى بحث تشوهات الإنشاء . ولهذا السبب فإن تحديد أبعاد المقاطع العرضية ، فى قضبان الجمالون ، التى تعتبر ضرورية على الإطلاق ، يتم ببساطة كبيرة ، وذلك لأن الإجهادات الناشئة فيها ، لا تعتمد على أبعاد المقاطع العرضية لقضبان الجمالون الأخرى . أما الإجهادات الناشئة فى بقية قضبان الجمالون التى يعتبر كل منها ضرورياً بالفرض ، فهى دوال المقاطع العرضية ، التى يجب بدورها ، أن تناظر الإجهادات إلى أكبر حد ممكن ، وذلك لأن الإجهادات الناشئة فى قضبان الجمالون غير المحدد استاتيكيا ، والجيد التصميم ، لا يجب أن تختلف إلا قليلا ، عن الإجهادات المسموح بها .

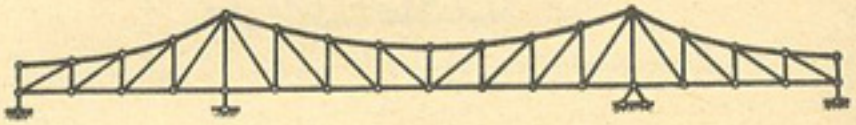
ولكى نتوصل إلى توزيع الإجهادات بهذا الشكل ، يمكن أن نتبع الطريقة التالية على سبيل المثال : نحذف من الجمالون المعلوم ، عدداً من القضبان الضرورية بالفرض ، بحيث يكون الإنشاء الناجم عن ذلك ، والمسمى ، بالإنشاء الرئيسى ، محدداً استاتيكيا . ويجب تعويض هذا الإنشاء ، للحمل

الخارجى ، لاستخراج الإجهادات القصوى الناشئة فى القضبان . وعند تعرض الجمالون لتأثير الحمل المتنقل ، يجب استخدام خطوط التأثير ، لتحديد الإجهادات المذكورة أعلاه .

ثم يجب إيجاد أبعاد المقاطع العرضية لقضبان الجمالون ، المناظرة لهذه الإجهادات القصوى . وعادة تؤخذ أبعاد المقاطع العرضية للقضبان الضرورية بالفرض ، بصورة اختيارية بهذا القدر أو ذلك .

وبعد ذلك ، من الضرورى حساب الجمالون المعلوم غير المحدد استاتيكيا (بوضع وحل المعادلات القانونية الخاصة بذلك) ، وإيجاد الإجهادات الناشئة فى كافة قضبان الجمالون ، مرة ثانية : وإذا ظهر فى هذه الحالة ، بأن الإجهادات الناشئة فى قضبان الجمالون المعلوم ، تختلف كثيراً عن الإجهادات المسموح بها ، يجب عندئذ إعادة الحساب ، بعد اختيار أبعاد جديدة للمقاطع العرضية للقضبان .

ويمكن حل مسألة التحديد التقريبى أو الإبتدائى ، للإجهادات الناشئة فى قضبان الجمالون ، بطريقة مقارنة الإنشاء الجمالونى المعلوم ، مع القضيب المصمت (الصلد) . وعلى سبيل المثال ، يمكن مقارنة الجمالون المبين فى الشكل (٩—٥٢) ،



الشكل ٩ — ٥٢

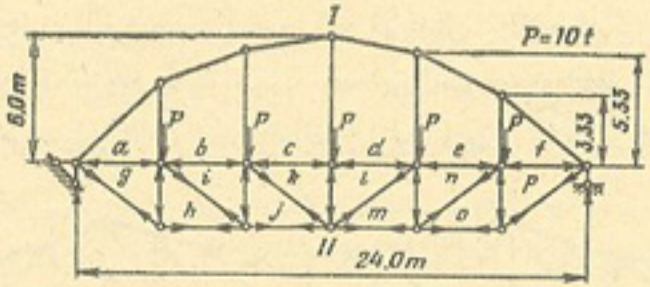
مع العتبة المصمتة المتواصلة ، ذات المقطع الثابت أو المتغير ، وتخطيط الرسوم البيانية لعزوم الانحناء وقوى القص ، لهذه العتبة : ثم تحدد الإجهادات فى أوتار الجمالون ، بتقسيم الإحداثيات الرأسية للرسم البيانى لعزوم الانحناء ، على أذرع هذه الإجهادات المناظرة ، حول نقاط العزوم : ويمكن بطريقة مماثلة ، اختيار الإجهادات الناشئة فى قضبان شبيكة الجمالون ، من الرسوم البيانية لقوى القص ، للعتبة المتواصلة :

ويمكن استخدام هذه الطريقة أيضاً ، عند حساب العقود الجمالونية غير

المحددة استاتيكيا ، باستبدالها – عند الحساب – بعقود مصمتة المقطع .

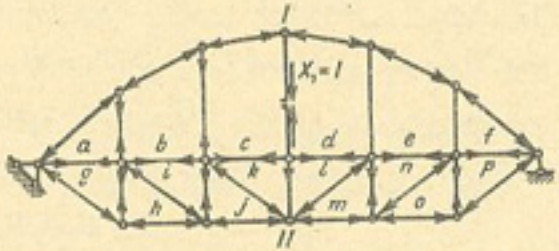
إن مراجعة حساب الجمالونات غير المحددة استاتيكيا ، تتم مثل مراجعة حساب الإنشاءات الإطارية (الأطر) . وعند المراجعة ، يجب التأكد من وجود وصلات الجمالون ، أو قطعه المنفردة ، فى حالة توازن ، أى يجب القيام بما يسمى بالمراجعة الاستاتيكية . وبالإضافة إلى ذلك ، يجب التأكد من عدم انفصام تشوهات (انحرافات) الإنشاء ، أى يجب أن نثبت بأن الانحرافات المعروف عنها مسبقاً ، بأنها تساوى صفراً ، تكون عند الحساب أيضاً ، مساوية للصفر (مراجعة التشوهات) .

مثال : يطلب تحديد الإجهادات الناشئة فى قضبان الجمالون غير المحدد استاتيكيا من الدرجة الأولى ، المبين فى الشكل (٩ – ٥٣) ، المعرض لتأثير خمسة أحمال (قوى) قدرها : $P = 10\ t$. هذا مع العلم بأن مساحات المقاطع العرضية ، لجميع قضبان الجمالون ، متساوية .



الشكل ٩ – ٥٣

الحل : نعتبر القوة المجهولة الزائدة ، هى الإجهاد X_1 ، الناشىء فى القضيب الرأسى المتوسط . والإنشاء الرئيسى ، المعرض لتأثير وحدات القوى أو الإجهاد $X_1 = 1$ ، مبين فى الشكل (٩ – ٥٤) .



الشكل ٩ – ٥٤

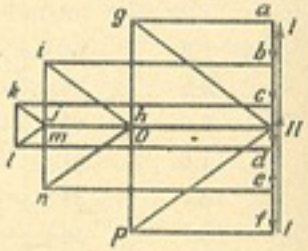
نضع المعادلة القانونية التالية :

$$X_1\ \delta_{11} + \Delta_{1P} = 0$$

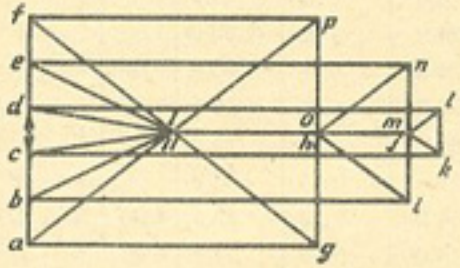
ومنها ينتج أن :

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}$$

ولتحديد الانحرافين δ_{11} و Δ_{1P} ، نخطط رسمين بيانيين للإجهادات ، الرسم البيانى الأول للقوى الطولية N_P الناجمة عن تأثير الحمل الخارجى (شكل ٩ – ٥٥) ، والرسم البيانى الثانى للقوى الطولية $\overline{N}_1$ ، الناجمة عن تأثير الإجهادات المجهولة الزائدة $X_1 = 1$ (شكل ٩ – ٥٦) .



الشكل ٩ – ٥٥



الشكل ٩ – ٥٦

وتحدد الانحرافات من الصيغة (22 — 6) :

$$\delta_{11} = \Sigma\ \frac{\overline{N}_1^2\ S}{EF}$$

و

$$\Delta_{1P} = \Sigma\ \frac{\overline{N}_1\ N_P\ S}{EF}$$

حيث S – طول كل قضيب من القضبان .

وحساب قيم الانحرافين δ_{11} و Δ_{1P} ، موضح فى الجدول (٩ – ٤) .

وإذا جمعنا معطيات العمودين 5 و 6 من الجدول المذكور ، سوف نحصل على ما يلى :

$$EF\ \delta_{11} = 2404.12$$
$$EF\ \Delta_{1P} = -15696.0$$

جدول ٩ – ٤

1	2	3	4	5	6	7	8
رقم القضيب	الطول S (m)	الإجهادات N_p (t)	الإجهادات $\bar{N}_1$ (t)	$\bar{N}_1^2 S$	$N_p \bar{N}_1 S$	$\bar{N}_1 X_1$ (t)	إجهادات التصميم $N = N_p + \bar{N}_1 X_1$ (t)
$I - a$	5.207	0	— 3.9	34.2	0	— 25.4	— 25.4
$I - b$	4.47	0	— 3.35	50.1	0	— 21.9	— 21.9
$I - c$	4.055	0	— 3.05	37.7	0	— 19.9	— 19.9
$I - d$	4.055	0	— 3.05	37.7	0	— 19.9	— 19.9
$I - e$	4.47	0	— 3.35	50.1	0	— 21.9	— 21.9
$I - f$	5.207	0	— 3.9	34.2	0	— 25.4	— 25.4
$a - g$	4.00	— 33.3	6.33	160.3	— 844	41.3	8.0
$b - i$	4.00	— 53.5	8.33	278.0	— 1782	54.4	0.9
$c - k$	4.00	— 60.0	9.00	324.0	— 2160	58.8	— 1.2
$d - l$	4.00	— 60.0	9.00	324.0	— 2160	58.8	— 1.2
$e - n$	4.00	— 53.5	8.33	278.0	— 2782	54.4	0.9
$f - p$	4.00	— 33.3	6.33	160.3	— 844	41.3	8.0
$h - II$	4.00	33.3	— 3.33	44.4	— 444	— 21.7	11.6
$j - II$	4.00	53.5	— 5.33	114.0	— 1140	— 34.8	18.7
$m - II$	4.00	53.5	— 5.33	114.0	— 1140	— 34.8	18.7
$o - II$	4.00	33.3	— 3.33	44.4	— 444	— 21.7	11.6
$g - II$	5.00	41.5	— 4.15	86.0	— 861	— 27.1	14.4
$i - h$	5.00	25.0	— 2.5	31.2	— 312.5	— 16.3	8.7
$k - j$	5.00	8.3	— 0.83	3.5	— 34.5	— 5.4	2.9
$l - m$	5.00	8.3	— 0.83	3.5	— 34.5	— 5.4	2.9
$n - o$	5.00	25.0	— 2.5	31.2	— 312.5	— 16.3	8.7
$p - II$	5.00	41.5	— 4.15	86.0	— 861	— 27.1	14.4
$g - h$	3.00	— 25.0	2.5	18.8	— 187.5	16.3	— 8.7
$j - i$	3.00	— 15.00	1.5	6.7	— 67.5	9.8	— 5.2
$k - l$	3.00	— 10.0	1.0	3.0	— 30.0	6.5	— 3.5
$m - n$	3.00	— 15.0	1.5	6.7	— 67.5	9.8	— 5.2
$o - p$	3.00	— 25.0	2.5	18.8	— 187.5	16.3	— 8.7
$a - b$	3.33	0	1.0	3.33	0	6.5	6.5
$b - c$	5.33	0	1.0	5.33	0	6.5	6.5
$c - d$	6.00	0	1.0	6.00	0	6.5	6.5
$d - e$	5.33	0	1.0	5.33	0	6.5	6.5
$e - f$	3.33	0	1.0	3.33	0	6.5	6.5
Σ	—	—	—	2404.12	— 15696.0	—	—

ومنها ينتج أن :

$$X_1 = + \frac{15696.0}{2404.12} = 6.53 \text{ t}$$

والإجهادات الناشئة فى جميع القضبان ، نتيجة لتأثير القوة المجهولة الزائدة $X_1 = 6.53$ t ، تحدد من الصيغة التالية :

$$N_i = X_1 \bar{N}_1$$

نضع قيم N_i فى العمود 7 من الجدول (٩ – ٤) . وبجمع الإجهادات الناجمة عن تأثير القوة المجهولة الزائدة $X_1 = 6.53$ t ، مع الإجهاد الناجم عن تأثير الحمل الخارجى [أى بجمع معطيات العمودين 7 و 3 من الجدول (٩ – ٤)]، نحصل على قيم الإجهادات الكلية الناشئة فى قضبان الجمالون المعلوم . وهذه القيم مدرجة فى العمود 8 من الجدول (٩ – ٤) .

وعند تحديد الإجهادات الحرارية فى قضبان الجمالون غير المحدد استاتيكيا من الدرجة الأولى ، الذى نبحثه هنا ، وهى الإجهادات الناجمة عن تغير درجة الحرارة ، يكون شكل المعادلة القانونية كما يلى :

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1t} = 0$$

وهنا يكون :

$$\Delta_{1t} = \alpha \Sigma \bar{N}_1 t S$$

حيث α – معامل التمدد الطولى ،

t – الفرق بين درجتى الحرارة الابتدائية والنهائية للقضيب .

والآن نأتى إلى حساب نفس الجمالون المذكور ، فى الحالة التى يختلف فيها طول أحد القضبان الضرورية بالفرض ، وهو القضيب الرأسى mn بالذات ، عن الطول المطلوب ، بمقدار صغير يساوى a ، وهو المقدار الذى يعادل تمدد (أو تقلص) القضيب بمقدار $a = \alpha t S$ ، الناجم عن تغير أو اختلاف درجة حرارته بمقدار t درجة مئوية ، فى الوقت الذى يكون فيه ذلك المقدار ، مساوياً للصفر بالنسبة لبقية قضبان الجمالون ، أى $\alpha t S = 0$.

وتأخذ المعادلة القانونية هنا ، الشكل التالى :

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1t} = 0$$

$$\Delta_{1t} = \alpha \bar{N}_1 t S = \bar{N}_1 a$$

حيث $\bar{N}_1$ – الإجهاد الناشىء فى القضيب $m\,n$ ، نتيجة لتأثير القوى $X_1 = 1$.

وتتم بنفس الطريقة ، مراجعة حساب الجمالونات ، التى درجة عدم تحديدها الاستاتيكى اعلى من ذلك . ويمكن عند حساب الجمالون ، كما هى الحالة عند حساب الأطر ، استخدام طريقة الإجهادات المجهولة الجماعية ، وتحليل الأحمال غير المتماثلة ، إلى أحمال متماثلة وعكسية التماثل .

ويحتوى البند (٧ — ٩) على مثال لرسم خطوط التأثير ، للجمالون غير المحدد إستاتيكياً من الدرجة الأولى .

البند ٩ — ٩ : حساب الإنشاءات غير المحددة استاتيكيا ، بواسطة الإنشاءات الرئيسية غير المحددة استاتيكيا

عند حساب أى إنشاء غير محدد استاتيكيا (حتى إذا كانت درجة عدم تحديده الاستاتيكى عالية) ، يمكن تجنب الحل الآنى للمعادلات ، إذا اتخذنا بمثابة الإنشاء الرئيسى ، إنشاءاً تقل درجة عدم تحديده الإستاتيكى عما هى عليه فى الإنشاء المعلوم ، بدرجة واحدة فقط .

وعندما نبحث الإنشاء غير المحدد استاتيكيا من الدرجة n مثلا ، ونتخذ الإنشاء غير المحدد استاتيكياً من الدرجة $n - 1$ بمثابة إنشاء رئيسى ، سيكون عدد الأربطة الزائدة ، كافياً لتحديد الإجهاد الناشئ فى القضيب المرفوع رقم n . وسوف نضع فى هذه الحالة ، معادلة واحدة فقط :

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1P} = 0$$

ويتلخص مغزى هذه المعادلة ، فى عدم اعتبار أى وجود للانحرافات فى اتجاه القوة المجهولة الزائدة X_1 ، فى الإنشاء الرئيسى غير المحدد استاتيكياً من الدرجة $n - 1$.

وهنا δ_{11} و Δ_{1P} — تمثلان الانحرافات فى اتجاه القوة أو الإجهاد X_1 ، فى الإنشاء الرئيسى غير المحدد استاتيكياً من الدرجة $n - 1$ ، الناجمة عن تأثير القوة $X_1 = 1$ والحمل الخارجى المعلوم ، على التوالى .

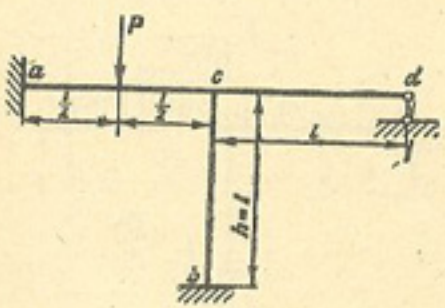
وإذا اعتبرنا الإنشاء الرئيسى ، على سبيل المثال ، هو الإنشاء الناتج عن

الإنشاء المعلوم ، بعد حذف رباطين منه ، عندئذ سيكون شكل المعادلات القانونية ، كما يلى :

$$X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + \Delta_{1P} = 0$$
$$X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + \Delta_{2P} = 0$$

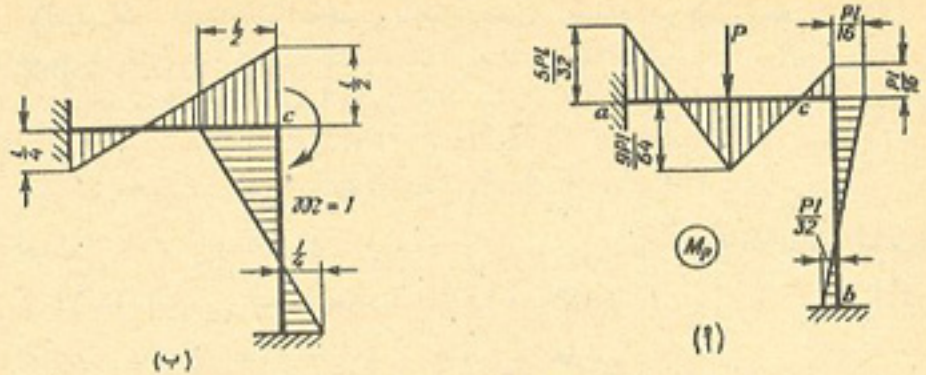
حيث δ_{11} ، δ_{12} ، δ_{21} ، δ_{22} ، Δ_{1P} ، Δ_{2P} — تمثل الانحرافات الناجمة فى الإنشاء الرئيسى غير المحدد استاتيكياً من الدرجة $n - 2$ ، نتيجة لتأثير القوتين $X_1 = 1$ ، $X_2 = 1$ ، والحمل الخارجى .

ولحساب الانحرافات δ ، Δ الناجمة فى الإنشاء الرئيسى غير المحدد استاتيكياً ، يجب الحصول على الرسوم البيانية للإجهادات الداخلية (لعزوم الانحناء عند حساب الأطر المستوية ، أو للقوى الطولية عند حساب الجمالونات) ، نتيجة لتعرضه لوحدات القوى المجهولة وللحمل الخارجى المعلوم . وإذا كانت هذه الرسوم البيانية جاهزة سلفاً ، أو يمكن تخطيطها بسهولة (مثلا ، بواسطة الصيغ الموجودة فى مراجع خاصة) ، عندئذ يمكن باستخدام الإنشاء الرئيسى غير المحدد استاتيكياً ، تقليص حجم العمليات الحسابية إلى حد كبير ، عند حساب الإنشاء الأصلى المعلوم . وبخلاف ذلك ، لا يمكن أن يؤدى استخدام الإنشاء الرئيسى المذكور إلى تقليص حجم العمليات الحسابية ، بل يؤدى فى كثير من الحالات ، إلى تعقيد تلك العمليات الحسابية .

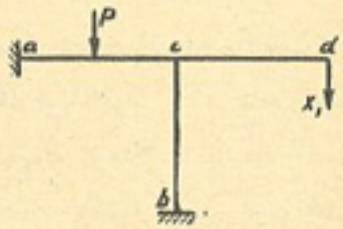


الشكل ٩ — ٥٧

مثال : يطلب تخطيط الرسم البيانى لعزوم الانحناء ، للإطار غير المحدد استاتيكيا من الدرجة الرابعة ، المبين فى الشكل (٩—٥٧) ، على أن نستخدم فى ذلك ، الرسوم البيانية الجاهزة لعزوم الانحناء ، للإطار الذى على هيئة — Γ ، الناجمة عن تعرضه لتأثير الحمل P (شكل ٩ — ٥٨ ، أ) ، ولوحدة العزم $m = 1$ ، المؤثرة فى الوصلة c (شكل ٩ — ٥٨ ، ب) . هذا مع العلم بأن جسورات المقاطع العرضية ، لكافة قضبان الإطار ، متساوية جميعاً .



الشكل ٩ – ٥٨

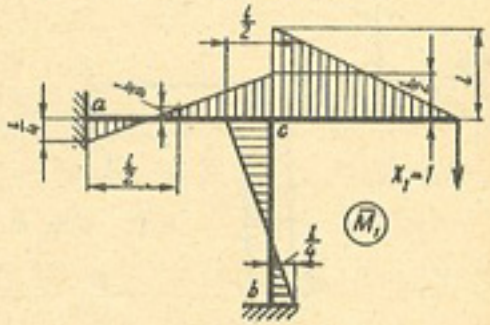


الشكل ٩ – ٥٩

الحل : نعتبر الإنشاء الرئيسى هنا ، هو الإنشاء غير المحدد استاتيكيا من الدرجة الثالثة ، المبين فى الشكل (٩ – ٥٩) . وهذا الإنشاء ناتج عن الإنشاء المعلوم ، بعد حذف رباط واحد فقط (القضيب الساند d) . أن المعادلة القانونية ، التى لا تأخذ فى الاعتبار وجود الانحراف الرأسى للنقطة d من الإطار ، تكون على الشكل التالى :

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1p} = 0$$

ولحساب الانحراف δ_{11} ، نخطط الرسم البيانى لعزوم الانحناء ، الناجمة فى الانشاء الرئيسى ، نتيجة لتأثير القوة $X_1 = 1$. أن قسم الإطار $c\,d$ ، محدد استاتيكيا ، والرسم البيانى لعزوم الانحناء الناجمة فيه نتيجة لتأثير القوة $X_1 = 1$ ، يكون على شكل مثلث ، تقع قمة إحداثيه الرأسى الأكبر فى النقطة c ، وقيمته تساوى l . إذن تكون الوصلة c ، للإطار $a\,c\,b$ ، الذى على هيئة – Г ، معرضة لتأثير حمل مركز عزم يساوى $m = l$. ولذلك ، نحصل على الرسم البيانى لعزوم الانحناء ، لقسم الإطار الذى على هيئة – Г ، بضرب جميع الإحداثيات الرأسية للرسم البيانى الموضح فى الشكل (٩ – ٥٨ ، ب) ، فى قيمة l . والرسم البيانى الذى نحصل عليه بهذه الطريقة ، مبين فى الشكل (٩ – ٦٠) .

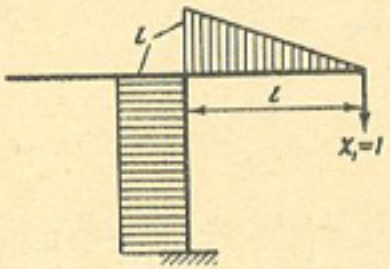


الشكل ٩ – ٦٠

وبضرب الرسم البيانى للعزوم $\overline{M}_1$ فى نفسه ، نحصل على الانحراف δ_{11} :

$$\delta_{11} = \frac{l}{3}\left[\left(\frac{l}{4}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 - \frac{l}{4} \times \frac{l}{2} + \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{4}\right)^2 - \frac{l}{2} \times \frac{l}{4} + l^2\right] \frac{1}{EJ} = \frac{11\,l^3}{24EJ}$$

ويمكن الحصول على نفس النتيجة ، بضرب الرسم البيانى للعزوم $\overline{M}_1$ (شكل ٩ – ٦٠) فى الرسم البيانى الموضح فى الشكل (٩ – ٦١) ، وهو الرسم البيانى للعزوم الناجمة من تأثير القوة



الشكل ٩ – ٦١

$X_1 = 1$ ، المخطط للإنشاء المحدد استاتيكيا :

$$\delta_{11} = \frac{l \times l}{2} \times \frac{2}{3}\,l + \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{4}\right)\frac{l}{2} \times l = \frac{11\,l^3}{24EJ}$$

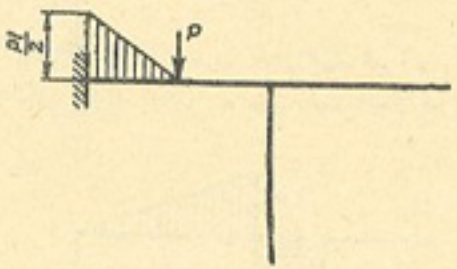
ولحساب الانحراف Δ_{1p} ، يجب ضرب الرسمين البيانيين الموضحين فى الشكلين (٩ – ٥٨ ، أ) و (٩ – ٦٠) :

$$\Delta_{1p} = \left[\frac{l}{12}\left(-2 \times \frac{5Pl}{32} \times \frac{l}{4} - 2 \times \frac{9Pl}{64} \times \frac{l}{8} + \frac{5Pl}{32} \times \frac{l}{8} + \frac{9Pl}{64} \times \frac{l}{4} - 2 \times \frac{9Pl}{64} \times \frac{l}{8} + 2 \times \frac{Pl}{16} \times \frac{l}{2} - \frac{9Pl}{64} \times \frac{l}{2} + \frac{Pl}{16} \times \frac{l}{8}\right) + \frac{l}{6}\left(-2 \times \frac{Pl}{6} \times \frac{l}{2} - 2 \times \frac{Pl}{32} \times \frac{l}{4} + \frac{Pl}{16} \times \frac{l}{4} + \frac{Pl}{32} \times \frac{l}{2}\right)\right] \frac{1}{EJ} = -\frac{Pl^3}{64EJ}$$

أو الرسمين البيانيين الموضحين فى الشكلين ٩ – ٥٨ ، أو ٩ – ٦١

$$\Delta_{1P} = \left(-\frac{Pl}{16} + \frac{Pl}{32}\right) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{EJ} = -\frac{Pl^3}{64EJ}$$

أو بضرب الرسمين البيانيين ، الموضحين فى الشكلين (٩ – ٦٠) و(٩ – ٦٢) . (راجع البند ٧ – ٧) :



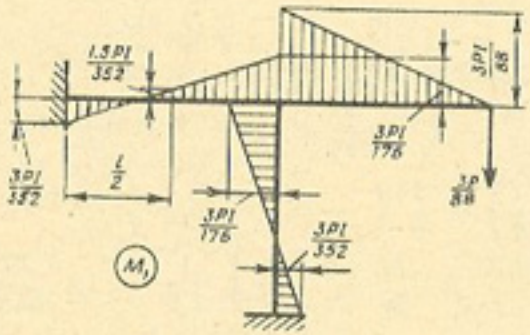
الشكل ٩ – ٦٢

$$\Delta_{1P} = \frac{Pl}{2} \times \frac{l}{2} \times \frac{1}{2}\left(\frac{l}{8} \times \frac{1}{3} - \frac{l}{4} \times \frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{EJ} = -\frac{Pl^3}{64EJ}$$

وبتعويض قيم الانحرافين δ_{11} و Δ_{1P} فى المعادلة القانونية ، وحل المعادلة ، نحصل على ما يلى :

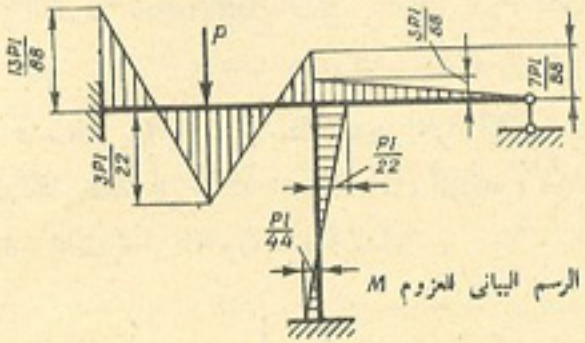
$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{P\,l^3 \times 24\,EJ}{64\,EJ \times 11\,l^3} = \frac{3}{88}P$$

وبضرب كافة الإحداثيات الرأسية للرسم البيانى للعزوم $\overline{M}_1$ (شكل ٩ – ٦٠) فى المقدار $X_1 = \frac{3}{88}P$ (شكل ٩ – ٦٣) ، وجمع النتيجة مع الإحداثيات الرأسية للرسم البيانى



الشكل ٩ – ٦٣

العزوم M_P (شكل ٩ – ٥٨ ، أ) ، نحصل على الرسم البيانى النهائى للعزوم M ، للإنشاء الأصل غير المحدد استاتيكيا ، المبين فى الشكل (٩ – ٦٤) .



الشكل ٩ – ٦٤

البند ٩ – ١٠ : « نماذج » خطوط تأثير الإجهادات للعتبات المتواصلة

إذا اعتبرنا الإنشاء الرئيسى ، عند رسم خطوط التأثير للعتبة المتواصلة ، غير المحددة استاتيكياً من الدرجة n ، ممثلا فى العتبة المحتوية على عدد من الأربطة الزائدة يساوى $n - 1$ ، عندئذ يمكن فى هذه الحالة ، تحديد الإجهاد الناشئ فى الرباط رقم n ، نتيجة لتأثير الحمل $P = 1$ ، من المعادلة القانونية التالية :

$$X_1\,\delta_{11} + \delta_{1P} = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}}$$

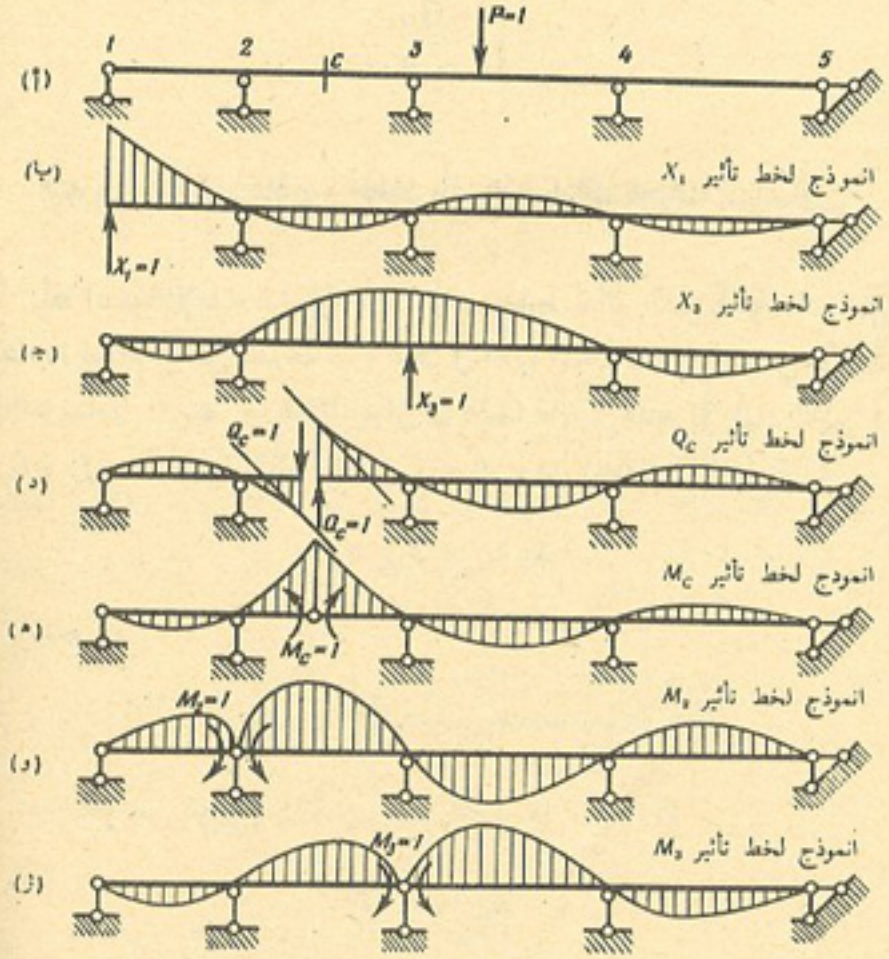
وبالتعويض عن δ_{1P} بالمقدار δ_{P1} ، نحصل على :

$$X_1 = -\frac{\delta_{P1}}{\delta_{11}}$$

حيث δ_{P1} – تمثل إحداثى الرسم البيانى للانحراف ، الناجم فى العتبة غير المحددة

استاتيكياً من الدرجة $n - 1$ ، نتيجة لتعرضها لتأثير القوة $X_1 = 1$. ويكون المعامل δ_{11} ، بمثابة مقياس رسم للانتقال من الرسم البيانى للانحرافات إلى خط التأثير . إن هذه الطريقة لرسم خطوط التأثير ، تسمى كما هو معروف ، بالطريقة الكينماتية .

وبواسطة هذه الطريقة ، يمكن بسهولة دون إجراء أية حسابات ، رسم خط التأثير المطلوب لكل حالة على انفراد ، وذلك لأن « نموذجه » هو دائماً الرسم البيانى للانحرافات δ_{p1} ، الذى يمكن تصوره بسهولة تامة .



الشكل ٩ — ٦٥

ويبين الشكل (٩ — ٦٥) ، بدون أية حسابات ، الإحداثيات الرأسية « لنموذج » خطوط تأثير الإجهادات المختلفة ، للعتبة المتواصلة ذات الأربعة أبواع (شكل ٩ — ٦٥ ، أ) ، التى تمثل الرسوم البيانية للانحرافات الرأسية ، الناجمة عن تأثير وحدات القوى المناظرة ، المؤثرة فى اتجاهات الأربطة المرفوعة (المحذوفة) : وعلى سبيل المثال ، يكون « نموذج » خط تأثير رد فعل المسند الأول X_1 ، هو الرسم البيانى لانحرافات العتبة غير المحددة استاتيكياً من الدرجة الثانية (شكل ٩ — ٦٥ ، ب) الناجمة عن تعرضها للقوة $X_1 = 1$.

والطريقة الكينماتية تساعد بسرعة ودقة كافية ، على تصور « نموذج » خطوط التأثير ، بدون إجراء أية حسابات ، وبالتالى تساعد على تحديد تلك الأقسام من العتبة (فى كل حالة على انفراد) التى يجب تحميلها ، للحصول على القيم القصوى أو الصغرى للإجهاد المبحوث .

الفصل العاشر

طرق الانحرافات المختلطة والموحدة

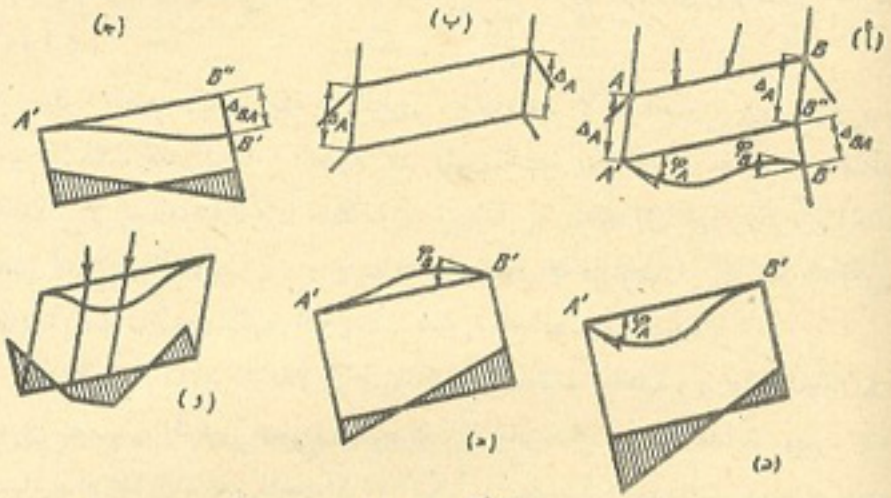
البند ١٠ — ١ : اختيار المجاهيل فى طريقة الانحرافات

عند حساب الإنشاء غير المحدد استاتيكياً ، بطريقة القوى ، تعتبر القوى المجهولة (المجاهيل) الزائدة ، هى الإجهادات الناشئة فى الأربطة الزائدة . (القوى والعزوم) . وبعد تحديد المجاهيل الزائدة ، يمكن بسهولة تحديد الإجهادات الداخلية (M ، N ، Q) فى المقطع الاختيارى ، وتحديد الانحرافات (الانحرافات وزوايا الدوران) فى أية نقطة من نقاط الإنشاء . إذن عند إجراء الحساب بطريقة القوى ، نوجد أولا الإجهادات ، وبعدها نوجد الانحرافات .

ويمكن حل المسألة بطريقة أخرى : أولا نوجد الانحرافات بأية طريقة كانت ثم نحدد توزيع الإجهادات المناظر لتلك الإنحرافات . وبهذه الطريقة بالذات ، نتصرف عند حساب الإنشاءات غير المحددة استاتيكياً ، بطريقة الانحرافات ، التى سنبحثها فى هذا الفصل:

وباعتبار الانحرافات المرنة ، بمثابة القوى أو الإجهادات الزائدة ، نهمل تأثير القوى الطولية وقوى القص ، على تشوهات القضبان ، ونأخذ فى الاعتبار انفعالات الانحناء (bending strains) فقط . وهذا الافتراض ليس جديداً ، وذلك لأنه عند حساب الأطر بطريقة القوى ، يهمل عادة تأثير القوى الطولية وقوى القص ، عند تحديد انحرافات الإنشاء : وبالإضافة إلى ذلك ، لا يفرق بين الطول الابتدائى للقضيب المستقيم ، وبين طول « الوتر » الذى يشد خطه المرن. وبعبارة أخرى ، لا يؤخذ فى الاعتبار تقارب طرفى مثل هذا القضيب ، فى حالة انحنائه .

ونحدد الآن ، انحرافات القضيب ، التى يجب معرفتها بصورة كافية ، لكى نتمكن من تحديد الإجهادات الداخلية فى أى مقطع من مقاطعه . ولهذا الغرض ، سنبحث القضيب المستقيم AB (شكل ١٠ — ١ ، أ) ، المفصول من أحد الإنشاءات غير المحددة استاتيكياً ، من الدرجة i . عند تعرض الإنشاء بأكمله (وبضمنه القضيب AB) لتأثير حمل معين ، ينحنى القضيب AB ، وينتقل إلى وضع جديد هو $A'B'$ (شكل ١٠ — ١ ، أ) .



الشكل ١٠ — ١

ويمكن الحصول على أى وضع $A'B'$ من أوضاع القضيب ، من الوضع الابتدائى ، نتيجة للانحرافات المستقلة التالية :

١ — الانحراف الانتقالى لكافة نقاط القضيب ، بنفس المقدار Δ_A (شكل ١٠ — ١ ، ب) ، وفى هذه الحالة يبقى محور القضيب مستقيما ، وتكون عزوم الانحناء وقوى القص الناجمة فى جميع مقاطعه العرضية ، مساوية للصفر :

٢ — انحراف أحد طرفى القضيب المثبتين ، فى الاتجاه العمودى على محوره ، مثل انحراف الطرف B ، بمقدار Δ_{BA} . أن شكل الخط المرن والرسم البيانى للعزوم M ، لمثل هذه الحالة ، مبين فى الشكل (١٠ — ١ ، جـ) .

٣ — دوران الطرف A للقضيب ، بزاوية قدرها φ_A . أن شكل الرسم البيانى

للعزوم M والخط المرن ، لمثل هذه الحالة ، مبين فى الشكل (١٠ — ١ ، د) .

٤ — دوران الطرف B للقضيب ، بزاوية قدرها φ_B (شكل ١٠ — ١ ، هـ) .

٥ — انحرافات نقاط محور القضيب ، المثبت من طرفيه ، نتيجة لتأثير الحمل المعلوم (شكل ١٠ — ١ ، و) .

إن شكل الخط المرن للقضيب AB ، الناجم عن الانحراف الانتقالى Δ_A ، وانحراف الطرف B بالنسبة للطرف A بمقدار Δ_{BA} ، ودوران المقاطع الطرفية بمقدار φ_A و φ_B ، وتأثير الحمل المعلوم ، سينطبق مع الخط المرن $A'B'$ (شكل ١٠ — ١ ، أ) .

ولو استطعنا بأية طريقة من الطرق ، إيجاد قيم الانحرافات Δ_{BA} و φ_A و φ_B ، فسيكون ذلك كافياً لتحديد العزوم M وقوى القص Q ، فى أى مقطع من مقاطع القضيب (ان وجود الانحراف الانتقالى Δ_A ، لا يؤدى إلى ظهور عزوم انحناء وقوى قص فى القضيب) . ويجب اعتبار هذه الانحرافات Δ_{BA} و φ_A و φ_B بمثابة الإجهادات أو القوى المجهولة ، عند بحث القضيب بمفرده .

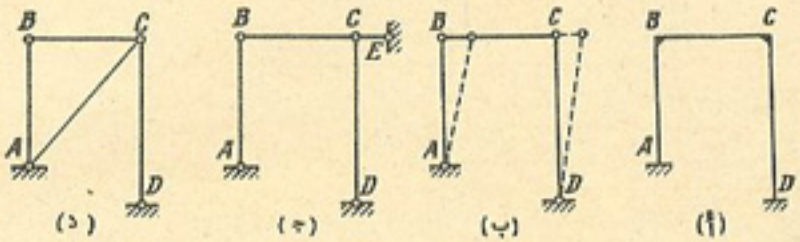
وفى الإنشاءات الإطارية (الإطر) تكون الانحرافات الخطية (وزوايا الدوران) ، لطرفى القضيب المثبتين بجسوءة فى الوصلة ، متساوية فيما بينها . ولهذا السبب ، عند حساب الإنشاءات غير المحددة استاتيكياً ، بطريقة الانحرافات ، تعتبر زوايا دوران الوصلات وانحرافاتها الخطية ، بمثابة القوى أو الإجهادات المجهولة .

البند ١٠ — ٢ : تحديد عدد المجاهيل

عند حساب الإنشاء غير المحدد استاتيكياً بطريقة الانحرافات ، يجب أولا تحديد العدد العام للقيم المجهولة ، المراد إيجادها . وقد أشرنا أعلاه ، إلى أن المجاهيل هنا ، هى زوايا الدوران والانحرافات الخطية لوصلات الإنشاء . إذن سيكون العدد العام للمجاهيل n ، مساوياً لمجموع أعداد زوايا الدوران المجهولة للوصلات n_r ، والانحرافات الخطية المجهولة للوصلات n_d ، أى :

$$n = n_r + n_d$$

ان عدد زوايا الدوران (angles of rotation) المجهولة ، يساوى عدد الوصلات « الجاسئة » . ولهذا السبب يتلخص حساب العدد n_r ، فى الحساب البسيط لعدد الوصلات « الجاسئة » فى الإطار *



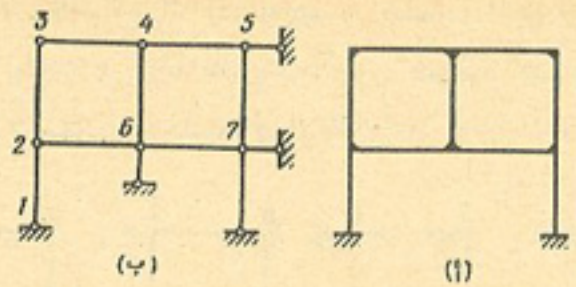
الشكل ١٠ — ٢

إن الوصلة « الجاسئة » هى الوصلة التى يكون فيها طرفا قضيبين من القضبان الملتقية فيها على الأقل ، مربوطين مع بعضهما ربطاً جاسئاً (مثل الوصلات 1 ، 2 ، 3 ، 4 المبينة فى الشكل ١٠ — ٤ ، أ ، والوصلتين 1 ، 2 ، المبينتين فى الشكل ١٠ — ٤ ، و ، والوصلة 1 ، المبينة فى الشكل ١٠ — ٤ ، ز) .

وإذا كانت القضبان الملتقية فى وصلة من وصلات الإنشاء ، مرتبطة على هيئة عدة مجموعات جاسئة ، متصلة مع بعضها اتصالا مفصلياً ، فإن عدد الوصلات الجاسئة فى مثل هذه الوصلة ، يساوى عدد المجموعات الجاسئة . مثلا ، أن الوصلة 1 ، المبينة فى الشكل (١٠ — ٤ ، ح) ، تحتوى على وصلتين جاسئتين ، والوصلة 1 ، المبينة فى الشكل (١٠ — ٤ ، ط) تحتوى على ثلاث وصلات جاسئة .

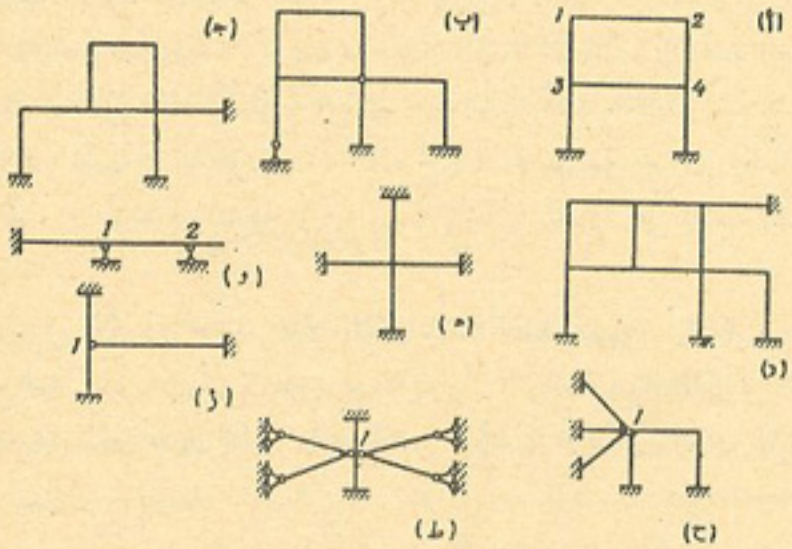
وننتقل الآن إلى تحديد عدد الانحرافات الخطية المجهولة . لقد قررنا أعلاه (راجع البند ١٠—١) ، أن لا نأخذ فى الاعتبار ، تشوهات (إنحرافات) الاطر ، الناجمة عن تأثير القوى الطولية وقوى القص ، وأن لا نفرق بين الطول الابتدائى

* عند حساب عدد الوصلات الجاسئة ، لا تدخل فى الحساب الوصلات التى تكون انحرافاتها الزاوية معلومة ، مثل الوصلات الجاسئة التى تربط الإنشاء (الإطار) مع الأساس الأرضى .



الشكل ١٠ – ٣

(الأصلى) للقضيب المستقيم ، وبين طول « الوتر » الذى يشد خطه المرن ، أى قررنا اعتبار المسافة الأصلية بين طرفى كل قضيب مستقيم ، ثابتة المقدار بعد تمدد (تشوه) القضيب أيضاً . وهذا الأمر يساعدنا ، عند تحديد عدد الانحرافات الخطية المجهولة ، على إستبدال مخطط الإنشاء غير المحدد استاتيكياً المعلوم ، بمخططه المحتوى على مفصلات ، بوضع مفصلات كاملة فى جميع الوصلات والمساند . إن انحرافات جميع وصلات مثل هذا الإنشاء ، لا تعتبر مستقلة ،



الشكل ١٠ – ٤

وذلك لأن انحراف إحدى هذه الوصلات ، قد يؤدى إلى انحراف وصلات أخرى : ويجب أن تعزل أو تميز الانحرافات المستقلة ، من بين الانحرافات المذكورة .

إن عدد الانحرافات الخطية المستقلة لوصلات الإنشاء ، يساوى عدد القضبان التى يجب إضافتها إلى المخطط المفصلى للإنشاء ، لتحويله إلى إنشاء مستقر هندسيا . إذن عدد الانحرافات الخطية المستقلة للوصلات ، يساوى درجة عدم استقرار الإنشاء ، الناجم عن الإنشاء المعلوم ، بعد أن تضاف إلى جميع وصلاته « الجاسئة » (بما فيها وصلات المساند أيضاً) ، مفصلات كاملة .

وعلى سبيل المثال ، سنبحث الإطار المبين فى الشكل (١٠ – ٢ ، أ) . إن عدد الوصلات الجاسئة فى هذا الإطار ، يساوى ٢ أى $n_r = 2$. ولتحديد عدد الانحرافات الخطية المجهولة ، ننتقل إلى المخطط المفصلى للإنشاء (شكل ١٠ – ٢ ، ب) ، الذى يمثل الإنشاء غير المستقر هندسيا ، ولتحويله إلى إنشاء مستقر هندسيا ، يكفى وضع قضيب واحد ، مثل القضيب السائد CE (شكل ١٠ – ٢ ، ج) ، أو القضيب القطرى AC (شكل ١٠ – ٢ ، د) . ويبين الخط المنقط المرسوم فى الشكل (١٠ – ٢ ، ب) ، الانحرافات المحتملة لأضلاع المستطيل المفصلى ، الذى يتضح من بحثه ، بأن المفصلتين (الوصلتين) B و C ، لا يمكن أن تنحرفا بصورة مستقلة عن بعضهما البعض . وهكذا يكون عدد الانحرافات الخطية المستقلة فى هذه الحالة ، مساوياً للواحد ، أى $n_d = 1$. ان العدد العام للانحرافات المجهولة يساوى ما يلى :

$$n = n_r + r_d = 2 + 1 = 3$$

ولنبحث الآن الإطار المبين فى الشكل (١٠ – ٣ ، أ) . إن عدد وصلاته الجاسئة يساوى ٦ ، أى $n_r = 6$. والمخطط المفصلى للإطار ، يعتبر غير مستقر هندسياً ، من الدرجة الثالثة ، وذلك لأن تحويله إلى إنشاء مستقر هندسياً ، يتطلب إضافة ثلاثة قضبان ، كما مبين عملياً فى الشكل (١٠ – ٣ ، ب) . وبعد إضافة هذه القضبان ، ستصبح الوصلة رقم 7 ، مثبته فى الأساس الأرضى ، بواسطة قضيبين ، لا يقع محوراهما على استقامة واحدة . إذن ستصبح الوصلة 7 ، مثبتة فى الأساس بصورة مستقرة هندسياً . وتكون الوصلتان 5 و 6 ، مثبتتين بنفس

الطريقة المذكورة . وتثبت الوصلة 4 ، بواسطة القضيبين 6 — 4 و 4 — 5 ، وبنفس الطريقة تثبت الوصلتان 2 و 3 .

وهكذا نجد بأن عدد الانحرافات الخطية المجهولة ، يساوى ٣ ، أى $n_d = 3$: والعدد الكلى للمجاهيل فى الإنشاء المبحوث ، يساوى :

$$n = 6 + 3 = 9$$

وأخيراً نقدم فى الشكل (١٠ — ٤) عدداً من الإنشاءات ، التى يحتوى الجدول (١٠ — ١) على درجة عدم التحديد الاستاتيكى لكل منها ، وعلى العدد الكلى للمجاهيل ، عند الحساب باتباع طريقة الانحرافات .

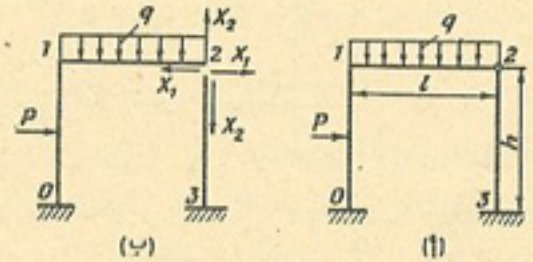
البند ١٠ — ٣ : الإنشاء الرئيسى لطريقة الانحرافات

عند استخدام طريقة الانحرافات فى الحساب ، يقسم الإنشاء إلى عدد من العتبات البسيطة غير المحددة استاتيكيا . ويتم ذلك بإضافة أربطة إضافية إلى الإنشاء .

إن الإنشاء الناجم عن ذلك ، يسمى بالإنشاء الرئيسى لطريقة الانحرافات .

والآن نجرى مقارنة بين الإنشاءات الرئيسية لطريقة الانحرافات وطريقة القوى .

وسنبحث على سبيل المثال ، الإطار المستطيل المبين فى الشكل (١٠ — ٥ ، أ) .



الشكل ١٠ — ٥

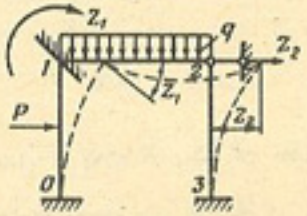
ان هذا الإطار غير محدد استاتيكيا من الدرجة الثانية . وباستحداث مقطع فى المفصلة ، وحذف رباطين نتيجة لذلك ، نحصل على الإنشاء الرئيسى لطريقة القوى ، وهو

جدول ١٠ — ١

الإنشاء	درجة عدم التحديد الإستاتيكى	عدد الانحرافات المجهولة		
		الانحرافات الزاوية	الانحرافات الخطية	العدد الكلى
أ	6	4	2	6
ب	4	4	3	7
جـ	9	5	2	7
د	15	7	2	9
هـ	9	1	0	1
و	2	2	0	2
ز	5	1	0	1
ح	11	3	0	3
ط	9	3	0	3

على هيئة عتبتين (إحداهما مستقيمة والأخرى منكسرة) ، مثبتتين من طرف واحد (شكل ١٠ — ٥ ، ب) . وهذا الإنشاء محدد استاتيكيا . وبعد أن نضيف إلى الإنشاء رباطين ، إضافيين : أحدهما يمنع دوران الوصلة الجاسئة 1 ، والثانى يمنع حدوث الانحرافات الخطية للوصلتين 1 و 2 ، نحصل على الإنشاء الرئيسى لطريقة الانحرافات (شكل ١٠ — ٦) . وهذا الإنشاء غير محدد استاتيكيا من الدرجة الرابعة .

الانشاء الرئيسى



الشكل ١٠ — ٦

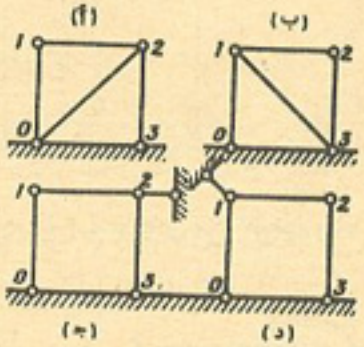
وهكذا نتوصل إلى النتائج التالية :

(أ) نحصل على الإنشاء الرئيسى لطريقة القوى ، بحذف أو رفع الأربطة ، ونحصل على الإنشاء الرئيسى لطريقة الانحرافات ، بإضافة الأربطة .

(ب) إن التحول من الإنشاء الأصلى المعلوم إلى الإنشاء الرئيسى لطريقة القوى يقترن بإنخفاض درجة عدم تحديده الاستاتيكى ، أما التحول من الإنشاء المعلوم إلى الإنشاء الرئيسى لطريقة الانحرافات ، فيقترن بارتفاع درجة عدم التحديد الاستاتيكى .

وهنا تجدر الإشارة ، إلى أن إضافة أربطة مثبتة إلى الإنشاء الرئيسى لطريقة الانحرافات ، تختلف عن وصلة التثبيت العادية المطلقة الجسوءة (الطرف المبيت) ، بأن تلك الأربطة لا تمنع إلا دوران الوصلة فقط ، ولكنها تمنع حدوث الانحرافات الخطية (الحركة الخطية) للوصلة . إن ردود فعل مثل هذه الأربطة ، هى عبارة عن عزوم مؤثرة فى وصلات الإنشاء .

أما فيما يتعلق بالأربطة ، التى تمنع حدوث الانحرافات الخطية ، فإنها يمكن أن تضاف بطرق مختلفة ، وعلى سبيل المثال ، يمكن وضع الضلع القطرى 2 — 0 (شكل ١٠ — ٧ ، أ) أو الضلع القطرى 3 — 1 (شكل ١٠ — ٧ ، ب) ، أو القضيب الساند الأفقى فى الوصلة 2 (شكل ١٠ — ٧ ، جـ) ، أو الضلع الساند المائل فى الوصلة 1 (شكل ١٠ — ٧ ، د) .



الشكل ١٠ — ٧

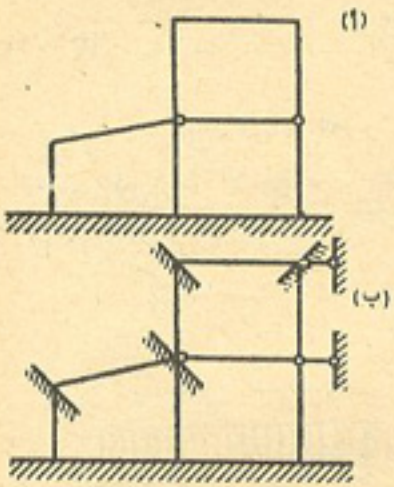
إن الرباط الذى على هيئة الضلع القطرى 3 — 1 (شكل ١٠ — ٧ ، ب) لا يمنع انحراف الوصلة 3 ، التى تكون ثابتة بدونه . وهذا الرباط يمنع فقط انحراف الوصلة 1 ، فى اتجاه المستقيم الذى يربط هذه الوصلة مع الوصلة 3 . وفى هذا الخصوص ، لا يختلف هذا الرباط أبداً ، عن الرباط الذى على هيئة القضيب الساند المبين فى الشكل (١٠ — ٧ ، د) .

وعندما تضاف إلى الإنشاء أربطة إضافية تمنع الانحرافات الخطية للوصلات ، يجب إعطاء الأفضلية للأربطة التى تثبت الوصلات فى الأساس ، وليس للأربطة التى تثبت الوصلات مع بعضها البعض ، أى للأربطة الساندة ، وليس للقضبان الثانوية للإنشاء . وعندما يحتوى الإطار على قضبان أفقية ورأسية (عمودية) ، ينصح

بإضافة قضبان ساندة أفقية ورأسية (وليس مائلة) ، لأن ذلك يبسط حساب الإنشاء .

وللحصول على الإنشاء الرئيسى لطريقة الانحرافات يجب أولا إضافة أو استحداث أطراف مبيتة (مثبتة) فى جميع الوصلات الجاسئة للانشاء الأصلى المعلوم ، وهذه الأطراف المبيتة تمنع دوران الوصلات ، وثانياً يجب أن تضاف إلى الإنشاء الأصلى المعلوم ، قضبان تمنع الانحرافات الخطية للوصلات .

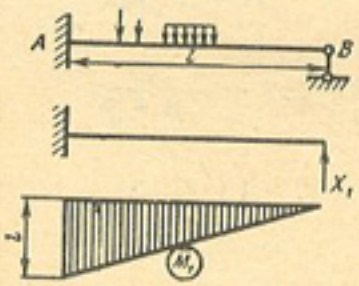
وكمثال ثان لاختيار الإنشاء الرئيسى لطريقة الانحرافات ، سنبحث الإطار المبين فى الشكل (١٠ — ٨ ، أ) ان هذا الإطار غير محدد استاتيكيا من الدرجة السادسة . وأن عدد المجاهيل الموجودة عند حساب الأطار بطريقة الانحرافات ، يساوى ستة أيضاً : أربعة إنحرافات زاوية ، وانحرافان خطيان ، وبإضافة (استحداث) أربعة أطراف مبيتة وقضيبين ، نحصل على الإنشاء الرئيسى ، المبين فى الشكل (١٠ — ٨ ، ب)



الشكل ١٠ — ٨

ونأتى الآن إلى الدراسة التفصيلية ، للقضبان التى يتألف منها الإنشاء الرئيسى لطريقة الانحرافات ، أى إلى دراسة العتبة البسيطة غير المحددة استاتيكيا .

سنبحث أولا استخدام طريقة القوى لتخطيط الرسوم البيانية لعزوم الانحناء ، الناشئة فى العتبة الثابتة الجسوءة ، ذى الطرف الواحد المثبت تماماً ، والطرف الثانى المفصلى التثبيت (شكل ١٠ — ٩ ، أ) ، وذلك بالنسبة لعدد من الحالات الخاصة لتأثير الحمل الخارجى على العتبة . وهنا سنصطلح على اعتبار أن القوى الموجبة ، هى



الشكل ١٠ — ٩

ردود الفعل التى على هيئة قوى ، متجهة إلى الأعلى ، والعزوم المفاعلة (reactive moments) ، المؤثرة فى اتجاه عقرب الساعة . وبمثابة الإنشاء الرئيسى لطريقة القوى ، سنأخذ هنا العتبة الكابولية ، المبينة فى الشكل ١٠ — ٩ ، ب (التى أحد طرفيها ثابت تماماً ، والطرف الآخر طليق) . إن القوة المجهولة الزائدة ، ستكون فى هذه الحالة رد فعل المسند المتحرك $X_1 = R_B$.

وعند تأثير أية قوة خارجية m ، يمكن إيجاد قيمة X_1 من المعادلة التالية :

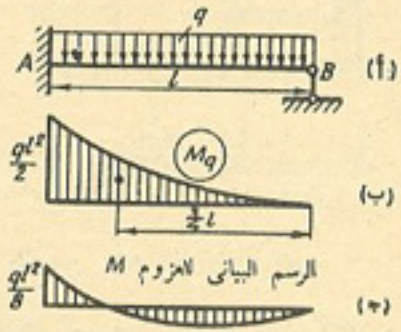
$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1m} = 0 \qquad (10-1)$$

ويضرب الرسم البيانى للعزوم $\overline{M}_1$ (شكل ١٠ — ٩ ، ج) فى نفسه ، نحصل على قيمة الانحراف δ_{11} ، الذى لا يعتمد على القوة الخارجية (الحمل الخارجى) :

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{3EJ}$$

والآن سنبحث حالات مختلفة لتأثير الحمل الخارجى على العتبة المذكورة .

(أ) تعرض العتبة لتأثير حمل موزع بانتظام q (شكل ١٠ — ١٠ ، أ) . نضرب الرسم البيانى للعزوم M_q (شكل ١٠—١٠ ، ب) فى الرسم البيانى للعزوم $\overline{M}_1$ (شكل ١٠ — ١٠ ، ج) نحدد الانحراف Δ_{1q} :



الشكل ١٠ — ١٠

$$\Delta_{1q} = -\frac{1}{EJ} \times \frac{1}{3} \times \frac{ql^2}{2} l \times \frac{3}{4} l = -\frac{ql^4}{8EJ}$$

وبحل المعادلة (1 — 10) نحصل على ما يلى :

$$X_1 = R_B = \frac{3}{8} ql$$

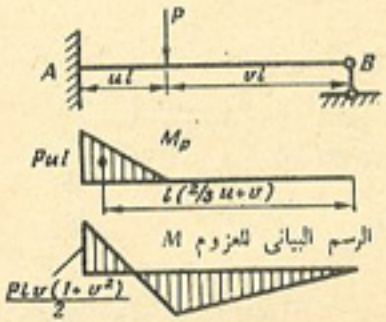
ورد فعل المسند A يساوى ما يلى :

$$R_A = ql - R_B = \frac{5}{8} ql$$

ونحصل على عزم المسند فى الطرف المبين A للعتبة AB ، بجمع العزم الناشىء فى هذا المقطع ، نتيجة لتأثير الحمل الخارجى ، مع العزم الناجم عن تأثير القوة X_1 (شكل ١٠ — ١٠ ، ج) :

$$M_{AB} = -\frac{ql^2}{2} + \frac{3}{8} ql l = -q\frac{l^2}{8}$$

(ب) تعرض العتبة لتأثير الحمل المركز P (شكل ١٠ — ١١) . ونحصل على الانحراف Δ_{1P} ، بضرب الرسم البيانى للعزوم M_P ، فى الرسم البيانى للعزوم $\overline{M}_1$:



الشكل ١٠ — ١١

$$\Delta_{1P} = -\frac{Pu^2 l^2}{2EJ} l \left(\frac{2}{3} u + v \right)$$

وبما أن $ul + vl = l$ ، وبالتالى $v = 1 - u$ ، إذن يكون لدينا :

$$\Delta_{1P} = -\frac{Pu^2 l^3}{6EJ} (3 - u)$$

وبحل المعادلة (1 — 10) ، نحصل على قيمة رد فعل المسند B :

$$X_1 = R_B = \frac{Pu^2}{2} (3 - u)$$

ورد فعل المسند A يساوى ما يلى :

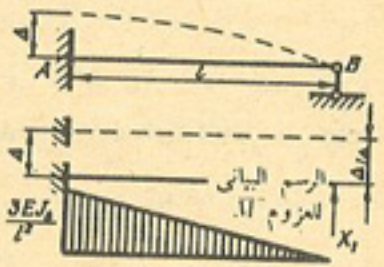
$$R_A = P - R_B = \frac{Pv}{2} (3 - v^2)$$

وعزم المسند يساوى :

$$M_{AB} = -Pul + \frac{Pu^2 l}{2}(3-u) = -\frac{Pl}{2}u(1-v^2)$$

(ج) إنحراف الطرف المبين بمقدار Δ ، فى الاتجاه العمودى على محور القضيب AB (شكل ١٠ — ١٢) .

وسوف لا يكون هناك رسم بيانى لعزوم الانحناء الناجمة فى الإنشاء الرئيسى نتيجة للانحراف ، ولكن الانحراف فى اتجاه القوة X_1 ، سيساوى ما يلى :



الشكل ١٠ — ١٢

$$\Delta_{1\Delta} = \Delta$$

ومن المعادلة (1 — 10) نجد ما يلى :

$$X_1 = -\frac{3EJ}{l^3}\Delta$$

إن ردود فعل المساند وعزم المسند ، ستساوى ما يلى :

$$R_B = X_1 = -\frac{3EJ}{l^3}\Delta$$

$$R_A = -X_1 = \frac{3EJ}{l^3}\Delta$$

$$M_{AB} = -\frac{3EJ}{l^2}\Delta$$

(د) دوران الطرف المبين (النهاية المثبتة) بزاوية قدرها φ (شكل ١٠—١٣) . إن الانحراف فى اتجاه القوة X_1 ، الناجم عن دوران الطرف المبين ، فى الإنشاء الرئيسى ، يساوى ما يلى :

$$\Delta_{1\varphi} = -\varphi l$$

ومن المعادلة (1 — 10) نجد ما يلى :

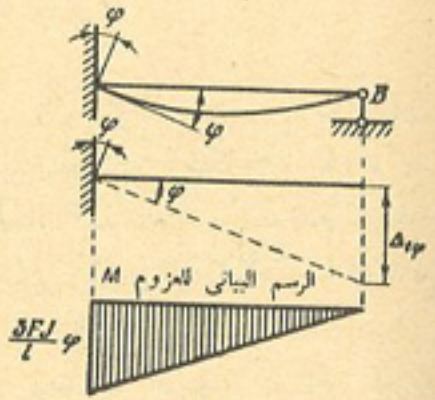
$$X_1 = \frac{3EJ}{l^2}\varphi$$

وردود فعل المساند وعزم المسند ، ستساوى ما يلى :

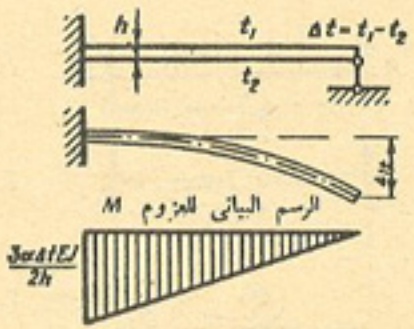
$$R_B = X_1 = \frac{3EJ}{l^2}\varphi$$

$$R_A = -X_1 = -\frac{3EJ}{l^2}\varphi$$

$$M_{AB} = \frac{3EJ}{l}\varphi$$



الشكل ١٠ — ١٣



الشكل ١٠ — ١٤

(هـ) تأثير التسخين غير المنتظم (شكل ١٠ — ١٤) . نرمز إلى الفرق بين درجتى حرارة الألياف العليا والسفلى ، بالرمز التالى :

$$\Delta t = t_1 - t_2$$

إذن سوف يكون الانحراف فى الإنشاء الرئيسى ، باتجاه القوة X_1 ، مساوياً لما يلى :

$$\Delta_{1t} = -\frac{\alpha \Delta t}{h}\Omega_M = -\frac{\alpha \Delta t}{h} \times \frac{l^2}{2}$$

حيث h — ارتفاع المقطع العرضى للعتبة .

وبحل المعادلة (1 — 10) نحصل على ما يلى :

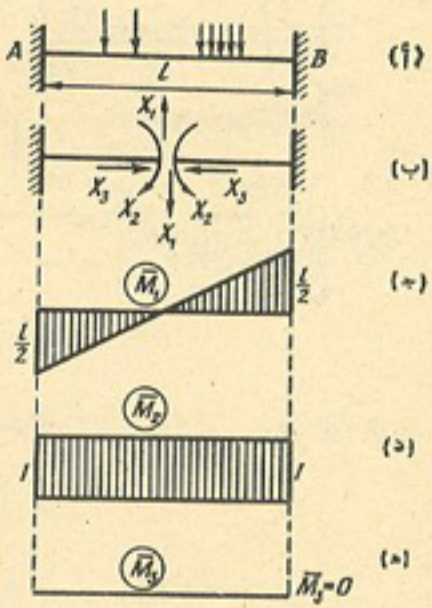
$$X_1 = \frac{3\,\alpha\,\Delta t\,E J}{2\,h\,l}$$

وردود فعل المساند وعزم المسند ، ستساوى ما يلى :

$$R_B = \frac{3\,\alpha\,\Delta t\,E J}{2\,h\,l}$$

$$R_A = -\frac{3\,\alpha\,\Delta t\,E J}{2\,h\,l}$$

$$M_{AB} = \frac{3\,\alpha\,\Delta t\,E J}{2\,h}$$



الشكل ١٠ — ١٥

ولنبحث الآن العتبة ، ذات الطرفين المبيتين أوالمثبتين (شكل ١٠—١٥ ،أ) . ولحساب هذه العتبة ، نستخدم الإنشاء الرئيسى ، الناجم نتيجة لاستحداث مقطع فى وسط العتبة (شكل ١٠— ١٥ ،ب). إن وحدات الرسوم البيانية لعزوم الانحناء، فى هذه الحالة ، مبينة فى الشكل (١٠ — ١٥ ، جـ ، د ، هـ) .

وعند تأثير الحمل الرأسى ، وحدوث الانحرافات الخطية للأطراف المبيتة (فى الاتجاه العمودى على محور العتبة) ، وعند دوران هذه الأطراف أيضا ، نجد بأن القوة الطولية X_3 ستساوى صفراً ، وذلك لأنه فى المعادلة التالية :

$$X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + \Delta_{3m} = 0$$

تكون قيم المعاملين δ_{31} و δ_{32} ووحدة التحميل Δ_{3m} ، مساوية للصفر ، لأن

العزوم $\bar{M}_3$ (شكل ١٠ — ١٥ ، هـ) تساوى صفراً أيضاً .

والآن نوجد القوتين المجهولتين X_1 و X_2 من المعادلتين التاليتين :

$$\left.\begin{aligned} X_1\,\delta_{11} + \Delta_{1m} &= 0 \\ X_2\,\delta_{22} + \Delta_{2m} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (10-2)$$

ومعاملا هاتين المعادلتين ، يساويان ما يلى :

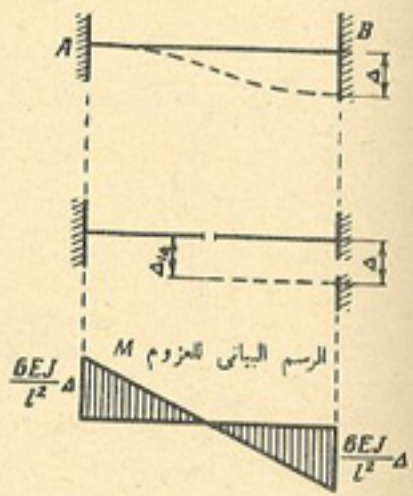
$$\delta_{11} = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{l}{2} \times \frac{l}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{l}{2} \times \frac{l}{E J} = \frac{l}{12\,E J}$$

$$\delta_{22} = 1 \times l \times 1 \times \frac{1}{E J} = \frac{l}{E J}$$

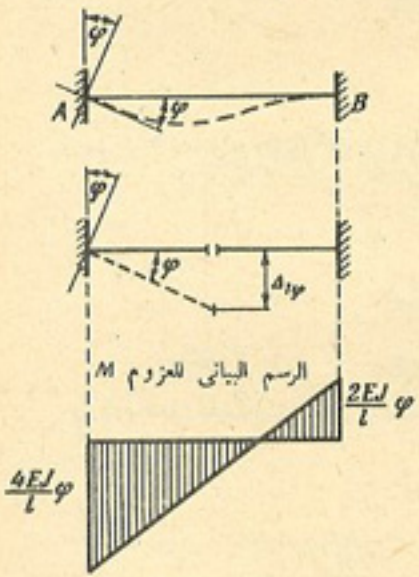
وسوف نبحث فيما يلى التأثيرات التالية على العتبة :

(أ) إنحراف الطرف المبيت (النهاية المثبتة) بمقدار Δ ، فى الاتجاه العمودى على محور القضيب AB (شكل ١٠ — ١٦) . إن الانحرافات الناجمة فى الإنشاء الرئيسى ، باتجاهات القوى المجهولة ، تساوى ما يلى :

$$\Delta_{1\Delta} = \Delta \quad ; \quad \Delta_{2\Delta} = 0$$



الشكل ١٠ — ١٦



الشكل ١٠ — ١٧

وبحل المعادلة (2 — 10) نحصل على ما يلى :

$$X_1 = -\frac{12EJ}{l^3}\Delta \quad ; \quad X_2 = 0$$

وردود فعل المساند وعزوم المساند ، ستساوى ما يلى :

$$R_B = X_1 = -\frac{12EJ}{l^3}\Delta$$

$$R_A = -X_1 = \frac{12EJ}{l^3}\Delta$$

$$M_{AB} = -\frac{6EJ}{l^2}\Delta$$

$$M_{BA} = -\frac{6EJ}{l^2}\Delta$$

(ب) دوران الطرف المبيت A بزاوية قدرها φ (شكل ١٠ — ١٧) . عند دوران الطرف المبيت A بزاوية قدرها φ ، نحصل على الانحرافات التالية ، التى تحدث فى الإنشاء الرئيسى ، باتجاهات القوى المجهولة :

$$\Delta_{1\varphi} = -\frac{l}{2}\varphi$$

$$\Delta_{2\varphi} = \varphi$$

وبحل المعادلة (2—10) نحصل على ما يلى :

$$X_1 = \frac{6EJ}{l^2}\varphi$$

$$X_2 = -\frac{EJ}{l}\varphi$$

وردود فعل المساند وعزوم المساند ، ستساوى ما يلى :

$$R_B = X_1 = \frac{6EJ}{l^2}\varphi$$

$$R_A = -X_1 = -\frac{6EJ}{l^2}\varphi$$

$$M_{AB} = \frac{4EJ}{l}\varphi$$

$$M_{BA} = \frac{2EJ}{l}\varphi$$

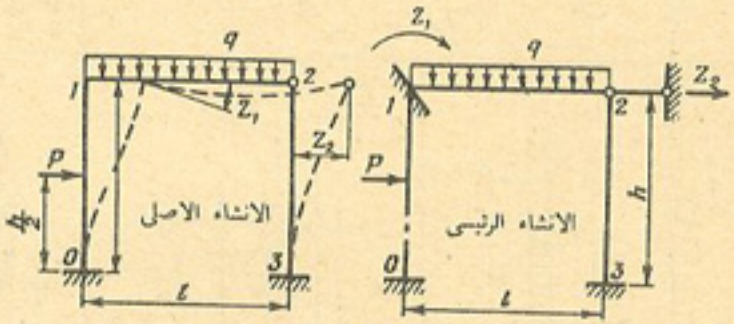
إن نتائج حساب العتبات ، المعرضة لتأثير الأحمال المبحوثة وغيرها من الأحمال الأخرى ، مدرجة فى الجدول (١٠ — ٢) .

وسوف يستخدم هذا الجدول ، فى حساب الأطر ، بطريقة الانحرافات .

وسوف لا نبحث فى هذا البند ، المؤثرات الأخرى ، التى تتعرض لها العتبة ، ذات الطرفين المبيتين (النهايتين المثبتتين) .

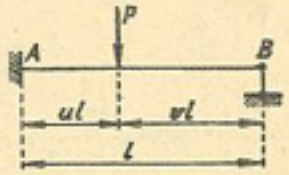
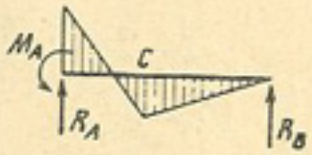
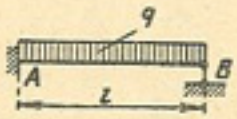
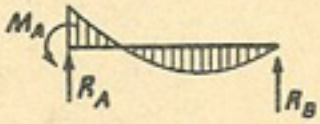
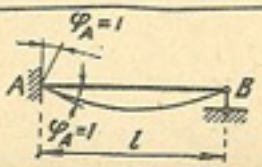
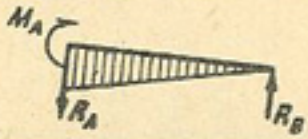
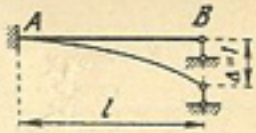
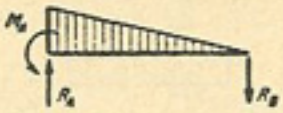
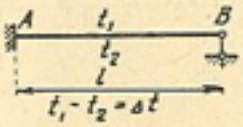
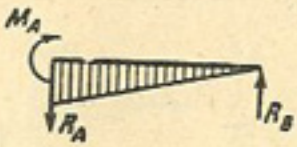
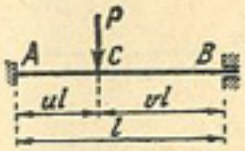
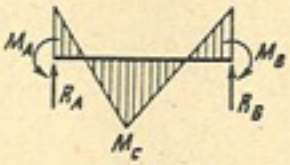
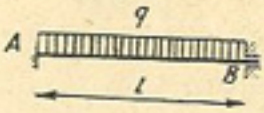
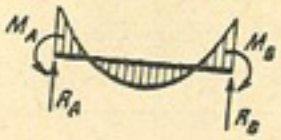
البند ١٠ — ٤ : المعادلات القانونية لطريقة الانحرافات

فى البداية نحدد الأوضاع العامة ، التى يمكن على أساسها ، وضع مجموعة المعادلات اللازمة لتحديد زوايا الدوران المجهولة ، والانحرافات الخطية للوصلات . ولهذا الغرض ، نقارن الإنشاء الأصلى المعلوم ، مع الإنشاء الرئيسى لطريقة القوى (شكل ١٠ — ١٨) .



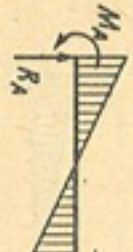
الشكل ١٠ — ١٨

إن الإنشاء الرئيسى يختلف عن الإنشاء الأصلى المعلوم ، بوجود أربطة إضافية ، ونشوء عزوم مفاعلة فى الوصلات المضافة (المستحدثة) ، وردود فعل فى القضبان

التسلسل	الرسم التخطيطي للعتبة والأحمال المؤثرة عليها	الرسوم البيانية لعزوم الانحناء ، وردود الفعل (الإحداثيات الرأسية موضوعة من جهة الألياف المشدودة)	الصيغ الحسابية
١			$M_A = -\frac{Pl}{2} v (1 - v^2)$ $M_C = \frac{Pl}{2} u^2 v (3 - u)$ $R_A = \frac{Pv}{2} (3 - v^2)$ $R_B = Pu^2 \left(1 + \frac{v}{2}\right) = \frac{Pu^2}{2} (3 - u)$
٢			$M_A = -\frac{ql^2}{8}$ $R_A = \frac{5}{8} ql$ $R_B = \frac{3}{8} ql$
٣			$M_A = \frac{3EJ}{l}$ $R_A = -R_B = -\frac{3EJ}{l^2}$
٤			$M_A = -\frac{3EJ}{l^2}$ $R_A = -R_B = \frac{3EJ}{l^3}$
٥	تسخين غير منتظم 		$M_A = \frac{3 E J \alpha \Delta t}{2 h}$ حيث h — ارتفاع المقطع العرضي ؛ α — معامل التمدد الطولي . $R_A = -R_B = -\frac{3 E J \alpha \Delta t}{2 h l}$
٦			$M_A = -uv^2Pl$ $M_B = u^2vPl$ $M_C = 2u^2v^2Pl$ $R_A = v^2(1 + 2u) P$ $R_B = u^2(1 + 2v) P$
٧			$M_A = -M_B = -\frac{ql^2}{12}$ $R_A = R_B = \frac{ql}{2}$

8 9468

تابع جدول ١٠ — ٢

التسلسل	الرسم التخطيطي للبنية والأحمال المؤثرة عليها	الرسوم البيانية لعزوم الانحناء ، وردود الفعل (الإجهادات الرأسية موضوعة من جهة الألياف المشدودة)	الصيغ الحسابية
٨			$M_A = \frac{4EJ}{l}$ $M_B = \frac{2EJ}{l}$ $R_A = -R_B = -\frac{6EJ}{l^2}$
٩			$M_A = M_B = -\frac{6EJ}{l^2}$ $R_A = -R_B = \frac{12EJ}{l^3}$
١٠	تسخين غير منتظم t_1 t_2 $t_1 - t_2 = \Delta t$		$M_A = -M_B = \frac{EJ\alpha\Delta t}{h}$ حيث h — ارتفاع المقطع العرضي ؛ α — معامل التمدد الطولي . $R_A = R_B = 0$

المضافة . ويمكن تحويل قيم العزوم المفاعلة والقوى ، إلى الصفر ، إذا دورنا الأطراف المبينة ، بزوايا مساوية للدوران الفعلي (دوران الوصلات) ، وحرفنا الوصلات ، بحيث تصبح انحرافاتها الخطية مساوية للانحرافات الفعلية أيضاً ، أي للانحرافات الحاصلة في الإنشاء المعلوم . وبعد ذلك نجد بأن انحرافات (تشوهات) الإنشاء الرئيسي والإجهادات الناشئة فيه ، ستكون مساوية للانحرافات والإجهادات التي تحصل في الإنشاء الرئيسي .

إن نفي وجود الإجهادات المفاعلة (القوى أو العزوم) في الأطراف المبينة المستحدثة وفي قضبان الإنشاء الرئيسي ، أي نفي وجود الانحرافات ، يكمن في أساس معادلات طريقة الانحرافات ، مثلما يكمن في أساس معادلات طريقة القوى ، نفي وجود الانحرافات في الإنشاء الرئيسي ، في اتجاهات الإجهادات المجهولة :

ويمكن كتابة هذه المعادلات باختصار ، على الشكل التالي :

$$R_1 = 0,\ R_2 = 0,\ R_3 = 0\ \ldots$$

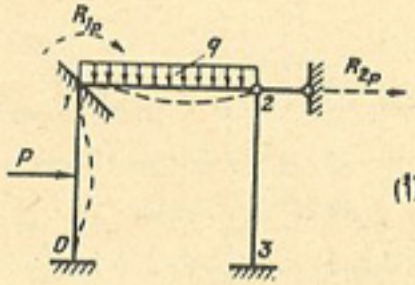
وهنا نجد بأن R_1 ، R_2 ، R_3 ، . . . تمثل العزوم المفاعلة ، في الأطراف المثبتة المستحدثة ، والإجهادات المفاعلة في القضبان المضافة (في الإنشاء الرئيسي) ، الناشئة نتيجة لتأثير الحمل الخارجي ودوران الوصلات وانحرافاتها الخطية . ان الرموز الدليلية الملحقة بردود الفعل ، تناظر الرموز الدليلية للمجاهيل . وعدد المعادلات ، يساوي دائماً عدد الأطراف الثابتة والقضبان المضافة ، بالتالي يساوي أيضاً عدد الانحرافات المجهولة .

إن معادلات طريقة الانحرافات — المعادلات الاستاتيكية ، هي عبارة عن معادلات التوازن . ومعادلات طريقة القوى — المعادلات الكينماتية ، هي عبارة عن معادلات الانحرافات .

والآن نضع بشكل مبسط ، المعادلة الأولى لطريقة الانحرافات ($R_1 = 0$) ، للانشاء الرئيسي المبين في الشكل (١٠ — ١٨) . ولهذا الغرض نستبدل العزم المفاعل R_1 ، بالمقدار التالي :

$$R_1 = R_{1p} + R_{11} + R_{12}$$

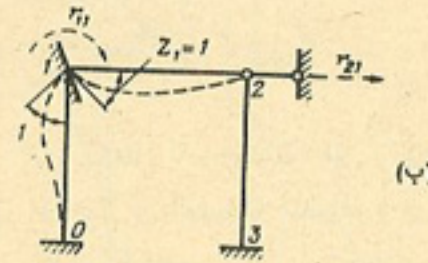
إن الرمز الدليلى الثانى لرد الفعل ، يدل على ذلك التأثير ، الذى يعتبر سبب ظهور رد الفعل . ولذلك : R_{1p} — تمثل العزم المفاعل ، الناجم فى الطرف المبيت المستحدث ، نتيجة لتأثير الحمل (شكل ١٠ — ١٩ ، أ) ،



(أ)

R_{11} — العزم المفاعل الناجم فى الطرف المبيت ، نتيجة لدوران نفس الوصلة بالذات ، بزاوية قدرها z_1 ؛

R_{12} — العزم المفاعل ، الناجم فى الطرف المبيت ، نتيجة لتأثير الانحراف الخطى لوصلتى الإطار 1 و 2 ، بمقدار z_2 .



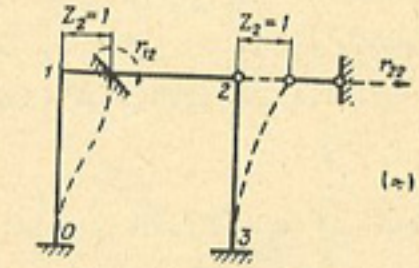
(ب)

إن العزمين المفاعلين R_{11} و R_{12} ، الناجمين عن تأثير z_1 و z_2 ، يمكن أن يستبدلا بالمعادلتين أو الصيغتين التاليتين :

$$R_{11} = z_1 r_{11}$$

و

$$R_{12} = z_2 r_{12}$$



(جـ)

الشكل ١٠ — ١٩

حيث : r_{11} — العزم المفاعل الناجم فى الطرف المبيت ، نتيجة لدوران هذا الطرف بزاوية z_1 ، المساوية للواحد ، أى لزاوية نصف قطرية واحدة (شكل ١٠ — ١٩ ، ب) ؛

r_{12} — العزم المفاعل الناجم فى الطرف المبيت المستحدث ، نتيجة z_2 للانحراف (شكل ١٠ — ١٩ ، جـ) .

وبعد إجراء مثل هذا التبديل (التعويض) ، نحصل على المعادلة الأولى بالشكل التالى :

$$z_1 r_{11} + z_2 r_{12} + R_{1p} = 0$$

وبعد إجراء التحويل المماثل بالنسبة للمعادلة الثانية ($R_2 = 0$) ، يصبح شكلها كما يلى :

$$z_1 r_{21} + z_2 r_{22} + R_{2p} = 0$$

وفى هذه المعادلة يكون :

r_{21} — الإجهاد المفاعل الناجم فى القضيب المضاف ، نتيجة لدوران الطرف المبيت ، بزاوية قدرها $z_1 = 1$ (شكل ١٠ — ١٩ ، ب) ؛

r_{22} — الإجهاد المفاعل الناجم فى القضيب ، نتيجة لتأثير الانحراف الخطى للوصلتين 1 و 2 بمقدار $z_2 = 1$ (شكل ١٠ — ١٩ ، جـ) ؛

R_{2p} — الإجهاد المفاعل الناجم فى القضيب ، نتيجة لتأثير الحمل المعلوم (شكل ١٠ — ١٩ ، أ) .

ويتلخص مغزى المعادلة الأولى فى نفى وجود العزم ، فى الطرف المبيت المستحدث ، ويتلخص مغزى المعادلة الثانية ، فى نفى وجود الإجهاد فى القضيب المضاف . والمعادلتان تشكلان معاً ، مجموعة المعادلات القانونية لطريقة الانحرافات ، فى حالة الانحرافين المجهولين . وبنفس الطريقة تماماً ، توضع مجموعة المعادلات القانونية ، فى حالة الانحرافات المجهولة المختلفة العدد أيضاً .

وعلى سبيل المثال ، عند وجود أربعة انحرافات مجهولة ، يكون شكل مجموعة المعادلات القانونية لطريقة الانحرافات ، كما يلى :

$$\begin{aligned}
z_1 r_{11} + z_2 r_{12} + z_3 r_{13} + z_4 r_{14} + R_{1p} &= 0 \\
z_1 r_{21} + z_2 r_{22} + z_3 r_{23} + z_4 r_{24} + R_{2p} &= 0 \\
z_1 r_{31} + z_2 r_{32} + z_3 r_{33} + z_4 r_{34} + R_{3p} &= 0 \\
z_1 r_{41} + z_2 r_{42} + z_3 r_{43} + z_4 r_{44} + R_{4p} &= 0
\end{aligned} \qquad (10 - 3)$$

إن المعاملات (ردود الفعل) r_{11} ، r_{22} ، . . . . إلخ ، الواقعة على القطر الرئيسى ، تسمى بالمعاملات الرئيسية ، أما المعاملات (ردود الفعل) r_{12} ، r_{21} ، r_{31} ، r_{13} ، . . . . إلخ ، فتسمى بالمعاملات الثانوية ، وتسمى الحدود المطلقة R_{1p} ، R_{2p} ، . . . . إلخ ، بردود فعل التحميل . وفى هذه المعادلات ، كما هى الحالة أيضاً فى معادلات طريقة القوى ، تكون معاملات الانحرافات المجهولة ، الموضوعة بصورة متماثلة بالنسبة للمحور الرئيسى ، متساوية فيما بينها ، أى مرتبطة مع بعضها البعض ، بشرط التبادل $r_{mn} = r_{nm}$ (راجع البند ١٠ — ٦) . وبفضل ذلك ، يمكن حل مجموعة المعادلات القانونية لطريقة الانحرافات ، باستخدام الطريقة المختصرة (راجع البند ٩ — ٦) . وتكون المعاملات الرئيسية ، موجبة دائماً .

إن مجموعة المعادلات القانونية لطريقة الانحرافات ، تختلف عن المجموعة المماثلة لطريقة القوى ، بأنه بدلا من احتوائها على المعاملات δ_{nm} والحدود الخاصة بالأحمال Δ_{np} ، المعبرة عن الانحراف فى الإنشاء الرئيسى ، فإنها تحتوى على المعاملات r_{nm} والحدود الخاصة بالأحمال R_{np} ، المعبرة عن ردود فعل الأطراف المثبتة الإضافية ، فى الإنشاء الرئيسى ، وبدلا من احتوائها على الإجهادات المجهولة X ، فإنها تحتوى على الانحرافات المجهولة Z .

البند ١٠ — ٥ : الطريقة الاستاتيكية لتحديد المعاملات والحدود المطلقة لمجموعة المعادلات القانونية

لتحديد المعاملات والحدود المطلقة لمجموعة المعادلات القانونية لطريقة الانحرافات ، يجب مقدماً تخطيط الرسوم البيانية لعزوم الانحناء ، الناجمة فى الإنشاء الرئيسى ، نتيجة الحمل المعلوم ووحدات الانحرافات المجهولة (فى اتجاهات المثبتات) . ويتم تخطيط هذه الرسوم البيانية ، باستخدام المعطيات المدرجة فى الجدول (١٠ — ٢) . وعلى سبيل المثال ، سنبحث تخطيط الرسوم البيانية للانشاء الرئيسى المبين فى الشكل (١٠ — ١٨ ، ب) .

وتخطط الرسم البيانى للعزوم M_p الناجمة فى الإنشاء الرئيسى نتيجة لتأثير الحمل المعلوم ، بالنسبة للقضيب القائم الأيسر ، كما يخطط فى حالة العتبة ذات الطرفين المبيتين ، عند تعرضها لتأثير القوة (الحمل) المركز (طبقاً لمعطيات السطر رقم 6 من الجدول ١٠ — ٢) ، وتخطط الرسوم البيانية المذكورة ، لعارضة الإطار ، كما تخطط فى حالة العتبة ذات الطرف الأول المبيت والطرف الثانى المفصلى (طبقاً لمعطيات السطر رقم 2 من الجدول المذكور) . إن عزوم المساند ، ستساوى ما يلى :

$$M_{01} = - M_{10} = - Ph \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = - \frac{Ph}{8}$$

وبما يلى :

$$u = v = \frac{1}{2}$$

إذن

$$M_{12} = - \frac{ql^2}{8}$$

والرسوم البيانية للعزوم M_p ، مبينة فى الشكل (١٠ — ٢٠ ، أ) . وتخطط الرسم البيانى للعزوم $\overline{M}_1$ ، الناجمة عن دوران الطرف المبيت 1 بزاوية قدرها $Z_1 = 1$ ، فى اتجاه عقرب الساعة ، فى العارضة 2 — 1 ، طبقاً لمعطيات السطر رقم 3 ، وفى الضلع القائم 1 — 0 ، طبقاً لمعطيات السطر 8 من الجدول (١٠ — ٢) . ويبين الشكل (١٠ — ٢٠ ، ب) الرسم البيانى للعزوم $\overline{M}_1$.

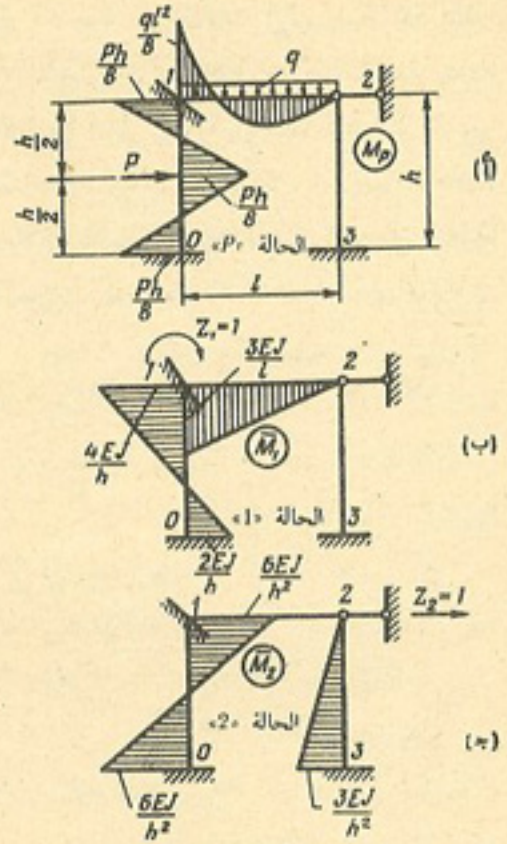
ونقوم بتخطيط الرسم البيانى للعزوم $\overline{M}_2$ ، الناجمة فى الضلعين القائمين ، نتيجة للانحراف الخطى للوصلة 2 بمقدار $Z_2 = 1$ إلى اليمين ، طبقاً للمعطيات الواردة فى السطرين 4 و 9 من الجدول (١٠ — ٢) ولا تنشأ أية عزوم فى القضيب 2 — 1 ، وذلك لأنه عندما ينحرف فى اتجاه Z_2 ، لا يتعرض للتشوه . ويبين الشكل (١٠ — ٢٠ ، جـ) الرسم البيانى للعزوم $\overline{M}_2$.

وبعد تخطيط الرسوم البيانية للعزوم، الناجمة فى الإنشاء الرئيسى، نتيجة لتأثير الحمل ووحدات الانحراف المجهولة، يمكن الانتقال إلى تحديد المعاملات والحدود المطلقة لمجموعة المعادلات القانونية لطريقة الانحرافات.

وتقسم جميع المعاملات والحدود المطلقة أيضاً، للمعادلات القانونية، إلى مجموعتين:

١ — المعاملات التى تمثل العزوم المفاعلة فى الأطراف المبيتة (النهايات المثبتة) المستحدثة:

٢ — المعاملات التى تمثل الإجهادات المفاعلة فى القضبان المضافة.



الشكل ١٠ — ٢٠

إن المعاملات والحدود المطلقة، التى تمثل العزوم المفاعلة فى الأطراف المبيتة، تحديد بقطع الوصلات ووضع معادلات التوازن من النوع التالى:

$$\Sigma M = 0$$

ويمكن تحديد المعاملات والحدود المطلقة، التى تمثل الإجهادات المفاعلة فى القضبان المضافة، بواسطة القطع الذى يفصل قسم من الإطار، أو الإطار بأكمله، عن المساند، ووضع معادلات توازن القوى، المؤثرة فى القسم المقطوع:

$$\Sigma T = 0$$

ويتم اختيار اتجاه المحور T، بحيث تكون المعادلة الناتجة، أكثر بساطة.

والآن نضع القاعدة التالية، لعلامات ردود فعل الأطراف المبيتة والقضبان الساندة.

يعتبر الإجهاد المفاعل موجباً، إذا كان اتجاه تأثيره، ينطبق مع اتجاه الدوران المتخذ، أو مع الاتجاه المتخذ للانحراف الخطى للوصلة.

مثال. يطلب تحديد المعاملات والحدود المطلقة لمجموعة المعادلات القانونية، لطريقة الانحرافات، للإطار المبين فى الشكل (١٠ — ١٨).

الحل: نوجد اولا العزوم المفاعلة R_{1p}، r_{11} و r_{12}.

ونحدد العزم المفاعل R_{1p}، الناجم فى الطرف المبيت، نتيجة لتأثير الحمل المعلوم، بقطع الوصلة 1 فى الحالة "P" (شكل ١٠ — ٢٠، أ وشكل ١٠ — ٢١، أ).

وبوضع معادلة توازن هذه الوصلة، نحصل على ما يلى:

$$\Sigma M_1 = R_{1p} + \frac{ql^2}{8} - \frac{Ph}{8} = 0$$

ومنها ينتج أن:

$$R_{1p} = -\frac{ql^2}{8} + \frac{Ph}{8}$$

ونحدد العزم المفاعل r_{11}، الناجم فى الطرف المبيت 1، نتيجة لدوران هذا الطرف بزاوية $Z_1 = 1$ فى اتجاه عقرب الساعة، بقطع الوصلة 1 فى الحالة "1" (شكل ١٠ — ٢٠، ب) ووضع معادلة التوازن (شكل ١٠ — ٢١، ب):

$$\Sigma M_1 = r_{11} - \frac{3EJ}{l} - \frac{4EJ}{h} = 0$$

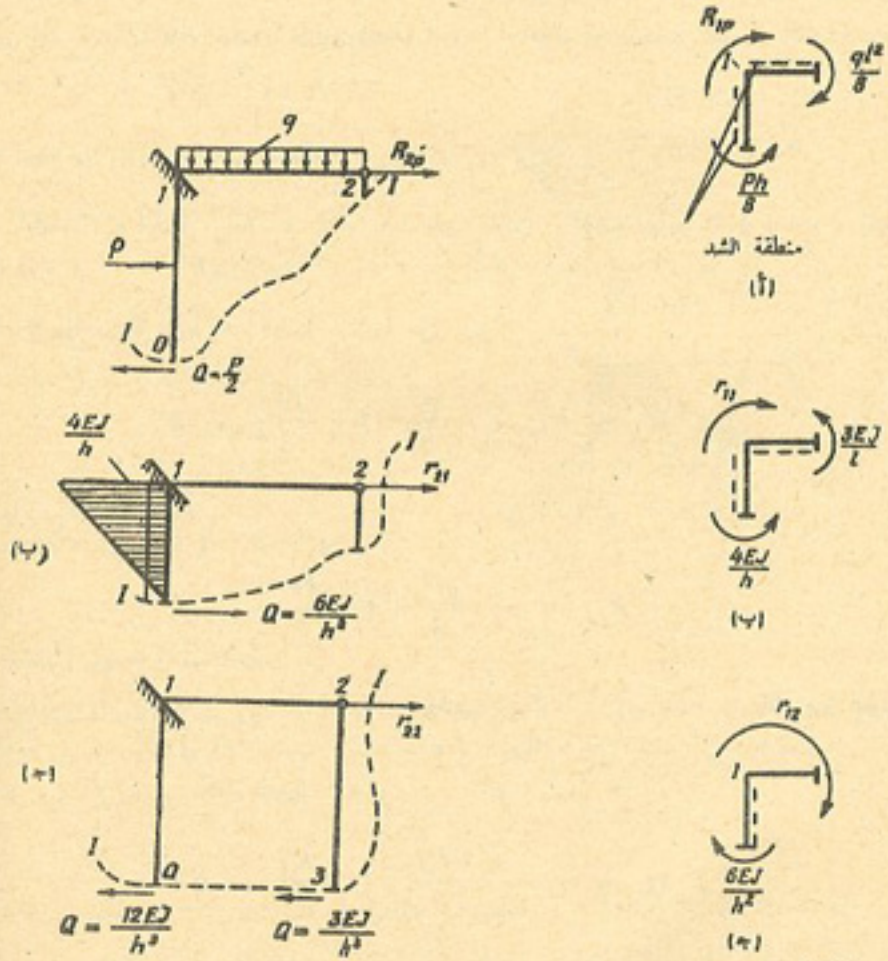
إذن:

$$r_{11} = \frac{3EJ}{l} + \frac{4EJ}{h}$$

ونحدد العزم المفاعل r_{12} الناجم فى الطرف المبيت 1، نتيجة لتأثير انحراف الوصلة 2

بمقدار $Z_2 = 1$ ، بقطع الوصلة 1 فى الحالة "2" (شكل ١٠ – ٢٠ ، جـ وشكل ١٠ – ٢١ ، جـ) .

$$r_{12} = -\frac{6EJ}{h^2}$$



والآن نحدد الإجهادات المفاعلة R_{2p} ، r_{21} ، r_{22} ، الناشئة فى القضيب المضاف . ونحدد رد الفعل (الإجهاد المفاعل) R_{2p} الناشئ فى القضيب نتيجة لتأثير الحمل المعلوم ، باستحداث المقطع I — I فى الحالة "P" (شكل ١٠ – ٢٠ ، أ وشكل ١٠ – ٢٢ ، أ) .

وبعد وضع معادلة مجموع مساقط كافة القوى ، المؤثر فى القسم المقطوع ، على المحور الأفقى x ، نحصل على ما يلى :

$$\Sigma X = P + R_{2p} - \frac{P}{2} = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$R_{2p} = -\frac{P}{2}$$

وعند استحداث المقطع I — I ، كان الإجهاد المفاعل R_{2p} ، متجهاً فى الاتجاه المأخوذ فى الحالة التخيلية الثانية لانحراف الوصلة 2 ، أى إلى اليمين . وهذا الاتجاه يعتبر موجباً أن الاتجاه السالب (العلاقة السالبة) الذى حصلنا عليه لرد الفعل R_{2p} ، يدل على أن رد الفعل متجه فى الاتجاه المعاكس .

ولتحديد رد الفعل r_{21} ، نستحدث المقطع I — I (شكل ١٠ – ٢٢ ، ب) فى الحالة "1" (لاحظ الشكل ١٠ – ٢٠ ، ب) ، ونضع معادلة مساقط القوى على المحور الأفقى x .

$$\Sigma X = \frac{6EJ}{h^2} + r_{21} = 0$$

إذن :

$$r_{21} = -\frac{6EJ}{h^2}$$

ونلاحظ هنا بأن $r_{21} = r_{12}$. وهذه العلاقة بين ردود الفعل الثانوية (ردود الفعل المتبادلة) ، مماثلة للعلاقة بين الانحرافات الثانوية $\delta_{mn} = \delta_{nm}$ فى طريقة القوى ، وسيجرى إثباتها بصورة عامة فيما بعد (راجع البند ١٠ – ٦) .

نوجد رد الفعل r_{22} ، باستحداث المقطع I — I (شكل ١٠ – ٢٢ ، جـ) فى الحالة "2" (لاحظ الشكل ١٠ – ٢٠ ، جـ) ، ومن معادلة مساقط القوى على المحور x ، ينتج ما يلى :

$$\Sigma X = -\frac{12EJ}{h^3} - \frac{3EJ}{h^3} + r_{22} = 0 .$$

ومنها نستنتج ما يلى :

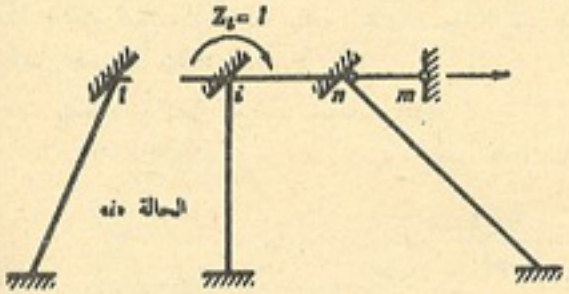
$$r_{22} = \frac{12EJ}{h^3} + \frac{3EJ}{h^3} = \frac{15EJ}{h^3}$$

إن الطريقة التى شرحناها هنا ، لتحديد المعاملات والحدود المطلقة ، تسمى بالطريقة الاستاتيكية ، وذلك لأنها مبنية على استخدام معادلات التوازن العادية .

البند ١٠ — ٦ : تحديد المعاملات والحدود المطلقة لمجموعة المعادلات القانونية ، بطريقة ضرب الرسوم البيانية

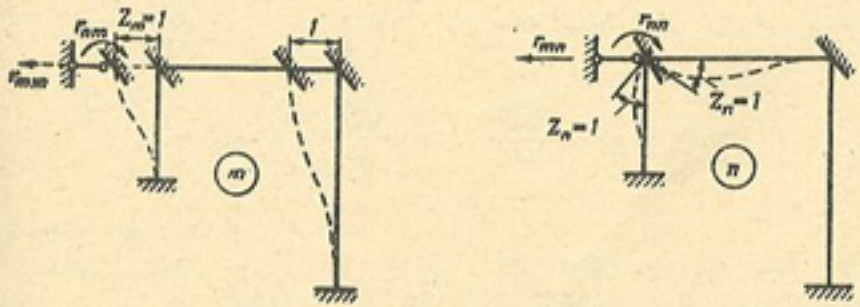
فى حالات عديدة ، يكون من السهل تحديد ردود فعل الأربطة (المثبتات) الإضافية ، بطريقة ضرب الرسوم البيانية المناظرة .

ومن الملائم استخدام هذه الطريقة ، مثلا عند حساب الإطار المبين فى الشكل (١٠ — ٢٣) . فى هذا الإطار ذى القضبان القائمة غير المتوازنة ، يصعب تحديد الإجهادات المفاعلة فى القضيب المضاف ، بالطريقة الاستاتيكية ، وذلك لأنه فى معادلة مساقط القوى على المحور الأفقى ، تدخل القوى الطولية أيضاً ، بالإضافة إلى قوى القص .



الشكل ١٠ — ٢٣

والآن لنبحث أحد الإنشاءات الرئيسية لطريقة الانحرافات ، فى الحالتين التخيليتين m و n (شكل ١٠ — ٢٤) .



الشكل ١٠ — ٢٤

نعبر عن الشغل A_{mn} الناجم عن القوى والأحمال الخارجية ، فى الحالة n ، على امتداد انحرافات الحالة m ، بواسطة عزوم الانحناء ، الناشئة فى المقاطع العرضية للقضبان فى هاتين الحالتين [راجع البند ٦ — ٤ ، والصيغة 12 — 6]) :

$$A_{nm} = r_{mn} \times 1 = \Sigma \int \frac{\overline{M}_m \times \overline{M}_n ds}{EJ}$$

ومنها ينتج أن :

$$r_{mn} = \Sigma \int \overline{M}_m \, \overline{M}_n \frac{ds}{EJ} \qquad (10 - 4)$$

والآن نساوى (استناداً إلى نظرية الشغل المتبادل) شغل القوى الخارجية للحالة n ، المنجز على امتداد انحرافات الحالة m ، مع شغل القوى الخارجية للحالة m ، المنجز على امتداد انحرافات الحالة n :

$$A_{nm} = A_{mn}$$

ولكن بما أن :

$$A_{nm} = r_{mn} \times 1$$

و

$$A_{mn} = r_{nm} \times 1$$

إذن نحصل على ما يلى :

$$r_{nm} = r_{mn} \qquad (10 - 5)$$

وهذه الصيغة تعبر عن نظرية ردود الفعل المتبادلة ، وتكتب حرفياً كما يلى :

إن رد الفعل فى اتجاه "n" الناجم عن وحدة انحراف الرباط "m" ، يساوى رد الفعل فى اتجاه "m" الناجم عن وحدة انحراف الرباط "n" .

مثال : يطلب تحديد المعاملين r_{12} و r_{22} ، للإطار المبحوث فى المثال السابق .

الحل : بضرب الرسمين البيانيين للعزوم $\overline{M}_1$ و $\overline{M}_2$ فى بعضهما البعض (لاحظ الشكل ١٠ – ٢٠) ، نحصل على ما يلى :

$$r_{12} = \Sigma \int \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_2 \, ds}{EJ} = \frac{h}{6EJ}\left[2\left(-\frac{6EJ}{h^2} \times \frac{2EJ}{h} - \frac{6EJ}{h^2} \times \frac{4EJ}{h}\right) + \frac{6EJ}{h^2} \times \frac{4EJ}{h} + \frac{6EJ}{h^2} \times \frac{2EJ}{h}\right] = -\frac{6EJ}{h^2}$$

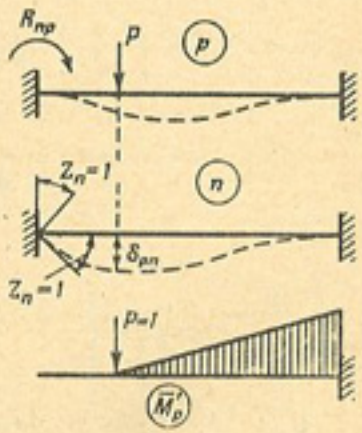
وهذه النتيجة تطابق نتيجة التحديد الاستاتيكى للمقدار r_{12} (راجع البند ١٠ – ٥) .

ولتحديد رد الفعل الرئيسى r_{22} ، يجب ضرب الرسم البيانى للعزوم $\overline{M}_2$ فى نفسه :

$$r_{22} = \Sigma \int \frac{\overline{M}_2^2 \, ds}{EJ} = \frac{h}{6EJ}\left[2\left(\frac{36(EJ)^2}{h^4} \times 2 - \frac{36(EJ)^2}{h^4}\right)\right] + \frac{h \times 3EJ}{h^2 \times 2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3EJ}{h^2} = \frac{15EJ}{h^3}$$

وهذه النتيجة تطابق أيضاً ، نتيجة التحديد الاستاتيكى للمقدار r_{22} .

ولتحديد ردود الفعل ، الناشئة عن تأثير الأحمال الخارجية ، سنبحث حالتين من حالات الإنشاء الرئيسى ، وهما : الحالة " p " عند تأثير الحمل المعلوم ، والحالة التخيلية " n " ، أى حالة تأثير وحدة الحمل (شكل ١٠ – ٢٥) .



الشكل ١٠ – ٢٥

إن شغل القوى الخارجية للحالة " p " على امتداد انحرافات الحالة " n " يساوى ما يلى :

$$A_{pn} = P\delta_{pn} + R_{np} \times 1$$

وشغل القوى الخارجية للحالة " n " على امتداد انحرافات الحالة " p " يساوى ما يلى :

$$A_{pn} = 0$$

واستناداً إلى نظرية الشغل المتبادل ، يكون لدينا $A_{pn} = A_{np}$ ، وبالتالى نحصل على ما يلى :

$$R_{np} = -P\delta_{pn}$$

حيث δ_{pn} – تمثل انحراف الإنشاء الرئيسى غير المحدد استاتيكيا ، فى الحالة " n " فى اتجاه تأثير الحمل P (القوة فى الحالة P) . وعند $P = 1$ ، تتحول هذه العلاقة إلى الشكل التالى :

$$r_{np} = -\delta_{pn} \qquad (10-6)$$

وهى فى الحقيقة ، تمثل العلاقة المتبادلة لرد الفعل والانحراف .

ولتحديد δ_{pn} . نأخذ كمثل للحالة التخيلية ، العتبة المحددة استاتيكيا ، المبينة من أحد طرفيها ، ونسلط عليها القوة أو الحمل $P = 1$ ، فى اتجاه الانحراف المطلوب (راجع البندين ٦ – ٦ ، ٦ – ٨) وسوف نرمز إلى الرسم البيانى لعزوم الانحناء ، الناجمة عن تأثير الحمل $P = 1$ ، فى هذه الحالة ، بالرمز $\overline{M}'_p$ (لاحظ الشكل ١٠ – ٢٥ ، ج) .

وبضرب الرسم البيانى للعزوم $\overline{M}'_p$ فى الرسم البيانى للعزوم $\overline{M}_n$ نحصل على ما يلى :

$$\delta_{pn} = \Sigma \int \overline{M}'_p \frac{\overline{M}_n \, ds}{EJ}$$

وبتعويض قيمة δ_{pn} فى معادلة رد الفعل R_{np} ، نحصل على ما يلى :

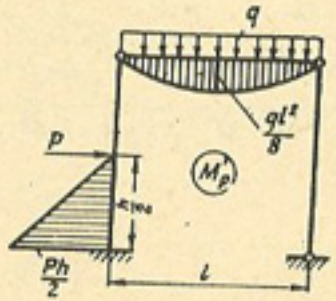
$$R_{pn} = -P\Sigma \int \overline{M}'_p \frac{\overline{M}_n \, ds}{EJ}$$

وبإدخال عامل الضرب P إلى داخل علامة التكامل ، والتعويض عن المقدار $P\overline{M}'_p$ بالمقدار M'_p ، وتبسيط التكامل ، نحصل على ما يلى :

$$R_{np} = -\Sigma \int \overline{M}_n \frac{M'_p\, ds}{EJ} \qquad (10-7)$$

حيث M'_p — تمثل الإحداثيات الرأسية لعزوم الانحناء ، الناجمة عن تأثير الحمل P ، فى أى إنشاء محدد استاتيكيا (ناجم عن الإنشاء الأصلى المعلوم أو الإنشاء الرئيسى لطريقة الانحرافات ، برفع أو حذف الأربطة الزائدة ، ومن ضمنها حتماً ، ذلك الرباط الذى يحدد رد فعله) .

وهكذا لتحديد رد الفعل فى الرباط رقم n ، الناجم عن الحمل المعلوم ، يجب ضرب الرسم البيانى لعزوم الانحناء الناجمة عن تأثير الحمل فى الإنشاء المحدد استاتيكيا (الناجم عن الإنشاء غير المحدد استاتيكيا المعلوم ، أو عن الإنشاء الرئيسى لطريقة الانحرافات ، مع الحذف الضرورى ، للرباط رقم n) ، فى الرسم البيانى لعزوم الانحناء $\overline{M}_n$ الناجمة عن وحدة انحراف الرباط رقم n فى الإنشاء الرئيسى لطريقة الانحرافات ، ويجب عكس علامة نتيجة الضرب هذه .



الشكل ١٠ — ٢٦

مثال : يطلب تحديد ردى الفعل R_{1p} و R_{2p} للإطار المبحوث فى المثال الوارد فى البند (١٠ — ٥) .

الحل : إن الإنشاء المحدد استاتيكيا ، والرسم البيانى لعزوم M'_p ، الناجمة عن الحمل ، لهذا الإنشاء ، مبينان فى الشكل (١٠ — ٢٦) .

وبضرب الرسم البيانى للعزوم M'_p فى الرسم البيانى للعزوم $\overline{M}_1$ (شكل ١٠ — ٢٠ ، ب) ، نحصل على ما يلى :

$$R_{1p} = -\Sigma \int M'_p \frac{\overline{M}_1\, ds}{EJ} = -\frac{2}{3} \times \frac{ql^2}{8} \times \frac{l}{EJ} \times \frac{1}{2} \times \frac{3EJ}{l} + \frac{1}{2} \times \frac{Ph}{2} \times \frac{h}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2EJ}{EJh} = -\frac{ql^2}{8} + \frac{Ph}{8}$$

ولتحديد R_{2p} ، نضرب الرسم البيانى للعزوم M'_p فى الرسم البيانى للعزوم $\overline{M}_2$ (لاحظ الشكل ١٠ — ٢٠ ، جـ) :

$$R_{2p} = -\Sigma \int M'_p \overline{M}_2 \frac{ds}{EJ} = -\frac{1}{2} \times \frac{Ph}{2} \times \frac{h}{2} \times \frac{1}{EJ} \times \frac{2}{3} \times \frac{6EJ}{h^2} = -\frac{P}{2}$$

وهذه النتائج تطابق النتائج التى حصلنا عليها فى البند (١٠ — ٥) بالطريقة الاستاتيكية .

البند ١٠ — ٧ : مراجعة المعاملات والحدود المطلقة لمجموعة المعادلات القانونية لطريقة الانحرافات

إن مراجعة صحة حساب معاملات مجموعة المعادلات القانونية لطريقة الانحرافات ، تتم بطريقة مماثلة لطريقة مراجعة معاملات المعادلات المستخدمة لحساب الإنشاءات بطريقة القوى (راجع البند ٩ — ٥) . ولهذا الغرض ، يخطط الرسم البيانى للعزوم $\overline{M}_s$ الناجمة فى الإنشاء الرئيسى — بواسطة الجمع الجبرى لكافة وحدات الرسوم البيانية :

$$\overline{M}_s = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \dots + \overline{M}_n = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{M}_i$$

وبضرب هذا الرسم البيانى ، فى كل وحدة رسم بيانى على التوالى ، نحصل على مجموع المعاملات الملحقة بالمجاهيل ، فى المعادلة المناظرة .

وهكذا ، بضرب الرسم البيانى للعزوم $\overline{M}_s$ فى الرسم البيانى للعزوم $\overline{M}_1$ ، نحصل على ما يلى :

$$r_{1s} = \Sigma \int \frac{\overline{M}_1\, \overline{M}_s\, ds}{EJ} = \Sigma \int \frac{\overline{M}_1 (\overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \dots + \overline{M}_n)\, ds}{EJ} =$$

$$= \Sigma \frac{\overline{M}_1^2\, ds}{EJ} + \Sigma \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_2\, ds}{EJ} + \dots + \Sigma \int \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_n\, ds}{EJ} =$$

$$= r_{11} + r_{12} + \dots + r_{1n} = \sum_{i=1}^{i=n} r_{1i}$$

وبنفس الطريقة نجد بأن $r_{2s} = \Sigma r_{2i}$ ، وهلم جرا .

إذن ، يجب أن يكون مجموع المعاملات الملحقة بمجاهيل المعادلة

رقم i ، مساوياً لقيمة r_{is} ، حيث :

$$r_{is} = \Sigma \int \overline{M}_i \, \overline{M}_s \, \frac{ds}{EJ} \qquad (10-8)$$

وهكذا نجد بأن مراجعة القيم المستخرجة لوحدات ردود الفعل ، الداخلة فى المعادلة القانونية الأولى لطريقة الانحرافات ، تتلخص فى مقارنة مجموعها ، مع قيمة المقدار r_{1s} :

$$\sum_{i=1}^{i=n} r_{1i} = r_{1s} \qquad (10-9)$$

وبنفس الطريقة ، تتم مراجعة معاملات (وحدات ردود الفعل) لكافة المعادلات الباقية .

وتسمى هذه المراجعة ، بالمراجعة حسب السطور (إن كل معادلة — سطر أفقى — تراجع على انفراد) .

وبالإضافة إلى المراجعات السطرية ، يمكن إجراء ما يسمى بالمراجعة العامة أيضاً .

والآن بضرب الرسم البيانى للعزوم $\overline{M}_s$ فى نفسه ، نحصل على ما يلى :

$$r_{ss} = \Sigma \int \frac{\overline{M}_s^2 ds}{EJ} = \Sigma \int \frac{(\overline{M}_1 + M_2 + \dots + \overline{M}_n)^2 ds}{EJ} =$$
$$= \left(\Sigma \int \frac{\overline{M}_1^2 ds}{EJ} + \Sigma \int \frac{\overline{M}_2^2 ds}{EJ} + \dots + \Sigma \int \frac{\overline{M}_n^2 ds}{EJ} \right) +$$
$$+ 2 \left(\Sigma \int \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_2 ds}{EJ} + \dots + \Sigma \int \frac{\overline{M}_2 \overline{M}_n ds}{EJ} + \dots \right) =$$
$$= (r_{11} + r_{22} + \dots + r_{nn}) + 2 (r_{12} + \dots + r_{2n} + \dots) = \Sigma r$$

وهنا فى القوس الأول ، كتبت جميع ردود الفعل الرئيسية ، وفى القوس الثانى — جميع ردود الفعل الواقعة على جهة واحدة من القطر الرئيسى .

وهكذا نجد بأن نتيجة الرسم البيانى للعزوم $\overline{M}_s$ فى نفسه ، يجب أن

تساوى مجموع كافة المعاملات الملحقة بالمجاهيل فى مجموعة المعادلات القانونية (المراجعة العامة) .

أى أن :

$$\Sigma r = r_{ss} \qquad (10-10)$$

حيث :

$$r_{ss} = \Sigma \int \overline{M}_s^2 \, \frac{ds}{EJ} \qquad (10-11)$$

وتتلخص مراجعة معاملات التحميل ، فى حساب ما يلى :

$$R_{sp} = - \Sigma \int \frac{\overline{M}_s M'_p ds}{EJ} \qquad (10-12)$$

أى بضرب الرسم البيانى للعزوم M'_p الناجمة عن تأثير الحمل ، فى الإنشاء المحدد استاتيكيا (الناجم عن الإنشاء الأصلى غير المحدد استاتيكيا) فى الرسم البيانى للعزوم $\overline{M}_s$. إن نتيجة الضرب ، يجب أن تساوى مجموع كافة معاملات التحميل الداخلة فى مجموعة المعادلات :

$$R_{sp} = - \Sigma \int \frac{(\overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \dots \overline{M}_n) M'_p ds}{EJ} =$$
$$= - \left(\Sigma \int \frac{\overline{M}_1 M'_p ds}{EJ} + \Sigma \int \frac{\overline{M}_2 M'_p ds}{EJ} + \dots + \right.$$
$$\left. + \Sigma \int \frac{\overline{M}_n M'_p ds}{EJ} \right) = R_{1p} + R_{2p} + \dots + R_{np}$$

أى أن :

$$R_{sp} = \Sigma R \qquad (10-13)$$

البند ١٠ — ٨ : تخطيط الرسوم البيانية للعزوم M وقوى القص Q والقوى الطولية N ، الناجمة فى الإنشاء المعلوم

بعد أن تم حل مجموعة المعادلات القانونية لطريقة الانحرافات ، ووجدنا قيم زوايا الدوران والانحرافات الخطية المجهولة للوصلات ، يمكن الانتقال إلى تخطيط الرسوم البيانية النهائية فى الإنشاء المعلوم .

إن الرسم البيانى للعزوم M (لعزوم الانحناء الناجمة فى الإنشاء المعلوم غير المحدد استاتيكيا) ، ينتج بجمع الإحداثيات الرأسية للرسم البيانى للعزم M_p ، المخطط فى الإنشاء الرئيسى ، نتيجة لتعرضه لتأثير الحمل ، مع الإحداثيات الرأسية لوحدات الرسوم البيانية لعزوم الانحناء ، المضروبة فى قيم المجاهيل ، أى :

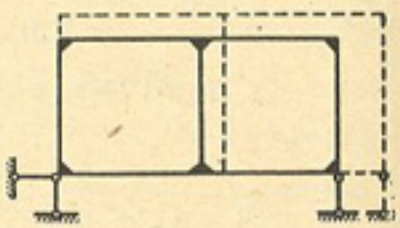
$$M = M_p + \overline{M}_1 Z_1 + \overline{M}_2 Z_2 + \dots \overline{M}_n Z_n \qquad (10 - 14)$$

ويمكن مراجعة صحة تخطيط الرسم البيانى النهائى للعزوم M، باستخدام الطرق التى استخدمت فى طريقة القوى (راجع البند ٧ — ٦) . وهناك أهمية كبيرة للمراجعة الاستاتيكية لتوازن العزوم فى الوصلات ، وذلك لأنه عند كافة الرسوم البيانية المجموعة (M_p , M_1 , M_2, . . . , M_n) ، تكون الوصلات غير متوازنة . إن عدم تحقيق شرط توازن الوصلات ، ($\Sigma M = 0$) فى الرسم البيانى النهائى ، سيدل على عدم صحة تحديد قيم المجاهيل .

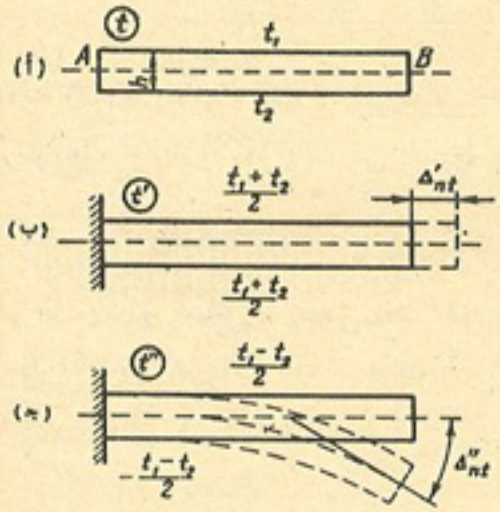
وبواسطة الرسم البيانى للعزوم M ، كما هى الحالة فى طريقة القوى ، يخطط الرسم البيانى لقوى القص Q ، وبواسطة الرسم البيانى لقوى القص Q ، يخطط الرسم البيانى للقوى الطولية . وتتم مراجعة هذه الرسوم البيانية ، بالطريقة العادية أيضاً (راجع البند ٧ — ٦) . وفى هذه الحالة ، هناك أهمية كبيرة للمراجعة الاستاتيكية لتوازن أقسام الإطار المستقلة .

البند ١٠ — ٩ : حساب تأثير درجة الحرارة بطريقة الانحرافات

إن تغير درجة حرارة الإنشاءات غير المحددة استاتيكيا ، يؤدى عادة إلى ظهور إجهادات داخلية فى تلك الإنشاءات . وفى حالات معينة فقط ، لا تتغير حالة الإجهاد فى الإنشاء بتغير درجة الحرارة . ويمكن اعتبار الإطار غير المحدد استاتيكيا ، المبين فى الشكل (١٠ — ٢٧) ، مثالا من أمثلة الحالات المذكورة . ونظراً لكون الإطار ، بالنسبة للأربطة المساندة، محدداً استاتيكيا ، فإنه عند التسخين أو التبريد المتساوى المنتظم ، لجميع قضبانه ، يتشوه بحرية ويكتسب شكلا مشابها لشكله الاصلى . وفى هذه الحالة ، لا تظهر أية إجهادات فى قضبان (قطع) الإطار .



الشكل ١٠ — ٢٧



الشكل ١٠ — ٢٨

والآن نثبت بأنه يمكن دائماً تحليل تأثير درجة الحرارة فى كل قضيب ، إلى مركبات متماثلة وعكسية التماثل .

لنفرض بأن القضيب AB (شكل ١٠—٢٨ ،أ) ذا المقطع العرضى المتماثل (محور القضيب يمر فى منتصف ارتفاعه h) ، قد سخن إلى t_1 درجة من الأعلى ، وإلى t_2 درجة من الأسفل . ونفرض بأن $t_1 > t_2$. ونحلل هذا التأثير غير المتماثل لدرجة الحرارة t، إلى تأثير متماثل t'، عندما تكون الألياف العليا والسفلى، مسخنة

إلى درجة حرارة متساوية $\frac{t_1 + t_2}{2}$ (شكل ١٠ — ٢٨ ، ب) ، وتأثير عكسى التماثل t'' ، عندما تكون درجة حرارة الألياف العليا ، هى $\frac{t_1 - t_2}{2}$ ، ودرجة حرارة الألياف السفلى ، هى $\left(-\frac{t_1 - t_2}{2} \right)$ ، كما مبين فى الشكل (١٠ — ٢٨ ، جـ) .

وبجمع التأثيرين الحراريين المذكورين ، نحصل على درجة حرارة تسخين الألياف العليا ، وتساوى :

$$\frac{t_1 + t_2}{2} + \frac{t_1 - t_2}{2} = t_1$$

ودرجة حرارة الألياف السفلى ، تساوى :

$$\frac{t_1 + t_2}{2} - \frac{t_1 - t_2}{2} = t_2$$

وهذه النتائج تطابق الحالة المعلومة لدينا .

وعند تحديد الانحرافات من الصيغة (20 — 6) :

$$\Delta_{st} = \alpha \frac{t_1 + t_2}{2} \Omega_{\bar{N}} + \alpha \frac{t_1 - t_2}{h} \Omega_{\bar{M}}$$

فى حالة التأثير المتماثل ، نحصل فقط على استطالة أو تمدد محور القضيب ، بدون الحصول على الانحناء ، وذلك لأن الفرق فى درجة الحرارة $t_1 - t_2$ ، يساوى صفراً فى هذه الحالة :

$$\Delta'_{st} = \alpha \frac{t_1 + t_2}{2} \Omega_{\bar{N}} = \alpha \frac{t_1 + t_2}{2} l$$

حيث $\Omega_{\bar{N}} = l$ (شكل ١٠ — ٢٩ ، أ)* .

* إذا لم يقسم محور القضيب ، نحن ذلك القضيب إلى قسمين متساويين ، عندئذ يجب أن يدخل فى صيغة الانحرافات الناجمة عن تغير درجة الحرارة ، المقدار $t_2 + \frac{t_1 - t_2}{h} y$ ، بدلا من المقدار $\frac{t_1 + t_2}{2}$ حيث y — تمثل المسافة بين الألياف المسخنة إلى درجة t_2 ، ومحور القضيب .

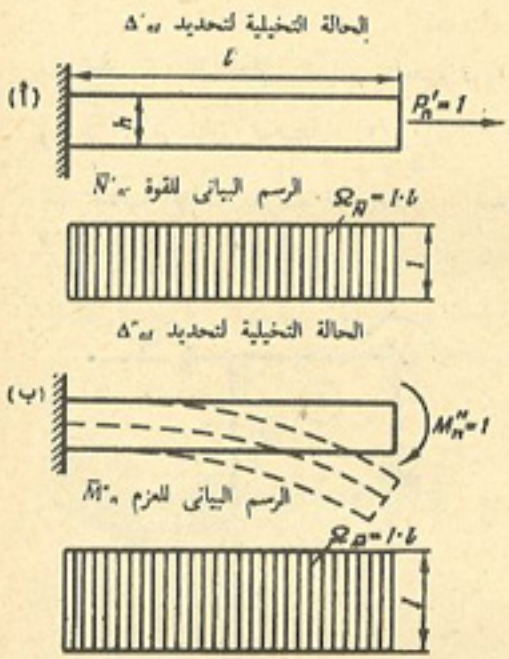
وفى حالة التأثير العكسى التماثل ، ينحنى القضيب ، ولكن طول محوره يبقى كما هو ، وذلك لأنه فى هذه الحالة ، تكون درجة حرارة المحور ، مساوية للصفر . وسوف يكون الدوران المتبادل لمقاطع طرفى القضيب ، فى هذه الحالة مساوياً لما يلى :

$$\Delta''_{st} = \alpha \frac{t_1 - t_2}{h} \Omega_{\bar{M}} = \alpha \frac{t_1 - t_2}{h} l$$

وذلك لأن $\Omega_{\bar{M}} = l$ (شكل ١٠ — ٢٩ ، ب)* .

إن قضيب الإنشاء الرئيسى لطريقة الانحرافات (العتبة غير المحددة استاتيكيا) ، فى حالة التأثير الحرارى المتماثل يتمدد بدون أن ينحنى . أما فى حالة التأثير الحرارى العكسى التماثل ، فتظهر فيه عزوم انحناء ، والرسوم البيانية لهذه العزوم ، موضحة فى السطرين 5 و 10 (الجدول ١٠ — ٢) .

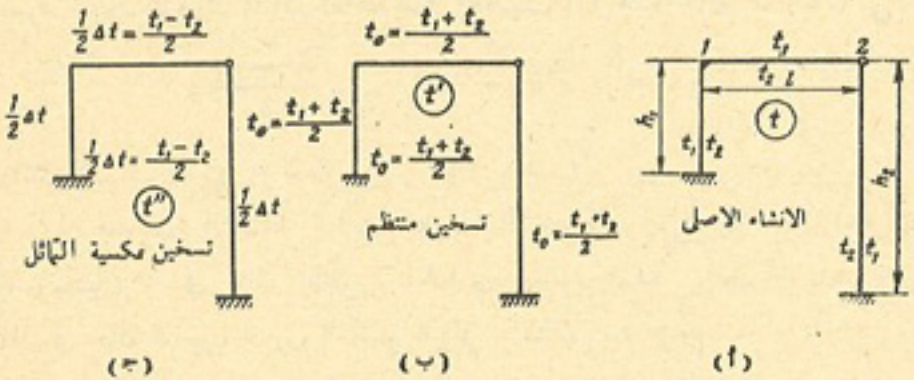
نتنقل الآن إلى حساب تأثير تغير درجة الحرارة ، على الإنشاءات الإطارية غير المحددة استاتيكيا ، بطريقة الانحرافات . إن الاختلاف الأساسى لهذه الطريقة الحسابية ، عن طريقة حساب تأثير الحمل الخارجى المعلوم ، يتلخص فى تخطيط الرسوم البيانية لعزوم الانحناء M_i ، الناجمة فى الإنشاء الرئيسى ، نتيجة لتأثير درجة الحرارة ، وفى تحديد حدود التحميل المطلقة ، لمجموعة المعادلات القانونية ، التى سيرمز لها فى هذه الحالة ، بالرموز $R_{1t}, R_{2t}, \ldots, R_{nt}$ ، والتى تمثل ردود فعل كافة الأربطة المضافة ، الناجمة فى الإنشاء الرئيسى ، نتيجة لتأثير درجة الحرارة .



الشكل ١٠ — ٢٩

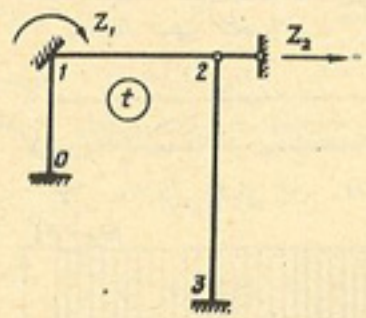
* تبقى الصيغة كما هى عليه بدون تغيير ، حتى عندما لا يقسم محور القضيب ، نحن ذلك القضيب إلى قسمين متساويين .

مثال : يطلب حساب تأثير درجة الحرارة ، على الإطار المبين فى الشكل (١٠ — ٣٠ ، أ) ، عندما يكون المقدار EJ ثابتاً ، أى عند $EJ = \text{const}$.

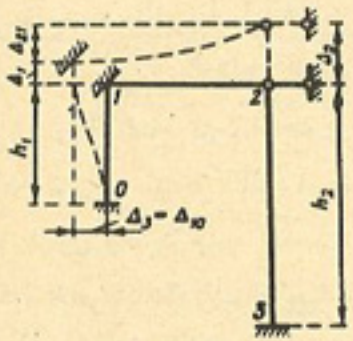


الشكل ١٠ — ٣٠

الحل : نحلل التأثير الحرارى المعلوم t (شكل ١٠ — ٣٠ ، ب) إلى تأثير متماثل t' (يساوى تسخين القضيب بمقدار $\frac{t_1 + t_2}{2}$) وتأثير عكسى المماثل t'' . إن عدد المجاهيل عند حساب الإنشاء بطريقة الانحرافات ، يساوى اثنين . والانشاء الرئيسى ، مبين فى الشكل (١٠ — ٣١) .



الشكل ١٠ — ٣١



الشكل ١٠ — ٣٢

إن مجموعة المعادلات القانونية ، تكون فى هذه الحالة ، على الشكل التالى :

$$Z_1 r_{11} + Z_2 r_{12} + R'_{1t} + R''_{1t} = 0$$
$$Z_1 r_{21} + Z_2 r_{22} + R'_{2t} + R''_{2t} = 0$$

وتحسب جميع معاملات المجاهيل ، بنفس الطريقة المتبعة عند تأثير الحمل الخارجى . إن الحدود المطلقة للمعادلات ، هى عبارة عن مجاميع ردود الفعل R'_{1t} ، R''_{1t} و R'_{2t} ، R''_{2t} ، الناجمة عن التأثيرين المتماثل والعكسى المتماثل لدرجة الحرارة ، فى الإنشاء الرئيسى .

ولتحديد العزم المفاعل R'_{1t} الناجم فى الطرف المبيت ، والاجهاد المفاعل R'_{2t} الناجم فى القضيب الإضافى ، نخطط الرسم البيانى للعزم M'_t الناجم فى الإنشاء الرئيسى ، نتيجة التسخين لمنتظم (المتماثل) للقضبان .

نحدد أولا ، تمدد كثافة قضبان الإنشاء ، الناجم عن تغير درجة الحرارة t' ، مع إهمال تأثير القوى الطولية (إن درجة الحرارة t'' ، لا تؤدى إلى تمدد القضبان) : إن تمدد الضلع القائم 1 — 0 ، يساوى :

$$\Delta_1 = \alpha t_0 h_1$$

تمدد القضيب 3 — 2 ، يساوى :

$$\Delta_2 = \alpha t_0 h_2$$

وتمدد القضيب 2 — 1 ، يساوى :

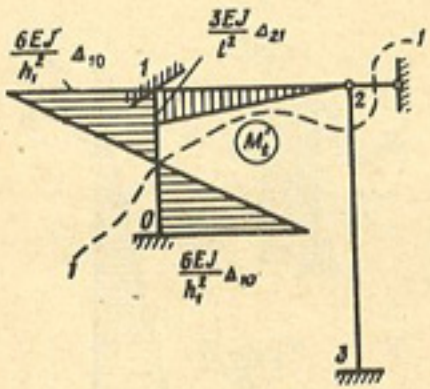
$$\Delta_3 = \alpha t_0 l$$

حيث :

$$t_0 = \frac{t_1 + t_2}{2}$$

إن الوضع الجديد لترتيب وصلات الإنشاء الرئيسى بعد التسخين المنتظم ، مبين فى الشكل (١٠ — ٣٢) . ومن بحث هذا الشكل ، نوجد قيم الانحرافات المتبادلة للوصلات :

$$\Delta_{10} = \Delta_3 = \alpha t_0 l$$
$$\Delta_{21} = \Delta_2 - \Delta_1 = \alpha t_0 (h_2 - h_1)$$
$$\Delta_{23} = 0$$



الشكل ١٠ — ٣٣

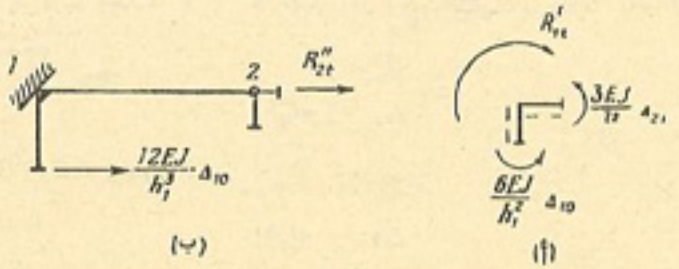
إن الوصلة 1 للإنشاء الرئيسى ، لا تدور اثناء الانحراف ، ولهذا السبب يمكن الحصول على الرسم البيانى لعزوم الانحناء الناجمة عن الانحرافات المتبادلة المحسوبة للوصلات ، بضرب الرسم البيانى الناجم عن وحدات الانحراف (السطرين رقم 4 و 9 من الجدول ١٠—٢) ، فى قيم الانحرافات المتبادلة Δ . إن الرسم البيانى للعزوم M'_t ، وقيم إحداثياته الرأسية مبينة فى الشكل (١٠ — ٣٣) .

بقطع الوصلة 1 (شكل ١٠ – ٣٤ ، أ) ، نحدد قيمة R'_{1t} :

$$\Sigma M_1 = R'_{1t} - \frac{6\,EJ}{h_1^2}\,\Delta_{10} - \frac{3\,EJ}{l^2}\,\Delta_{21} = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$R'_{1t} = 6EJ\left(\frac{\Delta_{10}}{h_1^2} + \frac{\Delta_{21}}{2\,l^2}\right)$$



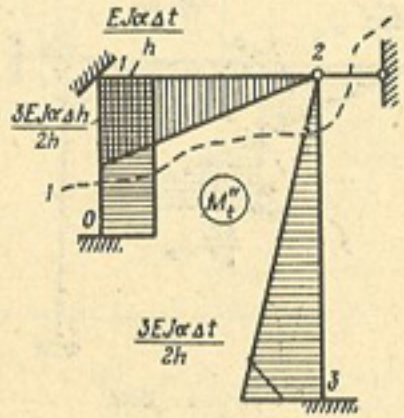
الشكل ١٠–٣٤

وباستحداث المقطع 1 — 1 (لاحظ الشكل ١٠ – ٣٣) ووضع معادلة مساقط القوى على المحور الافقى x ، المؤثرة فى القسم المقطوع (شكل ١٠ – ٣٤ ، ب) ، نحدد قيمة المقدار R'_{2t} :

$$\Sigma\,X = \frac{12\,EJ}{h_1^3}\,\Delta_{10} + R'_{2t} = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$R'_{2t} = -\,\frac{12\,EJ}{h_1^3}\,\Delta_{10}$$



الشكل ١٠ – ٣٥

ولنبحث الآن التأثير العكسى المماثل لدرجة الحرارة . بمعرفة الفرق بين درجتى حرارة الألياف الخارجية والداخلية $\Delta t = t_1 - t_2$ ، وارتفاع مقطع قضبان الإطار h ، نخطط الرسم البيانى للعزم M''_t (شكل ١٠ – ٣٥) ، باستخدام معطيات الجدول ١٠–٢ (السطرين رقم 5 و10) . إن الإحداثيات الرأسية لهذا الرسم البيانى ، موضوعة

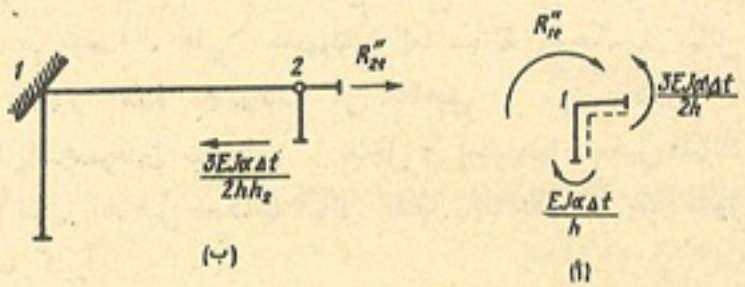
من جهة درجة الحرارة السالبة للقضيب ، أى من جهة الألياف المشدود لقضبان الإنشاء الرئيسى .

وبقطع الوصلة 1 (شكل ١٠ – ٣٦ ، أ) وبحث شرط توازنها ، نستطيع تحديد ما يلى :

$$\Sigma M_1 = R''_{1t} + \frac{EJ\,\alpha\,\Delta\,t}{h} - \frac{3\,EJ\,\alpha\,\Delta\,t}{2\,h} = 0$$

إذن :

$$R''_{1t} = \frac{EJ\,\alpha\,\Delta\,t}{2\,h}$$



الشكل ١٠ – ٣٦

وباستحداث المقطع 1 — 1 ، ووضع معادلة مساقط القوى على المحور الأفقى x ، المؤثرة فى القسم المقطوع (شكل ١٠ – ٣٦ ، ب) ، نحدد ما يلى :

$$\Sigma X = R''_{2t} - \frac{3\,EJ\,\alpha\,\Delta\,t}{2\,hh_2} = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$R''_{2t} = \frac{3\,EJ\,\alpha\,\Delta\,t}{2\,hh_2}$$

وبعد إيجاد جميع المعاملات والحدود المطلقة ، نحل مجموعة المعادلات القانونية ، ونحدد منها قيم زوايا الدوران المجهولة والانحرافات الخطية المجهولة للوصلات .

وتحسب القيم النهائية لعزوم الانحناء ، من الصيغة التالية :

$$M = M'_t + M''_t + \overline{M}_1\,Z_1 + \overline{M}_2\,Z_2 + \ldots$$

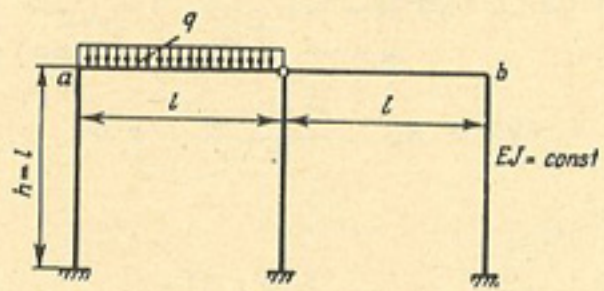
ومن الرسم البيانى لعزوم الانحناء ، باستخدام الطريقة العادية ، نخطط الرسم البيانى لقوى القص Q ، ثم الرسم البيانى للقوى الطولية N .

البند ١٠ ـ ١٠ : استخدام التماثل عند حساب الأطر بطريقة الانحرافات

عند حساب الإنشاءات المتماثلة بطريقة الانحرافات ، كما هى الحالة عند حسابها بطريقة القوى أيضاً ، يمكن اللجوء إلى تصنيف المجاهيل إلى مجموعات .

وفى هذه الحالة ، سوف تكون جميع الرسوم البيانية للاجهادات ، الناجمة عن وحدات القوى المجهولة ، إما متماثلة أو عكسية التماثل فقط . ونتيجة لظهور هذه المجموعات من المجاهيل ، سوف تنقسم المعادلات القانونية إلى مجموعتين مستقلتين ، تدخل فى إحداهما المجاهيل المتماثلة فقط ، وفى الأخرى المجاهيل العكسية التماثل فقط . إن هذه الطريقة تسهل عملية الحساب كثيراً .

وعلى سبيل المثال ، سنبحث الإطار المبين فى الشكل (١٠ ـ ٣٧) .

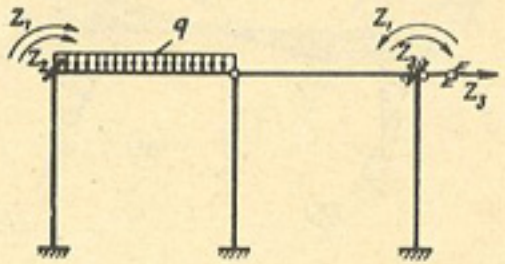


الشكل ١٠ ـ ٣٧

نعبر عن زاوية الدوران المجهولة للوصلة a من الإطار ، على هيئة مجموع زاويتى الدوران Z_1 و Z_2 ، وعن دوران الوصلة b ، المماثلة للوصلة a ، على هيئة الفرق بين Z_1 و Z_2 (شكل ١٠ ـ ٣٨)

إن الانحراف الأفقى لعارضة الإطار ، يعتبر انحرافاً مجهولا عكسى التماثل ، وذلك لأن الوصلة b (شكل ١٠ ـ ٣٧) ، تنحرف فى هذه

الأثناء ، عن محور تماثل الإطار ، أما الوصلة المماثلة لها a ، فتنحرف فى اتجاه أو نحو المحور المذكور . نرمز لهذا الانحراف بالرمز Z_3 . وفى



الشكل ١٠ ـ ٣٨

هذه الحالة نجد بأن مجموعة المعادلات القانونية لطريقة الانحرافات ، المؤلفة من ثلاث معادلات :

$$Z_1 r_{11} + Z_2 r_{12} + Z_3 r_{13} + R_{1q} = 0$$
$$Z_1 r_{21} + Z_2 r_{22} + Z_3 r_{23} + R_{2q} = 0$$
$$Z_1 r_{31} + Z_2 r_{32} + Z_3 r_{33} + R_{3q} = 0$$

تنقسم إلى مجموعتين مستقلتين من المعادلات ، وهما :

$$Z_1 r_{11} + Z_3 r_{13} + R_{1q} = 0$$
$$Z_1 r_{31} + Z_3 r_{32} + R_{3q} = 0$$

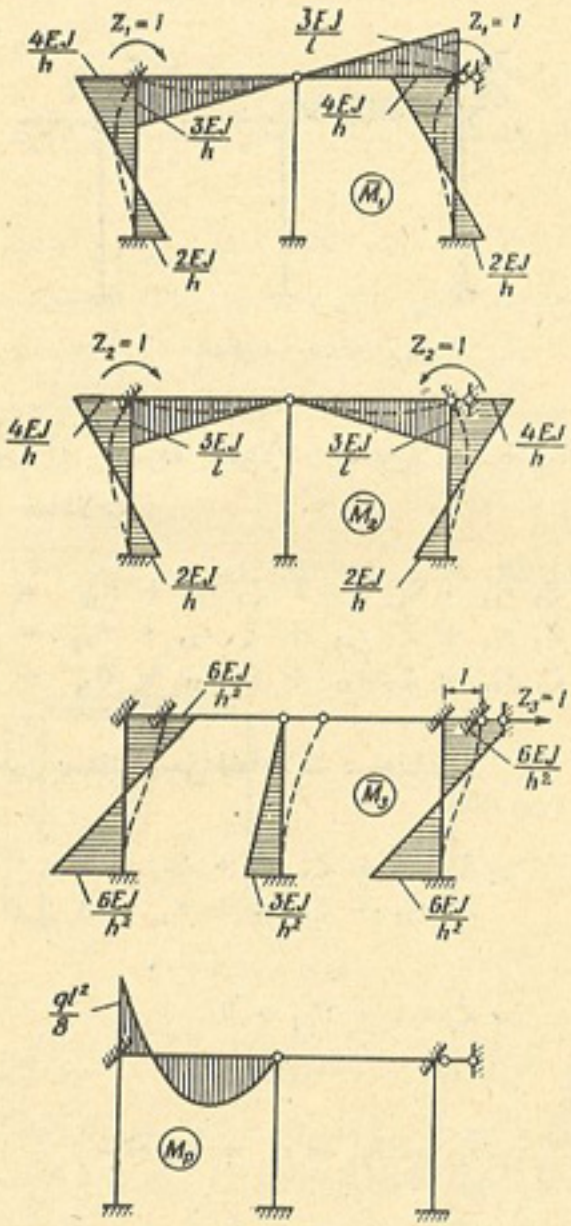
و

$$Z_2 r_{22} + R_{2q} = 0$$

وذلك لأن :

$$r_{12} = r_{23} = r_{21} = r_{32} = 0$$

أن الرسوم البيانية لعزوم الانحناء ، الناجمة عن وحدات مجموعات المجاهيل ، مبينة فى الشكل (١٠ ـ ٣٩) .



الشكل ١٠ — ٣٩

والمعاملات والحدود المطلقة للمعادلات القانونية ، ستساوى ما يلى :

$$r_{11} = \frac{4\,EJ}{h} + \frac{3\,EJ}{l} + \frac{3\,EJ}{l} + \frac{4\,EJ}{h} = \frac{14\,EJ}{l}$$

$$r_{22} = \frac{4\,EJ}{h} + \frac{3\,EJ}{l} + \frac{3\,EJ}{l} + \frac{4\,EJ}{h} = \frac{14\,EJ}{l}$$

$$r_{13} = r_{31} = -\frac{6\,EJ}{h^2} - \frac{6\,EJ}{h^2} = -\frac{12\,EJ}{l^2}$$

$$r_{33} = \frac{27\,EJ}{h^3} = \frac{27\,EJ}{l^3}$$

وبما أن $h = l$ ،

يكون لدينا :

$$R_{1p} = -\frac{q\,l^2}{8}\ ;\quad R_{2p} = -\frac{q\,l^2}{8}\ ;\quad R_{3p} = 0$$

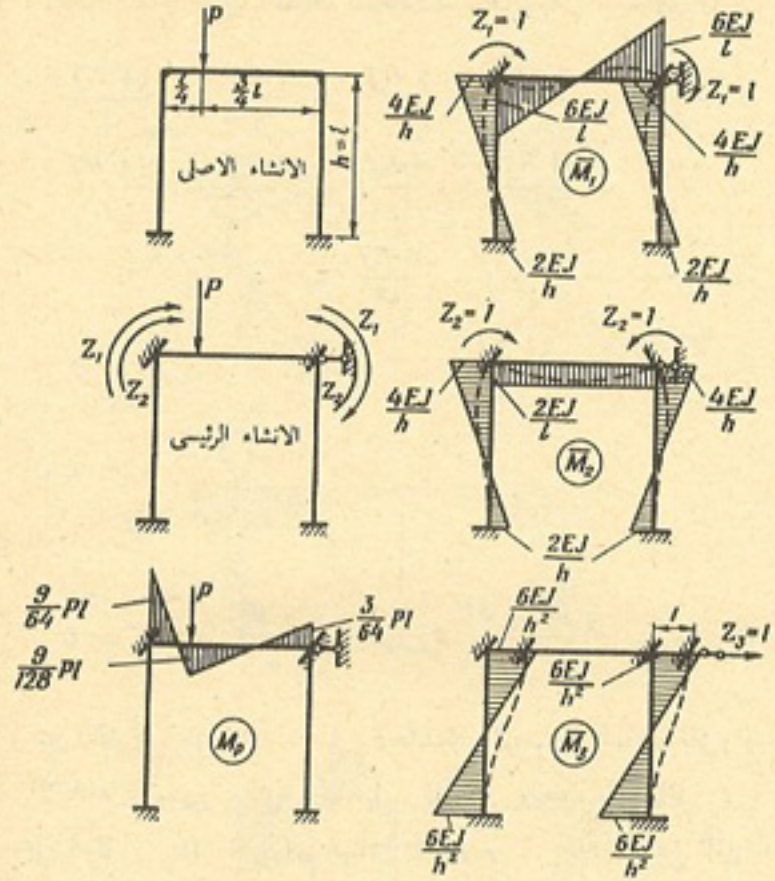
ويبين الشكل (١٠ — ٤٠) وحدات الرسوم البيانية لعزوم الانحناء (فى الإنشاء الرئيسى ذى المجاهيل المتماثلة والعكسية التماثل) ، للاطار الذى على هيئة Π ، والرسم البيانى للعزوم ، الناجمة عن تأثير الحمل . ونقترح على القارىء ، مراجعة صحة تخطيط الرسوم البيانية المذكورة ، وردود الفعل المذكورة أدناه (المعاملات والحدود المطلقة لمجموعة المعادلات القانونية) :

$$r_{11} = \frac{20\,EJ}{l}\ ;\quad r_{12} = r_{21} = 0$$

$$r_{22} = \frac{12\,EJ}{l}\ ;\quad r_{13} = r_{31} = -\frac{12\,EJ}{h^2}$$

$$r_{33} = \frac{24\,EJ}{h^3}\ ;\quad r_{23} = r_{32} = 0$$

$$R_{1p} = -\frac{3}{32}Pl\ ;\ R_{2p} = -\frac{3}{16}Pl\ ;\ R_{3p} = 0$$

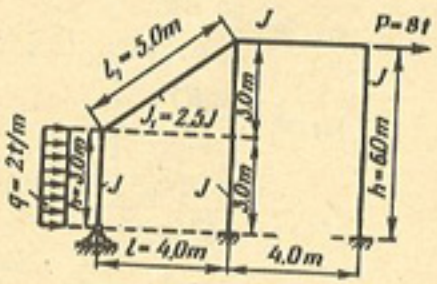


الشكل ١٠ – ٤٠

البند ١٠ – ١١ : مثال لحساب الإطار بطريقة الانحرافات

لنبحث تخطيط الرسوم البيانية لعزوم الانحناء وقوى القص والقوى الطولية ، الناجمة عن تأثير الحمل المعلوم ، فى الإطار المبين فى الشكل (١٠ – ٤١) .

إن أطوال قضبان الإطار ، والنسب بين عزوم القصور الذاتى لمقاطعها العرضية والرسم التخطيطى للحمل ، مبينة جميعاً فى الشكل (١٠ – ٤١) .



الشكل ١٠ – ٤١

١ – مقارنة عدد المجاهيل ، عند حساب الإطار بطريقة القوى وطريقة الانحرافات

إن درجة عدم التحديد الاستاتيكى للإطار (بالتالى عدد المجاهيل عند حساب الإطار المذكور بطريقة القوى) تساوى ما يلى :

$$i = 2 \times 3 - 1 = 5$$

وعدد زوايا الدوران المجهولة للوصلات ، يساوى :

$$n_r = 3$$

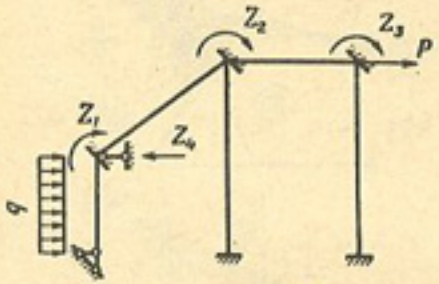
وعدد الانحرافات الخطية المجهولة للوصلات ، يساوى :

$$n_d = 1$$

والعدد الكلى للمجاهيل ، عند حساب الإطار بطريقة الانحرافات ، يساوى ما يلى : $n = 3 + 1 = 4$ أى أنه أقل مما هو عليه فى حالة طريقة القوى .

٢ – اختيار الإنشاء الرئيسى

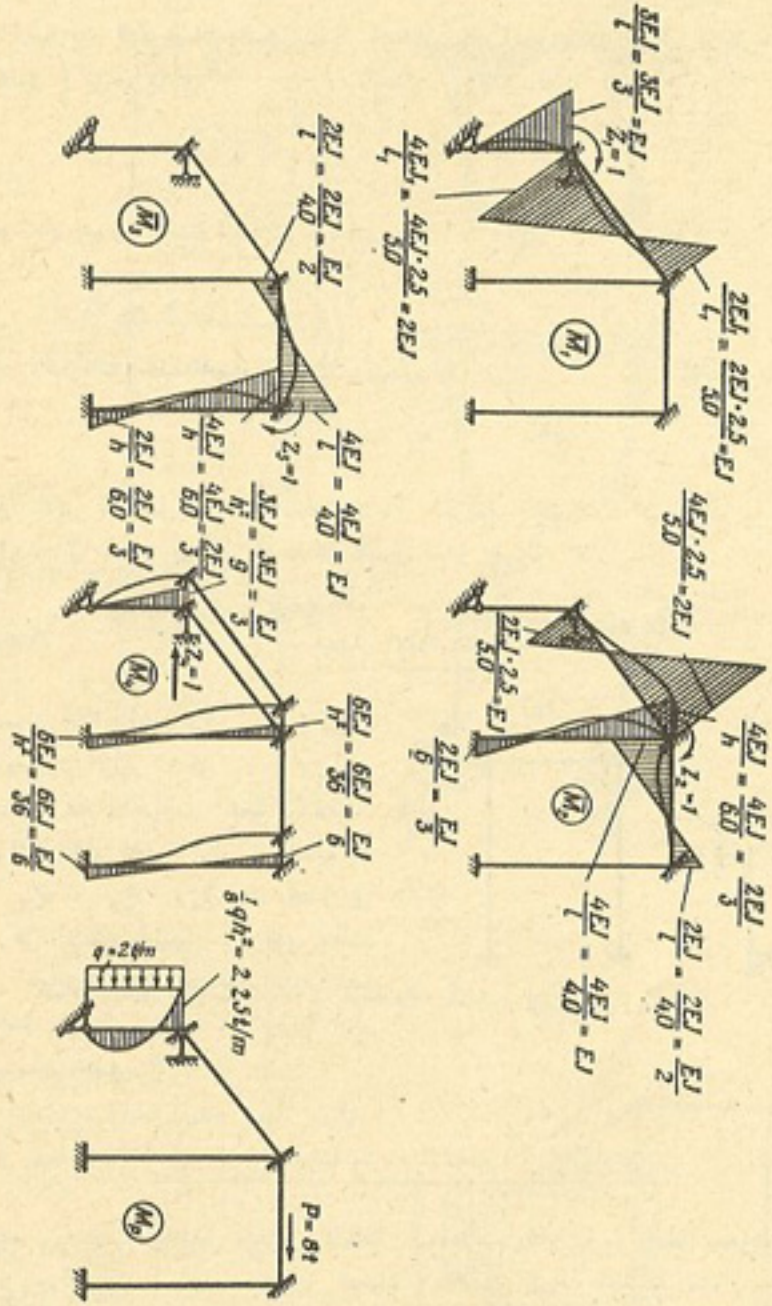
نستحدث ثلاثة أطراف مبيتة (نهايات مثبتة) فى وصلات الإطار (شكل ١٠ – ٤٢) ، مع قضيب أفقى يمنع الانحرافات الخطية للوصلات . ونرمز إلى الانحرافات المجهولة بالرموز التالية : Z_1 ، Z_2 ، Z_3 و Z_4 ، ونحصل فى النتيجة على الإنشاء الرئيسى ، الذى يتألف من اربع عتبات ، مثبتة من طرفيها ، وعتبة واحدة مثبتة من طرف واحد ، وطرفها الثانى يرتكز على مسند مفصل .



الشكل ١٠ – ٤٢

٣ – تخطيط الرسوم البيانية لعزوم الانحناء ، للإنشاء الرئيسى

لحساب معاملات المجاهيل والحدود المطلقة للمعادلات القانونية ، تخطط وحدات الرسوم البيانية لعزوم الانحناء (الرسوم البيانية التخيلية) والرسوم البيانية الحقيقية لعزوم الانحناء الناجمة عن تأثير الحمل (فى هذا المثال يعبر عن قيم جميع العزوم بالأطنان والأمتار) . وهذه الرسوم البيانية المذكورة ، موضحة فى الشكل (١٠ – ٤٣) .



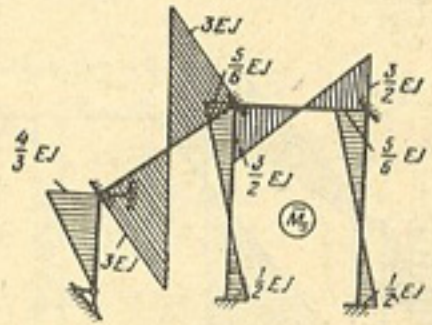
الشكل ١٠ – ٤٣

٤ – تحديد المعاملات والحدود المطلقة لمجموعة المعادلات القانونية

إن طريقة تحديد المعاملات والحدود المطلقة ، أى ردود الفعل الناجمة فى الإنشاء الرئيسى ، مبينة فى الجدول (١٠ – ٣) .

٥ – مراجعة المعاملات والحدود المطلقة لمجموعة المعادلات القانونية

لضبط ومراجعة معاملات المعادلات وحدودها المطلقة ، نخطط الرسم البيانى للعزوم M_s (شكل ١٠ – ٤٤) ، بطريقة جمع أربع وحدات للرسوم البيانية ، المبينة فى الشكل (١٠ – ٤٣) .



الشكل ١٠ – ٤٤

وبضرب الرسم البيانى للعزوم $\overline{M}_s$ فى الرسم البيانى للعزوم $\overline{M}_s$ (أى فى نفسه) نحصل على ما يلى :

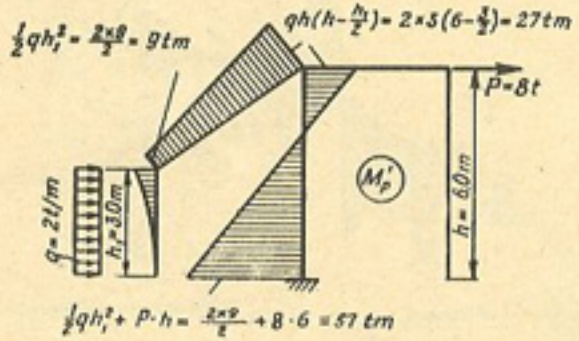
$$r_{ss} = \Sigma \int \overline{M}_s^2 \frac{ds}{EJ} = \Big[\frac{3\,(EJ)^2}{6\,EJ}\, 2 \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} + \frac{5\,(EJ)^2}{6 \times 2.5 EJ} (2 \times 3^2 + 2 \times 3^2 - 2 \times 3^2) + \frac{4\,(EJ)^2}{6\,EJ} \Big(2 \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} + 2 \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} - 2 \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \Big) + \frac{6\,(EJ)^2}{6\,EJ} \Big(2 \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} + 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{2} \Big) 2 \Big] = \frac{116\ EJ}{9} = 12\frac{8}{9} EJ$$

ونحسب الآن مجموع كافة المعاملات المدرجة فى الجدول (١٠ – ٣) :

$$\Sigma r = r_{11} + r_{22} + r_{33} + r_{44} + 2\,(r_{12} + r_{13} + r_{14} + r_{23} + r_{24} + r_{34}) =$$
$$= EJ\left(3 + \frac{11}{3} + \frac{5}{8} + \frac{2}{9}\right) + 2EJ\left(1 + 0 + \frac{1}{3} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) = \frac{116\,EJ}{9} = 12\,\frac{8}{9}EJ$$

وبمقارنة قيمة مجموع المعاملات المستخرجة ، مع نتيجة ضرب الرسوم البيانية ، نتأكد من أنها تساوى بعضها البعض ، أى يتحقق الشرط (10 — 10) .

ونقوم الآن بمراجعة الحدود المطلقة (حدود التحميل) . ولهذا الغرض ، نخطط الرسم البيانى للعزوم M'_p ، الناجمة عن تأثير الحمل الخارجى ، فى الإنشاء المحدد استاتيكيا الناجم عن الإنشاء المعلوم ، بعد حذف أو رفع الأربطة الزائدة . وهذا الرسم البيانى ، موضح فى الشكل (١٠ — ٤٥) .



الشكل ١٠ — ٤٥

وبضرب الرسم البيانى للعزوم M'_p فى الرسم البيانى للعزوم $\overline{M}_s$ (راجع الصيغة [(10 — 12)] :

$$\Sigma \int \overline{M}_s M'_p \frac{ds}{EJ} = \frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{3} \times 9 \times 3 \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{3}\,EJ\right) + \frac{5\,EJ}{6 \times 2.5\,EJ} \times$$
$$\times (-2 \times 9 \times 3 + 2 \times 27 \times 3 - 27 \times 3 + 9 + 3) +$$
$$+ \frac{6\,EJ}{6\,EJ}\left(-2 \times \frac{1}{2} \times 57 - 2 \times \frac{5}{6} \times 27 + 27 \times \frac{1}{2} + \right.$$
$$\left. + 57 \times \frac{5}{6}\right) = -14 = -R_{1p}$$

ومنها ينتج أن :

$$R_{1p} = 14$$

أما مجموع معاملات التحميل (راجع الجدول ١٠ — ٣) ، فيساوى ما يلى :

$$\Sigma R = R_{1p} + R_{2p} + R_{3p} + R_{4p} = 2.25 + 0 + 0 + 11.75 = 14.00$$

وبمقارنة هاتين النتيجتين مع بعضهما ، نتأكد من تحقق الشرط (13 — 10) ، وأن الحدود المطلقة صحيحة .

والآن ننتقل إلى حل المعادلات القانونية بواسطة الطريقة المختصرة .

٦ — حل مجموعة المعادلات القانونية

إن المعادلات القانونية التى تنفى وجود ردود الفعل فى الأربطة المضافة للإنشاء الرئيسى ، تكون على الشكل التالى :

$$\begin{aligned}
Z_1\,r_{11} + Z_2\,r_{12} + Z_3\,r_{13} + Z_4\,r_{14} + R_{1p} &= 0\\
Z_1\,r_{21} + Z_2\,r_{22} + Z_3\,r_{23} + Z_4\,r_{24} + R_{2p} &= 0\\
Z_1\,r_{31} + Z_2\,r_{32} + Z_3\,r_{33} + Z_4\,r_{34} + R_{3p} &= 0\\
Z_1\,r_{41} + Z_2\,r_{42} + Z_3\,r_{43} + Z_4\,r_{44} + R_{4p} &= 0
\end{aligned}$$

وإذا عوضنا فى هذه المجموعة من المعادلات ، القيم العددية للمعاملات والحدود ، سوف نحصل على ما يلى :

$$3\,Z_1 + Z_2 + \frac{1}{3}Z_4 + \frac{2.25}{EJ} = 0 \qquad \left(S_1 = \frac{13}{3}\right)$$
$$Z_1 + \frac{11}{3}Z_2 + \frac{1}{2}Z_3 + \frac{1}{6}Z_4 = 0 \qquad \left(S_2 = \frac{16}{3}\right)$$
$$\frac{1}{2}Z_2 + \frac{5}{3}Z_3 + \frac{1}{6}Z_4 = 0 \qquad \left(S_3 = \frac{7}{3}\right)$$
$$\frac{1}{3}Z_1 + \frac{1}{6}Z_2 + \frac{1}{6}Z_3 + \frac{2}{9}Z_4 + \frac{11.75}{EJ} = 0 \qquad \left(S_4 = \frac{8}{9}\right)$$

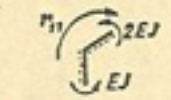
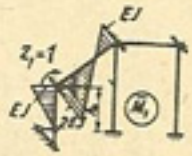
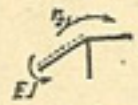
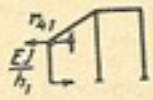
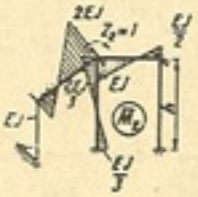
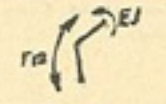
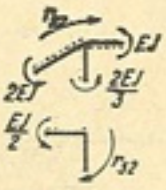
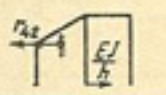
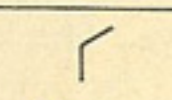
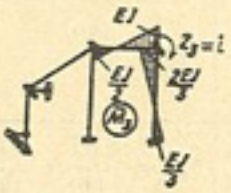
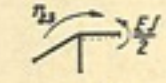
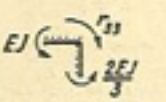
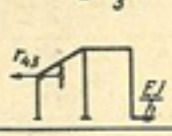
وفى داخل الأقواس ، توجد قيم S — التى تمثل مجموع معاملات المعادلات .

وسوف نقوم بحل المعادلات على هيئة جدول ، باستخدام الطريقة المختصرة ، كما مبين فى الجدول (١٠ — ٤) .

ومن المعادلة رقم (IV) ، نجد ما يلى :

$$Z_4 = -\frac{175740 \times 206280}{15280\,EJ \times 34760} = -68.253\,\frac{1}{EJ}$$

جدول ١٠ — ٣

الإجهاد المطلوب تحديده	الرسم التخطيطي للإنشاء الرئيسي، الذي ينشأ فيه الإجهاد المطلوب	الرسم التخطيطي للوصلة المقطوعة، أو القسم المقطوع من الإطار، الذي سنوضع له فيما بعد معادلات التوازن	معادلة التوازن	حل المعادلة	النتيجة
r_{11}			$r_{11} - 2EJ - EJ = 0$	$r_{11} = 2EJ + EJ = 3EJ$	$r_{11} = 3EJ$
r_{21}			$r_{21} - EJ = 0$	$r_{21} = EJ$	$r_{21} = EJ$
r_{31}			$r_{31} = 0$	$r_{31} = 0$	$r_{31} = 0$
r_{41}			$-r_{41} + \frac{EJ}{h_1} = 0$	$r_{41} = \frac{EJ}{h_1} = \frac{EJ}{3}$	$r_{41} = \frac{EJ}{3}$
r_{12}			$r_{12} - EJ = 0$	$r_{12} = EJ$	$r_{12} = EJ$
r_{22}			$r_{22} - EJ - \frac{2EJ}{3} - 2EJ = 0$	$r_{22} = EJ = \frac{2EJ}{3} + 2EJ = \frac{11EJ}{3}$	$r_{22} = \frac{11EJ}{3}$
r_{32}			$r_{32} - \frac{EJ}{2} = 0$	$r_{32} = \frac{EJ}{2}$	$r_{32} = \frac{EJ}{2}$
r_{42}			$-r_{42} = \frac{\frac{2EJ}{3} + \frac{EJ}{3}}{h} = 0$	$r_{42} = \frac{2EJ}{18} + \frac{EJ}{18} = \frac{EJ}{6}$	$r_{42} = \frac{EJ}{6}$
r_{13}			$r_{13} = 0$	—	$r_{13} = 0$
r_{23}			$r_{23} - \frac{EJ}{2} = 0$	$r_{23} = \frac{EJ}{2}$	$r_{23} = \frac{EJ}{3}$
r_{33}			$r_{33} - \frac{2EJ}{3} - EJ = 0$	$r_{33} = \frac{2EJ}{3} + EJ = \frac{5EJ}{3}$	$r_{33} = \frac{5EJ}{3}$
r_{43}			$-r_{43} = \frac{\frac{2EJ}{3} + \frac{EJ}{3}}{h} = 0$	$r_{43} = \frac{2EJ}{3 \times 6} + \frac{EJ}{3 \times 6} = \frac{EJ}{6}$	$r_{43} = \frac{EJ}{6}$

تابع جدول ١٠ — ٣

الإجهاد المطلوب تحديده	الرسم التخطيطي للإنشاء الرئيسي ، التي ينشأ فيه الإجهاد المطلوب	الرسم التخطيطي للوصلة المقطوعة ، أو القسم المقطوع من الإطار ، التي ستوضع له فيما بعد ، معادلات التوازن	معادلة التوازن	حل المعادلة	النتيجة
r_{14}		r_{14} $\frac{EJ}{3}$	$r_{14} - \frac{EJ}{3} = 0$	$r_{14} = \frac{EJ}{3}$	$r_{14} = \frac{EJ}{3}$
r_{24}		r_{24} $\frac{EJ}{6}$	$r_{24} - \frac{EJ}{6} = 0$	$r_{24} = \frac{EJ}{6}$	$r_{24} = \frac{EJ}{6}$
r_{34}		r_{34} $\frac{EJ}{6}$	$r_{34} - \frac{EJ}{6} = 0$	$r_{34} = \frac{EJ}{6}$	$r_{34} = \frac{EJ}{6}$
r_{44}		r_{44} $\frac{EJ}{9}$ $\frac{EJ}{18}$ $\frac{EJ}{18}$	$-r_{44} + \frac{EJ}{9} + \frac{EJ}{18} + \frac{EJ}{18} = 0$	$r_{44} = \frac{2EJ}{18} + \frac{EJ}{18} + \frac{EJ}{18} = \frac{4EJ}{18}$	$r_{44} = \frac{2EJ}{9}$

R_{1p}		$R_{1p} - \frac{qh_1^2}{8} = 0$	$R_{1p} = \frac{qh_1^2}{8} = \frac{2\times3^2}{8} = 2.25$ tm	$R_{1p} = 2.25$ tm
R_{2p}		$R_{2p} = 0$	—	$R_{2p} = 0$
R_{3p}		$R_{3p} = 0$	—	$R_{3p} = 0$
R_{4p}		$-R_{4p} + qh_1 - \frac{3}{8}qh_1 + P = 0$	$R_{4p} = +qh_1 - \frac{3}{8}qh_1 + P = 2\times3 - \frac{3}{8}\times2\times3 + 8 = 11.75$ t	$R_{4p} = 11.75$ t

جدول ١٠ – ٤

رقم المعادلة	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	عوامل الضرب α_{ik}	S	K
(I)	3	1	0	$\frac{1}{3}$	$a_{12} = -\frac{1}{3}$ $a_{13} = 0$ $a_{14} = -\frac{1}{9}$	$\frac{13}{3}$	$-\frac{9}{4EJ}$
$+\begin{cases}(2)\\(I)\times a_{12}\end{cases}$	. .	$\frac{11}{3}$ $-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$ 0	$\frac{1}{6}$ $-\frac{1}{9}$		$\frac{16}{3}$ $-\frac{13}{9}$	0 $\frac{3}{4EJ}$
(II)	.	$\frac{10}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{18}$	$a_{23} = -\frac{3}{20}$ $a_{24} = -\frac{1}{60}$	$\frac{35}{9}$	$\frac{3}{4EJ}$
$+\begin{cases}(3)\\(I)\times a_{13}\\(II)\times a_{23}\end{cases}$	. . .	. . .	$\frac{5}{3}$ 0 $-\frac{3}{40}$	$\frac{1}{6}$ 0 $-\frac{1}{120}$		$\frac{7}{3}$ 0 $-\frac{35}{60}$	0 0 $\frac{9}{80EJ}$
(III)	.	.	$\frac{191}{120}$	$\frac{19}{120}$	$a_{34} = -\frac{19}{191}$	$\frac{210}{120}$	$-\frac{9}{80EJ}$
$+\begin{cases}(4)\\(I)\times a_{14}\\(II)\times a_{24}\\(III)\times a_{34}\end{cases}$	. . . .	. . . .	. . . .	$\frac{2}{9}$ $-\frac{1}{27}$ $-\frac{1}{1080}$ $-\frac{361}{22920}$		$\frac{8}{9}$ $-\frac{13}{27}$ $-\frac{35}{540}$ $-\frac{210\times 19}{120\times 191}$	$-\frac{47}{4EJ}$ $\frac{1}{4EJ}$ $-\frac{1}{80EJ}$ $\frac{9\times 19}{80\times 191EJ}$
(IV)	.	.	.	$\frac{34760}{206280}$		$\frac{34760}{206280}$	$-\frac{175740}{15280EJ}$

ومن المعادلة رقم (III) ، نجد ما يلي :

$$\frac{191}{120}\,Z_3 + \frac{19}{120}\left(-\,68.253\,\frac{1}{EJ}\right) = -\,\frac{9}{80\,EJ}$$

ومنها ينتج أن :

$$Z_3 = +\,6.719\,\frac{1}{EJ}$$

ومن المعادلة رقم (II) نجد بأن :

$$\frac{10}{3}\,Z_2 + \frac{1}{2}\times 6.719\,\frac{1}{EJ} + \frac{1}{18}\left(-\,68.253\,\frac{1}{EJ}\right) = \frac{3}{4}\times\frac{1}{EJ}$$

ومنها نحدد قيمة Z_2 :

$$Z_2 = 0.355\,\frac{1}{EJ}$$

ومن المعادلة رقم (I) نجد ما يلي :

$$3\,Z_1 + 1\times 0.355\,\frac{1}{EJ} + \frac{1}{3}\left(-\,68.253\,\frac{1}{EJ}\right) = -\,\frac{9}{4\,EJ}$$

ومنها ينتج أن :

$$Z_1 = 6.715\,\frac{1}{EJ}$$

ولمراجعة صحة الحل ، نعوض القيم المستخرجة للمجاهيل ، في كافة معادلات المجموعة القانونية :

$$1)\ 3\times Z_1 + 1\times Z_2 + \frac{1}{3}\times Z_4 + 2.25\,\frac{1}{EJ} = 3\times 6.715\,\frac{1}{EJ} +$$
$$+\,1\times 0.355\,\frac{1}{EJ} + \frac{1}{3}\left(-\,68.253\,\frac{1}{EJ}\right) + 2.25\,\frac{1}{EJ} = 0$$

$$2)\ 1 \times Z_1 + \frac{11}{3} Z_2 + \frac{1}{2} Z_3 + \frac{1}{6} Z_4 = 1 \times 6.715 \frac{1}{EJ} +$$
$$+ \frac{11}{3} \times 0.355 \frac{1}{EJ} + \frac{1}{2} \times 6.719 \frac{1}{EJ} +$$
$$+ \frac{1}{6}\left(- 68.253 \frac{1}{EJ}\right) = 0$$

$$3)\ \frac{1}{2} Z_2 + \frac{3}{5} Z_3 + \frac{1}{6} Z_4 = \frac{1}{2} \times 0.355 \frac{1}{EJ} +$$
$$+ \frac{5}{3} \times 6.719 \frac{1}{EJ} + \frac{1}{6} \times \left(- 68.253 \frac{1}{EJ}\right) = 0$$

$$4)\ \frac{1}{3} Z_1 + \frac{1}{6} Z_2 + \frac{1}{6} Z_3 + \frac{2}{9} Z_4 + 11.75 \frac{1}{EJ} = \frac{1}{3} \times$$
$$\times 6.715 \frac{1}{EJ} + \frac{1}{6} \times 0.355 \frac{1}{EJ} + \frac{1}{6} \times 6.719 \frac{1}{EJ} +$$
$$+ \frac{2}{9}\left(- 68.253 \frac{1}{EJ}\right) + 11.75 \frac{1}{EJ} = 0$$

وفى جميع الحالات نحصل على تطابق تام ، إذن نستنتج بأن قيم المجاهيل ، قد حددت بصورة مضبوطة .

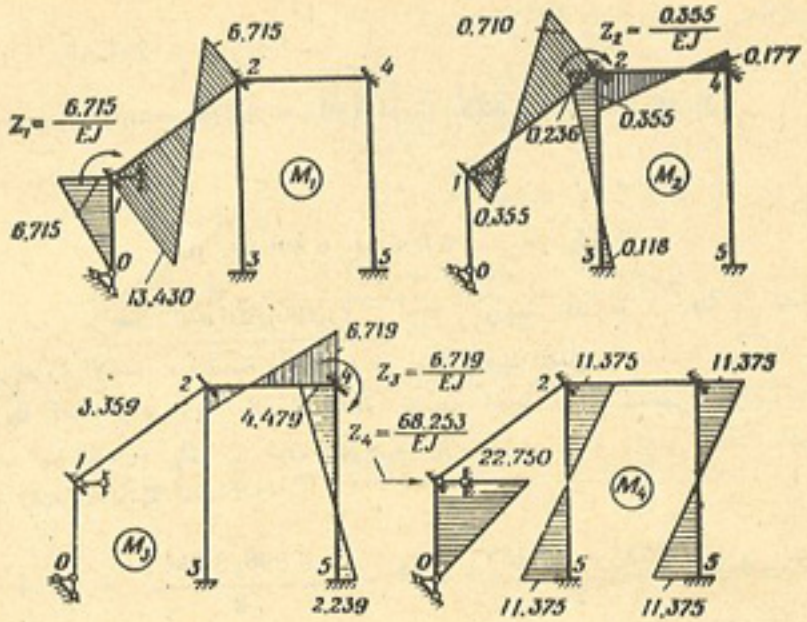
٧ – تخطيط الرسم البيانى لعزوم الانحناء

إن الاحداثيات الرأسية للرسم البيانى النهائى للعزوم ، محسوبة من الصيغة (4 — 10) .

ويبين الشكل (١٠ – ٤٦) ، الرسوم البيانية ، الناجمة عن ضرب وحدات الرسوم البيانية (شكل ١٠ – ٤٣) فى قيم المجاهيل :

$$M_1 = \overline{M}_1 Z_1 \quad ; \quad M_2 = \overline{M}_2 Z_2$$
$$M_3 = \overline{M}_3 Z_3 \quad ; \quad M_4 = \overline{M}_4 Z_4$$

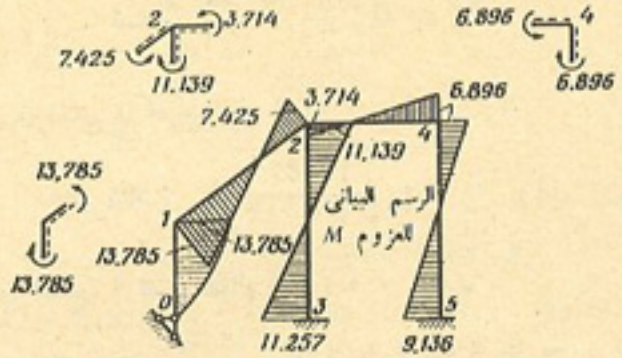
وبجمع الإحداثيات الرأسية لكافة هذه الرسوم البيانية ، مع الإحداثيات الرأسية للرسم البيانى للعزوم M_p (لاحظ الشكل ١٠ – ٤٣) ، نحصل على الرسم البيانى النهائى لعزوم الانحناء المبين فى الشكل (١٠ – ٤٧) . وإحداثياته الرأسية موضوعة من جهة الألياف المشدودة .



الشكل ١٠ – ٤٦

٨ – مراجعة الرسم البيانى لعزوم الانحناء

(أ) المراجعة الاستاتيكية : نقطع وصلات الإطار ، ونراجع توازن العزوم المؤثرة فيها (لاحظ الشكل ١٠ – ٤٧) .



الشكل ١٠ – ٤٧

الوصلة 1

$$\Sigma M_1 = + 13.785 - 13.785 = 0$$

الوصلة 2 :

$$\Sigma M_2 = -7.425 + 11.139 - 3.714 = 0$$

الوصلة 4 :

$$\Sigma M_4 = -6.896 + 6.896 = 0$$

(ب) مراجعة الانحراف (التشوه) : نقوم بمراجعة المساحة المكافئة ، المحاطة بالرسم البيانى لعزوم الانحناء ، المقسومة على J ، على امتداد المحيط المقفل 5 — 4 — 2 — 3 .

ولما كانت J متساوية بالنسبة لكافة قضبان المحيط ، إذن تتلخص المراجعة هنا ، فى حساب قيمة المقدار Ω_M . سوف نعتبر بأن الإحداثيات الرأسية للرسم البيانى ، الموضوعة فى داخل المحيط ، موجبة العلامة :

$$\Omega_M = -\frac{11.257 - 11.139}{2} \times 6 - \frac{6.896\ 3.714}{2} \times 4 + \frac{9.136 - 6.896}{2} \times 6 = -6.718 + 6.720 \approx 0$$

٩ — تخطيط الرسم البيانى لقوة القص Q

لتخطيط الرسم البيانى لقوى القص Q ، نستخدم الصيغة التالية :

$$Q_n = Q_n^0 + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n}$$

إن قوة القص فى المقطع 0 للضلع القائم 1 — 0 ، تساوى :

$$Q_{01} = 3 + \frac{13.785}{3} = 7.595 \text{ tons}$$

وقوة القص فى المقطع 1 للضلع القائم 0 — 1 ، تساوى :

$$Q_{10} = +3 - 2 \times 3 + \frac{13.785}{3} = 1.595 \text{ tons}$$

وقوة القص فى مقاطع العارضة المائلة 2 — 1 ، تساوى :

$$Q_{12} = Q_{21} = -\frac{13.785 + 7.425}{5} = -4.242 \text{ tons}$$

وقوة القص فى مقاطع الضلع القائم 3 — 2 تساوى :

$$Q_{23} = Q_{32} = \frac{11.139 + 11.257}{6} = 3.733 \text{ tons}$$

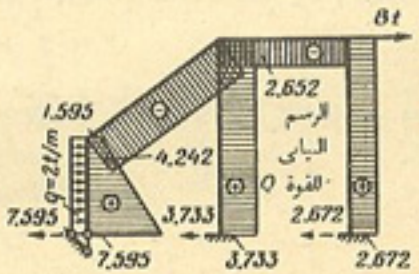
وقوة القص فى مقاطع العارضة 4 — 2 ، تساوى :

$$Q_{24} = Q_{42} = \frac{3.714 + 6.896}{4} = -2.652 \text{ tons}$$

وقوة القص فى مقاطع الضلع القائم 5 — 4 تساوى :

$$Q_{45} = Q_{54} = \frac{6.896 + 9.136}{6} = 2.672 \text{ tons}$$

إن الرسم البيانى لقوى القص Q ، مبين فى الشكل (١٠ — ٤٨) .



الشكل ١٠ — ٤٨

١٠ — مراجعة الرسم البيانى لقوى القص Q

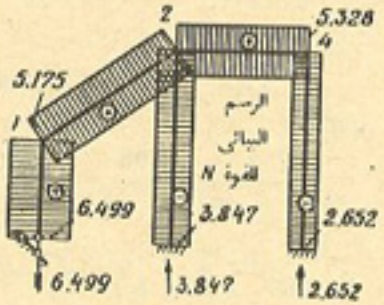
نستحدث مقطعاً سفلياً فى جميع الأضلاع القائمة الثلاثة ونضع معادلة مساقط كافة القوى ، المؤثرة فى القسم العلوى المقطوع ، على المحور الأفقى x :

$$\Sigma X = 2 \times 3 + 8 - 7.595 - 3.733 - 2.672 = 0$$

١١ — تخطيط الرسم البيانى للقوى الطولية N

لتخطيط الرسم البيانى للقوى الطولية N ، نقطع على التوالى ، جميع وصلات الإطار ، ومن معادلة المساقط على المحور الأفقى ، نحدد قيم القوى الطولية . وسوف نصطلح فى هذه الحالة ، على اعتبار

القوة الطولية الشادة موجبة . إن جميع معادلات الحساب مبينة فى الجدول (١٠ — ٥) . والرسم البيانى للقوى الطولية ، موضح فى الشكل (١٠ — ٤٩) .



الشكل ١٠ — ٤٩

١٢ — مراجعة الرسم البيانى للقوى الطولية N

نستحدث مقطعاً سفلياً فى الأضلاع القائمة ، ونضع معادلة مجموع مساقط القوى المؤثرة فى القسم المقطوع ، على المحور الرأسى y :

$$\Sigma Y = -6.499 + 3.847 + 2.652 = 0$$

و إلى هنا ينتهى حساب الإطار .

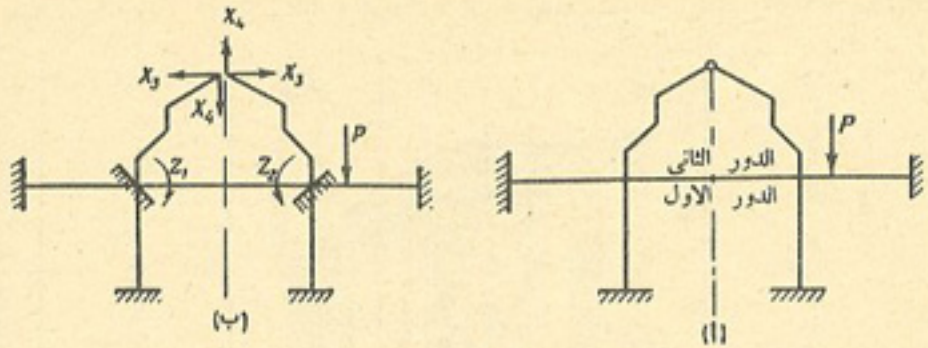
البند ١٠ — ١٢ : الطريقة المختلطة

عند الحساب بالطريقة المختلطة ، نجد بأن قسماً من المجاهيل يمثل الإجهادات (كما هى الحالة عند الحساب بطريقة القوى) ، والقسم الآخر يمثل الانحرافات (كما هى الحالة عند الحساب بطريقة الانحرافات) . والقيم المجهولة ، تمثل فى نفس الوقت الإجهادات (القوى والعزوم) ، والانحرافات (زوايا الدوران والانحرافات الانتقالية) .

وسوف ندرس الطريقة المختلطة ، ببحث الإنشاء المبين فى الشكل (١٠ — ٥٠ ، أ) على سبيل المثال . نحسب درجة عدم التحديد الاستاتيكى

جدول ١٠ — ٥

	معادلات التوازن	حل المعادلات
الوصلة المقطوعة من الإطار ، مع القوى الداخلية والخارجية المؤثرة فيها (من الرسم البيانى Q (شكل ١٠ — ٤٨))	$\Sigma Y = N_{43} + 2.652 = 0$ $\Sigma X = N_{42} + 2.672 - 8.0 = 0$	$N_{43} = -2.652$ t $N_{42} = 8.0 - 2.672 = 5.328$ t
	$\Sigma X = N_{21} \sin \alpha - 4.242 \cos \alpha + 3.733 - 5.328 = 0$ $\Sigma Y = N_{23} - 2.652 + 5.175 \cos \alpha + 4.242 \sin \alpha = 0$	$N_{21} = \dfrac{4.242 \cos \alpha - 3.733 + 5.328}{\sin \alpha} = \dfrac{4.242 \times \frac{3}{5} - 3.733 + 5.328}{\frac{4}{5}} = 5.175$ t $N_{23} = 2.652 - 5.175 \times \frac{3}{5} - 4.242 \times \frac{4}{5} = -3.847$ t
	$\Sigma Y = N_{10} - 4.242 \cos \beta - 5.175 \sin \beta = 0$	$N_{10} = 4.242 \times \frac{4}{5} + 5.175 \times \frac{3}{5} = 6.499$ t



الشكل ١٠ — ٥٠

لطوابق هذا الانشاء ، وعدد الانحرافات الزاوية والخطية المجهولة لوصلاته ، وندرج نتيجة هذا الحساب فى الجدول (١٠ — ٦) .

وينتج من الجدول (١٠ — ٦) ، أنه عند حساب الطابق الأول من الإنشاء المعلوم ، يكون من الأسهل استخدام طريقة الانحرافات ، أما عند حساب الطابق الثانى ، فمن الأسهل استخدام طريقة القوى .

جدول ١٠ — ٦

الطابق	درجة عدم التحديد الاستاتيكى	عدد الانحرافات الزاوية والخطية المجهولة
الأول	9	2
الثانى	2	12
المجموع	11	14

وضعت طريقة الحساب ، التى تعتبر فيها المجاهيل الانحرافات والإجهادات فى نفس الوقت ، فى عام ١٩٢٧ من قبل الأستاذ كفوزديف ، وتسمى بالطريقة المختلطة .

إن استخدام هذه الطريقة ، بالنسبة للانشاء الذى نبحثه الآن

(لاحظ الشكل ١٠ — ٥٠ ، أ) ، يساعد على اختصار المسألة وتحويلها إلى حل أربع معادلات ، تحتوى على أربعة مجاهيل ، بدلا من ١١ مجهولا (راجع الجدول ١٠ — ٦) ، عند الحساب بطريقة القوى ، و ١٤ مجهولا عند الحساب بطريقة الانحرافات . ومن السهل اعتبار المجاهيل ، زوايا دوران وصلات الطابق الأول ، والإجهادات الناشئة فى المفصلة العليا . إن الإنشاء الرئيسى للطريقة المختلطة ، مبين فى الشكل (١٠ — ٥٠ ، ب) . وقد حصلنا عليه ، بإزالة (حذف) الأربطة ، من القسم العلوى للاطار ، وإضافتها إلى القسم السفلى .

والآن نضع المعادلات القانونية للطريقة المختلطة ، التى تتلخص الغاية منها ، فى أن ردود الفعل الناجمة فى الإنشاء الرئيسى ، فى الأربطة المضافة ، فى اتجاهى الانحرافين المجهولين Z_1 و Z_2 ، وكذلك الانحرافات فى اتجاهى الإجهادين المجهولين X_3 و X_4 ، تكون جميعاً مساوية للصفر :

$$\begin{aligned} Z_1 r_{11} + Z_2 r_{12} + X_3 r_{13} + X_4 r_{14} + R_{1p} &= 0 \\ Z_1 r_{21} + Z_2 r_{22} + X_3 r_{23} + X_4 r_{24} + R_{2p} &= 0 \\ Z_1 \delta_{31} + Z_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} + X_4 \delta_{34} + \Delta_{3p} &= 0 \\ Z_1 \delta_{41} + Z_2 \delta_{42} + X_3 \delta_{43} + X_4 \delta_{44} + \Delta_{4p} &= 0 \end{aligned} \qquad (10 — 15)$$

والآن نبحث بالتفصيل المعادلة الأولى من هذه المعادلات ونحدد معنى كل حد من حدودها :

$Z_1 r_{11}$ — رد الفعل فى الإنشاء الرئيسى ، الناجم فى الطرف المبيت الأول ، نتيجة لدورانه بزاوية تساوى Z_1 ؛

$Z_2 r_{12}$ — رد الفعل فى الإنشاء الرئيسى ، الناجم فى الطرف المبيت الأول ، نتيجة لدوران الطرف المبيت الثانى بزاوية تساوى Z_2 ؛

$X_3 r_{13}$ — رد الفعل فى الإنشاء الرئيسى ، الناجم فى الطرف المبيت الأول ، نتيجة لتأثير القوى X_3 ؛

$X_4 r_{14}$ — رد الفعل فى الإنشاء الرئيسى ، الناجم فى الطرف المبيت الأول ، نتيجة لتأثير القوى X_4 ؛

R_{1p} — رد الفعل فى الإنشاء الرئيسى ، الناجم فى الطرف المبيت الأول ، نتيجة لتأثير الحمل الخارجى المعلوم .

إن مجموع ردود الفعل المستخرجة يساوى صفراً ، وذلك لعدم وجود طرف مبيت فى الواقع ، وبالتالى لا وجود لردود فعله . وهكذا تكون ، المعادلة الأولى ، هى المعادلة الاستاتيكية ، وتعبر عن مساواة العزم المفاعل ، الناجم فى الطرف الأول المبيت ، نتيجة لتأثير القوى المجهولة والحمل الخارجى ، للصفر .

وتعبر المعادلة الثانية عن نفس الفكرة تماماً .

والآن ، لنبحث المعادلة الثالثة ، ونحدد فكرة كل حد من حدودها :

$\delta_{31}\ z_1$ — الانحراف فى الإنشاء الرئيسى ، فى اتجاه القوة X_3 ، الناجم عن دوران الطرف المبيت الأول ، بزاوية z_1 ؛

$\delta_{32}\ z_2$ — الانحراف فى الإنشاء الرئيسى ، فى اتجاه القوة X_3 ، الناجم عن دوران الطرف المبيت الثانى بزاوية z_2 ؛

$\delta_{33}\ X_3$ — الانحراف فى الإنشاء الرئيسى ، فى اتجاه X_3 ، الناجم عن القوى X_3 ؛

$\delta_{34}\ X_4$ — الانحراف فى الإنشاء الرئيسى ، فى اتجاه X_3 ، الناجم عن القوى X_4 ؛

Δ_{3p} — الانحراف فى الإنشاء الرئيسى ، فى اتجاه X_3 ، الناجم عن الحمل الخارجى المعلوم .

إن مجموع الانحرافات المستخرجة يساوى صفراً ، وذلك لأن المفصلة العليا غير مقطوعة فى الواقع ، لذلك لا يمكن أن تتباعد نقاط تأثير القوى X_3 . وهكذا نجد بأن المعادلة الثالثة ، تعبر عن مساواة الانحراف للصفر ، ويمكن تسميه هذه المعادلة بالمعادلة الكينماتية .

وتعبر المعادلة الأخيرة عن نفس الفكرة تماماً .

ويمكن تقسيم معاملات المجاهيل فى مجموعة المعادلات المستخرجة للطريقة المختلطة ، إلى أربعة أصناف :

١ — المعاملات التى تمثل ردود الفعل ، الناجمة عن تأثير وحدات الانحرافات ، مثل r_{12} ؛

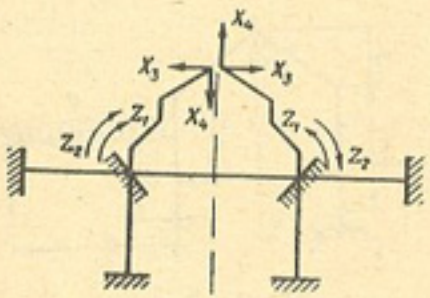
٢ — المعاملات التى تمثل ردود الفعل ، الناجمة عن تأثير وحدات الإجهادات (وحدات القوى أو العزوم) ، مثل r_{13} ؛

٣ — المعاملات التى تمثل الانحرافات الناجمة عن تأثير وحدات الانحرافات ، مثل δ_{31} ؛

٤ — المعاملات التى تمثل الانحرافات ، الناجمة عن تأثير وحدات الإجهادات ، مثل δ_{34} .

وقد بحثت وأثبتت أعلاه ، طرق تحديد المعاملات على اختلاف أصنافها الأربعة المذكورة هنا .

وفى مجموعة المعادلات المرقمة (15 — 10) ، فى حالة الإنشاء الرئيسى المبين فى الشكل (١٠ — ٥٠ ، ب) ، نجد بأن زوجاً واحداً فقط من المعاملات ، يساوى صفراً ، وهو $\delta_{34} = \delta_{43} = 0$ وذلك لأن المجاهيل X_3 تكون متماثلة ، أما المجاهيل X_4 فهى عكسية التماثل . وتكون الحدود الخاصة بالتحميل (حدود التحميل فى المعادلات) ، وهى R_{1p} ، Δ_{3p} ، Δ_{4p} مساوية للصفر أيضاً . وما كان الوضع سيتغير ، حتى لو كان القسم السفلى من الإطار غير متماثل ، وذلك لأن المعاملين $\delta_{34} = \delta_{43}$ ، يحددان الرسوم البيانية لعزوم الانحناء ، للقسم العلوى من الإطار فقط (للطابق الثانى II) أما الإجهادات الناجمة عن تأثير الحمل P فى الإنشاء الرئيسى ، فتظهر فى الباع الأيمن للعارضة فقط . ولو اتخذنا لغرض الحساب ، الإنشاء الرئيسى المبين فى الشكل (١٠ — ٥١) ، ذى الانحرافات المجهولة الجماعية ، لتحول عدد من المعاملات إلى الصفر ،



الشكل ١٠ — ٥١

وانقسمت مجموعة المعادلات القانونية ، (15 — 10) إلى مجموعتين :
المجموعة الأولى وتحتوى على مجاهيل متماثلة وهى :

$$Z_1\, r_{11} + X_3\, r_{13} + R_{1p} = 0$$
$$Z_1\, \delta_{31} + X_3\, \delta_{33} + \Delta_{3p} = 0$$

(عند $\Delta_{3p} \neq 0$)

والمجموعة الثانية وتحتوى على مجاهيل عكسية التماثل وهى :

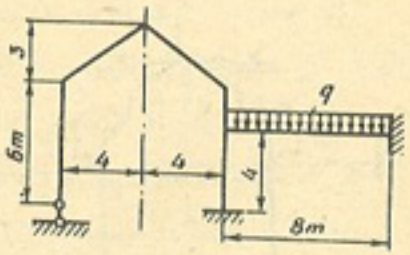
$$Z_2\, r_{22} + X_4\, r_{24} + R_{2p} = 0$$
$$Z_2\, \delta_{42} + X_4\, \delta_{44} + \Delta_{4p} = 0$$

(عند $\Delta_{4p} \neq 0$)

إن معاملات المجاهيل فى مجموعة معادلات الطريقة المختلطة ، ترتبط مع بعضها البعض ، بالعلاقة التالية :

$$r_{mn} = r_{nm}$$
$$\delta_{mn} = \delta_{nm} \qquad (10 - 16)$$
$$r_{mn} = -\delta_{nm}$$

أى أن القيم المطلقة للمعاملات ، الواقعة على الأقطار الثانوية ، تحقق شرط التبادل .



الشكل ١٠ — ٥٢

مثال : يطلب اختيار طريقة لحساب الإطار المعلوم (شكل ١٠ — ٥٢) ، ذى القضبان الثابتة المقطع ، و وضع المعادلات القانونية وحساب جميع معاملاتها .

الحل : لاختيار طريقة الحساب ، نضع الجدول (١٠ — ٧) .

ويتضح من الجدول (١٠ — ٧) ، أنه إذا حسبنا المحيط الأيسر للإطار ، بطريقة القوى ، والمحيط الأيمن بطريقة الانحرافات ، سيمكننا فى هذه

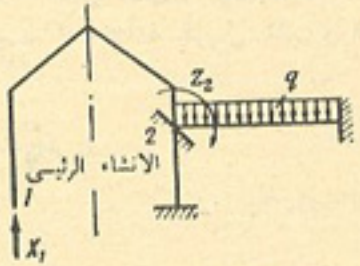
الحالة ، إجراء الحساب باستخدام معادلتين تحتويان على مجهولين ، بدلا من أربعة مجاهيل فى حالة الحساب بطريقة القوى ، وسبعة مجاهيل عند الحساب بطريقة الانحرافات .

جدول ١٠ — ٧

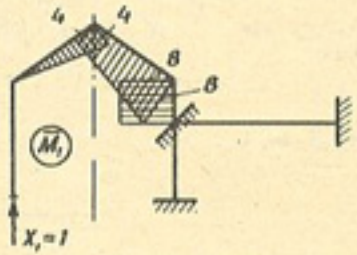
محيط الإطار	درجة عدم التحديد الاستاتيكى	عدد زوايا الدوران والانحرافات الخطية المجهولة للوصلات
المحيط الأيسر	1	6
المحيط الأيمن	3	1
المجموع	4	7

نستخدم الطريقة المختلطة لإجراء الحساب . إن الإنشاء الرئيسى للطريقة المختلطة ، مبين فى الشكل (١٠ — ٥٣) . والآن نضع مجموعة المعادلات القانونية ، لحساب وتحديد المجهولين X_1 و Z_2 :

$$X_1\, \delta_{11} + Z_2\, \delta_{12} + \Delta_{1p} = 0$$
$$X_1\, r_{21} + Z_2\, r_{22} + R_{2p} = 0$$



الشكل ١٠ — ٥٣



الشكل ١٠ — ٥٤

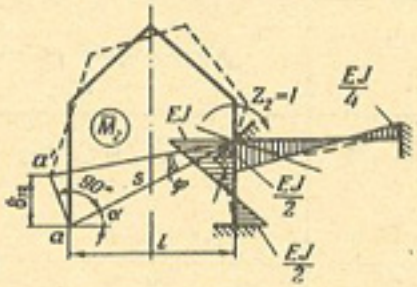
وتحدد المعامل δ_{11} ، الذى يمثل الانحراف الناتج عن تأثير القوة ، بضرب الرسم البيانى للعزوم M_1 (شكل ١٠ — ٥٤) فى نفسه :

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ}\left[\frac{4 \times 5}{2} \times \frac{2}{3} \times 4 + \frac{5}{6}(2 \times 4^2 + 2 \times 8^2 + 2 \times 4 \times 8) + 8 \times 2 \times 8\right] = \frac{192}{EJ}$$

إن جميع القيم مقاسة بالأطنان والأمتار .

ونحدد المعامل δ_{12} ، الذى يمثل الانحراف الناجم عن تأثير الانحراف ، من العلاقات الهندسية التالية (شكل ١٠ — ٥٥) :

$$\delta_{12} = aa' \cos \alpha = S \times \varphi \cos \alpha = l \varphi$$



الشكل ١٠ — ٥٥

ولكن زاوية الدوران تساوى $\varphi = 1$ ، والباع يساوى $l = 8$ ، إذن نحصل على ما يلى :

$$\delta_{12} = 8^*$$

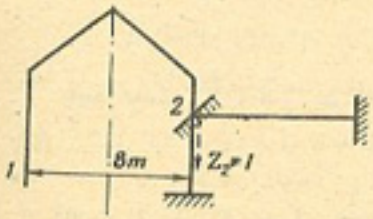
إن الانحراف δ_{12} موجب ، وذلك لأنه ينطبق مع اتجاه تأثير القوى X_1 .

والمعامل r_{21} ، الذى يمثل " القوة الناجمة عن القوة " أى رد الفعل الناجم فى الوصلة 2 نتيجة لتأثير القوة $X_1 = 1$ ، يحدد من شرط توازن الوصلة 2 للإنشاء الرئيسى المبين فى الشكل (١٠ — ٥٧) :

$$\Sigma M_2 = r_{21} + 8 = 0$$

---

* ويمكن كذلك إيجاد الانحراف δ_{12} ، باستخدام نظرية السلسلة الكينماتية (راجع البند ٦ — ١٥) . ولهذا الغرض يجب تصور زاوية دوران الطرف المبيت 2 بمقدار $Z_2 = 1$ على هيئة كمية موجهة رأسية (شكل ١٠ — ٥٦) ، مؤثرة فى الوصلة 2 ، وأخذ عزم هذه الكمية الموجهة ، حول النقطة 1 :



الشكل ١٠ — ٥٦

$$\delta_{12} = 1 \times 8 = 8$$

ومنها ينتج أن $r_{21} = -8$.

الشكل ١٠ — ٥٧

ونلاحظ بأن رد الفعل r_{21} ، يمكن أن يحدد أيضاً من العلاقة التالية :

$$r_{mn} = -\delta_{nm}$$

ونحدد المعامل r_{22} ، الذى يمثل « القوة الناجمة عن الانحراف » أى رد فعل الوصلة 2 الناجم عن دوران هذه الوصلة ، بزاوية قدرها $Z_2 = 1$ (لاحظ الشكل ١٠ — ٥٥) ، من شرط توازن الوصلة 2 ، التابعة للإنشاء الرئيسى ، والمبينة فى الشكل (١٠ — ٥٨) :

الشكل ١٠ — ٥٨

$$\Sigma M_2 = r_{22} - \frac{EJ}{2} - EJ = 0$$

إذن :

$$r_{22} = \frac{2}{3} EJ$$

ومعاملا التحميل Δ_{1p} و R_{2p} فى هذه الحالة ، يساويان ما يلى :

$$\Delta_{1p} = 0$$

$$R_{2p} = -\frac{ql}{12}$$

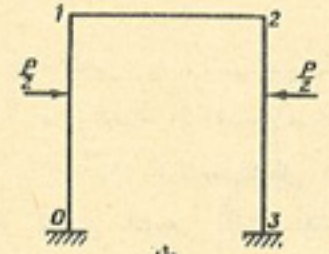
(راجع الجدول ١٠ — ٢) .

البند ١٠ — ١٣ : الطريقة الموحدة

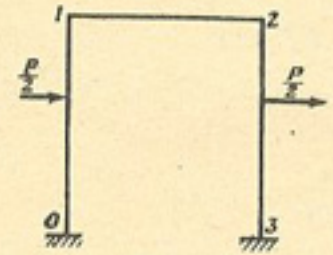
إن الطريقة الموحدة ، تستخدم لحساب تأثير الأحمال غير المماثلة ، على الإنشاءات المماثلة .

وسوف نتعرف على حقيقة الطريقة الموحدة ، ببحث الإطار المبين فى الشكل (١٠ — ٥٩) وبتحليل الحمل غير المماثل ، الذى يتعرض له

الإنشاء ، إلى حمل متماثل وحمل عكسى التماثل ، نحصل على حالتين ، لتحميل الإطار ، مبينتين فى الشكل (١٠ — ٦٠ ، أ و ب) . ويمكن بسهولة أن نحدد عدد المجاهيل لكل حالة من الحالتين المذكورتين ، عند حساب الإطار بطريقة القوى وطريقة الانحرافات . وهكذا ، ينتج من تماثل تشوهات (انحرافات) الإطار عند تعرضه لتأثير الحمل المتماثل ، بأن انحراف العارضة 2 — 1 فى الاتجاه الأفقى ، يساوى

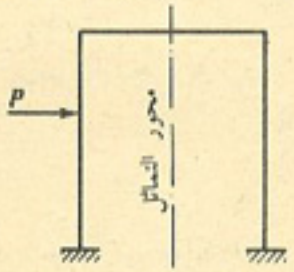


(أ)



(ب)

الشكل ١٠ — ٦٠

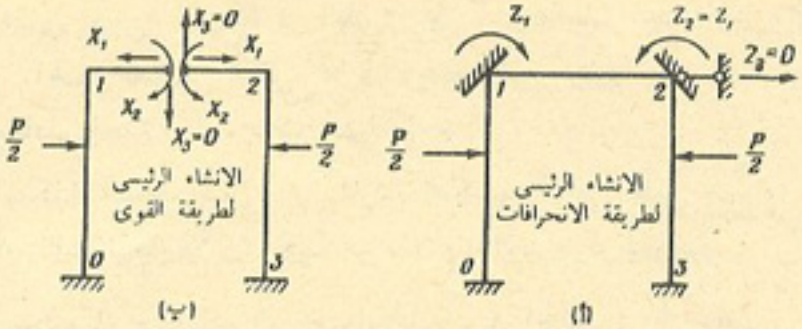


الشكل ١٠ — ٥٩

صفراً ، ودوران الوصلة 1 يساوى دوران الوصلة 2 فى المقدار ، ويعاكسه فى الاتجاه ، أى أن $\theta_3 = 0$ ، و $\theta_1 = \theta_2$ (شكل ١٠ — ٦١ ، أ) .

إذن عند حساب تأثير الحمل المتماثل على الإطار ، بطريقة الانحرافات ، يجب وضع وحل معادلة واحدة ذات مجهول واحد فقط . وعند استخدام طريقة القوى لهذا الغرض ، واستخدام الإنشاء الرئيسى المبين فى الشكل (٣—٦١ ، ب) ، وبعد أن نأخذ فى الاعتبار أيضاً ، بأن قوة القص X_3 ، الناجمة عن تعرض الإطار للحمل المتماثل ، تساوى صفراً ، يجب وضع وحل معادلتين ، تحتويان على مجهولين .

والواضح ، أنه من الملائم حساب تأثير المركبة المتماثلة (الحمل المتماثل) للحمل المعلوم ، على الإطار الذى نبحثه ، باستخدام طريقة الانحرافات .



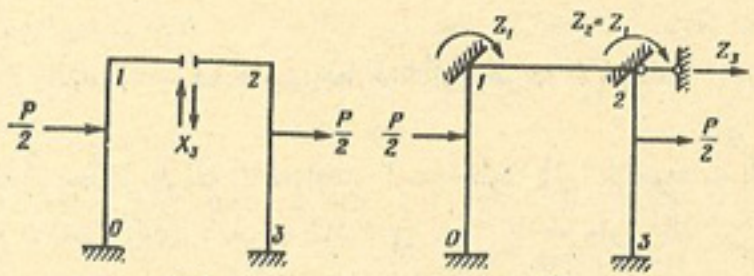
(أ) (ب)

الشكل ١٠ — ٦١

إن الإنشاء الرئيسى لطريقة الانحرافات ، عند تعرض الإطار لتأثير الحمل العكسى التماثل ، مبين فى الشكل (١٠ — ٦٢) . وعدد المجاهيل يساوى اثنين . وفى الواقع ، ستكون زاويتا دوران الوصلتين 1 و 2 (مع أخذ الحمل العكسى التماثل فى الاعتبار) ، متساويتين فى المقدار والاتجاه . أما العارضة 2 — 1 ، فسوف تنحرف أفقياً ، أى أن $\theta_3 \neq 0$.

إذن ، عند حساب الإطار بطريقة الانحرافات ، فى حالة تأثير الحمل العكسى التماثل ، يجب وضع معادلتين تحتويان على مجهولين اثنين .

وعند حساب تأثير الحمل العكسى التماثل ، على الإطار ، بطريقة القوى ، يمكن استخدام الإنشاء الرئيسى ، المبين فى الشكل (١٠ — ٦٢ ، ب) ، الذى سيكون فيه الإجهاد المجهول الوحيد ، هو قوة القص X_3 فقط ،



(ب) (أ)

الشكل ١٠ — ٦٢

أما قيمتى العزم X_2 والقوة الطولية X_1 ، فستكونان عند تعرض الإطار لتأثير الحمل العكسى التماثل ، مساويتان للصفر . وفى هذه الحالة ، يجب حل معادلة واحدة فقط ، ذات مجهول واحد .

وهكذا عند حساب تأثير المركبة العكسية التماثل للحمل المعلوم ، على الإطار الذى نبحثه الآن ، يكون من الملائم استخدام طريقة القوى .

وسوف ندرج النتائج التى حصلنا عليها ، فى الجدول (١٠ — ٨) .

جدول ١٠ — ٨

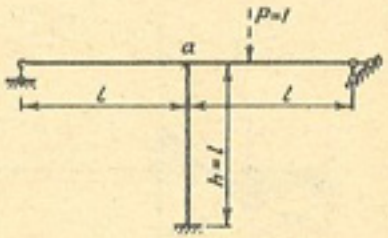
الحمل	عدد المعادلات المستخدمة فى الحساب		الطريقة المستخدمة فى الحساب
	بطريقة القوى	بطريقة الانحرافات	
التماثل	2	1	طريقة الانحرافات
العكسى التماثل	1	2	طريقة القوى

إن طريقة حساب الإطار المتماثل ، التى تتلخص فى توحيد طريقة القوى وطريقة الانحرافات ، تسمى بالطريقة الموحدة .

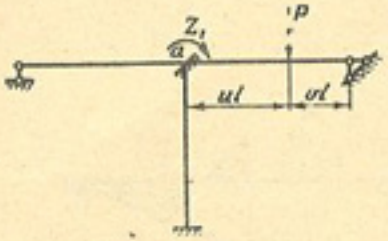
البند ١٠ — ١٤ : رسم خطوط التأثير بطريقة الانحرافات

عند استخدام طريقة الانحرافات لرسم خطوط تأثير الإجهادات الداخلية (عزوم الانحناء وقوى القص) الناشئة فى هذا المقطع أو ذاك من مقاطع الإطار ، وكذلك خطوط تأثير الانحرافات وزوايا الدوران ، يجب مقدماً رسم خطوط تأثير المجاهيل التابعة لطريقة الانحرافات .

لنبحث طريقة رسم خطوط التأثير ، بدراسة الإطار البسيط ذى المقطع الثابت ، المبين فى الشكل (١٠ — ٦٣) .



الشكل ١٠ — ٦٣



الشكل ١٠ — ٦٤

إن المعادلة القانونية للإنشاء الرئيسى لطريقة الانحرافات (شكل ١٠ — ٦٤) ، تكتب على الشكل التالى :

$$Z_1 r_{11} + r_{1p} = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$Z_1 = -\frac{r_{1p}}{r_{11}} = \frac{\delta_{p1}}{r_{11}}$$

وذلك لأن :

$$r_{1p} = -\delta_{p1}$$

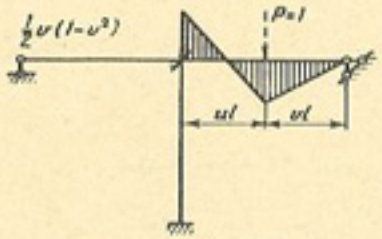
إذن يكون " نموذج " خط تأثير الانحراف المرن ، هو الرسم البيانى للانحرافات الرأسية δ_{p1} ، الناجمة عن دوران الطرف الثابت بزاوية قدرها $Z_1 = 1$.

وعندما يكون الحمل $P = 1$ ، واقعاً فى حدود الباع الأيمن (شكل ١٠ — ٦٥) ، نجد بأن رد الفعل يساوى :

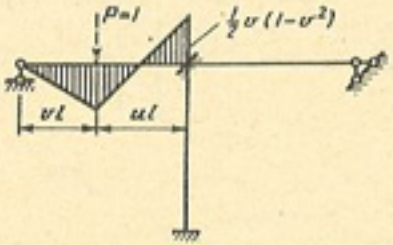
$$r_{1p} = -\frac{l}{2} v (1 - v^2)$$

وطبقاً لذلك ، عندما يكون الحمل $P = 1$ ، واقعاً فى حدود الباع الأيسر (شكل ١٠ — ٦٦) ، نجد بأن رد الفعل ، يساوى :

$$r_{1p} = + \frac{l}{2} v (1 - v^2)$$



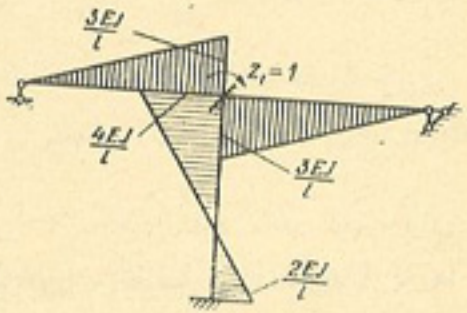
الشكل ١٠ — ٦٥



الشكل ١٠ — ٦٦

ولتحديد رد الفعل r_{11} نخطط وحدة الرسم البيانى للعزوم $\overline{M}_1$ (شكل ١٠ — ٦٧) ، ومنها نجد ما يلى :

$$r_{11} = \frac{3\,EJ}{l} + \frac{3\,EJ}{l} + \frac{4\,EJ}{l} = \frac{10\,EJ}{l}$$



الشكل ١٠ — ٦٧

وفى صيغ رد الفعل r_{1p} ، نجد بأن المقدارين v و u يمثلان الإحداثيات السينية النسبية ، أى الأعداد الواقعة بين الصفر والواحد .

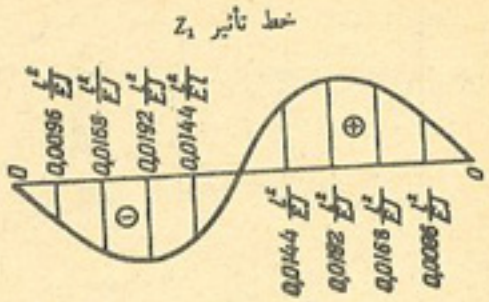
إن قيم r_{1p} المناظرة لقيم v المختلفة ، محسوبة ومدرجة فى الجدول (١٠ — ٩) .

وقد ادرجت فى هذا الجدول أيضاً ، قيم الإحداثيات الرأسية لخط تأثير Z_1 ، المحسوبة من الصيغة التالية :

$$Z_1 = - \frac{r_{1p}}{r_{11}}$$

جدول ١٠ — ٩

الباع	v	r_{1p}	الإحداثى الرأسى لخط تأثير Z_1	الباع	v	r_{1p}	الإحداثى الرأسى لخط تأثير Z_1
الأيمن	1	0	0	الأيسر	1	0	0
	0.8	$-0.144\,l$	$+0.0144\,\frac{l^2}{EJ}$		0.8	$+0.144\,l$	$-0.0144\,\frac{l^2}{EJ}$
	0.6	$-0.192\,l$	$+0.0192\,\frac{l^2}{EJ}$		0.6	$+0.192\,l$	$-0.0192\,\frac{l^2}{EJ}$
	0.4	$-0.168\,l$	$+0.0168\,\frac{l^2}{EJ}$		0.4	$+0.168\,l$	$-0.0168\,\frac{l^2}{EJ}$
	0.2	$-0.096\,l$	$+0.0096\,\frac{l^2}{EJ}$		0.2	$+0.096\,l$	$-0.0096\,\frac{l^2}{EJ}$
	0	0	0		0	0	0



الشكل ١٠ – ٦٨

وخط تأثير Z_1 ، مبين فى الشكل (١٠ – ٦٨) .

ولرسم خط تأثير عزم الانحناء فى أى مقطع k من مقاطع الباع الأيسر للإطار ، عند وجود الحمل $P = 1$ فى ذلك الباع ، يجب استخدام الصيغة التالية :

$$M_k = M_k^0 - \frac{3\,EJ}{l^2}\,Z_1\,a_k$$

حيث M_k^0 – عزم الانحناء فى المقطع k للعتبة البسيطة غير المحددة استاتيكياً ، ذات الطرف الأيمن الثابت ، والطرف الأيسر المفصلى التثبيت ؛

a_k – بعد المقطع المبحوث عن المسند المفصلى الأيسر ؛

$\left(-\frac{3\,EJ}{l^2}\right)$ – يمثل رد فعل المسند المفصلى الأيسر ، الناجم عند دوران الوصلة a للإطار ، بزاوية تساوى $Z_1 = 1$.

إن شكل الصيغة المستخدمة لرسم خط تأثير قوة القص Q_k ، هو كالآتى :

$$Q_k = Q_k^0 - \frac{3\,EJ}{l^2}\,Z_1$$

وعند وجود الحمل $P = 1$ فى حدود الباع الأيمن ، تختصر صيغتا تحديد عزم الانحناء M_k وقوة القص Q_k ، وتأخذان الشكل التالى :

$$M_k = -\frac{3\,EJ}{l^2}\,Z_1\,a_k$$

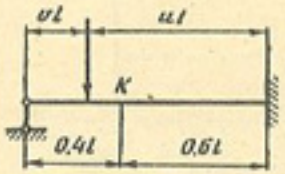
$$Q_k = -\frac{3\,EJ}{l^2}\,Z_1$$

وباستخدام الصيغ المذكورة أعلاه ، نرسم خط تأثير عزم الانحناء وقوة القص ، للمقطع k ، المأخوذ على بعد $0.4l$ من المسند الأيسر للإطار .

وفى هذه الحالة ، عندما يكون الحمل $P = 1$ ، واقعاً على الباع الأيسر للإطار ، تصبح صيغة العزم M_k ، على الشكل التالى :

$$M_k = M_k^0 = -\frac{3\,EJ}{l^2}\,Z_1 \times 0.4l = M_k^0 - \frac{1.2\,EJ}{l}\,Z_1$$

ويجب أن نبحث على انفراد ، العتبة البسيطة غير المحددة استاتيكياً ، ذات الطرف المثبت (شكل ١٠ – ٦٩) .



الشكل ١٠ – ٦٩

وعند وجود الحمل $P = 1$ ، فى الباع الأيسر للإطار ، إلى يمين المقطع k أى عند $u \leqslant 0.6$ (راجع الجدول ١٠ – ٢) ، نحصل على ما يلى :

$$M_k^0 = \frac{u^3}{2}\,(3 - u) \times 0.4\,l$$

$$Q_k^0 = \frac{u^2}{2}\,(3 - u)$$

وعند وجود الحمل $P = 1$ ، فى الباع الأيسر للإطار ، إلى يسار المقطع k أى عند $u \geqslant 0.6$ ، نحصل على ما يلى :

$$M_k^0 = \frac{u^2}{2}(3 - u) \times 0.4\,l - (0.4l - vl) = \frac{u^2}{2}(3 - u) \times 0.4\,l - (u - 0.6)\,l$$

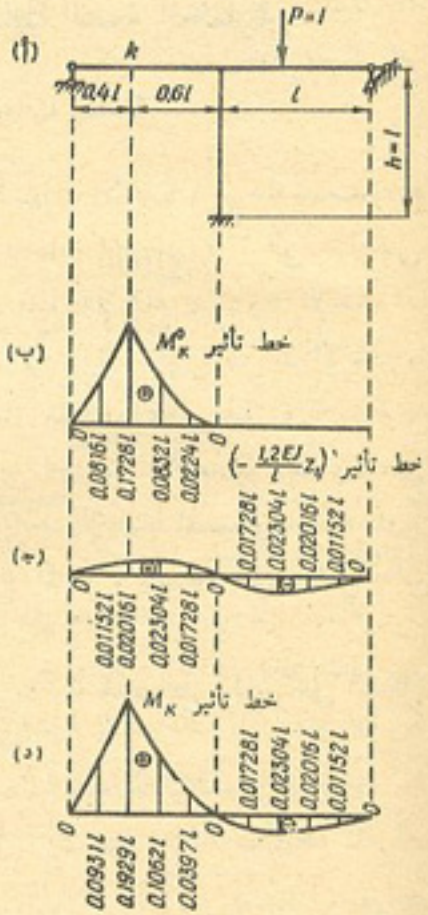
$$Q_k = \frac{u^2}{2}\,(3 - u) - 1$$

إن قيم الإحداثيات الرأسية للرسمين البيانيين لعزوم الانحناء M_k^0 وقوى القص Q_k^0 المستخرجة من هذه الصيغ ، مدرجة فى الجدول (١٠ – ١٠) .

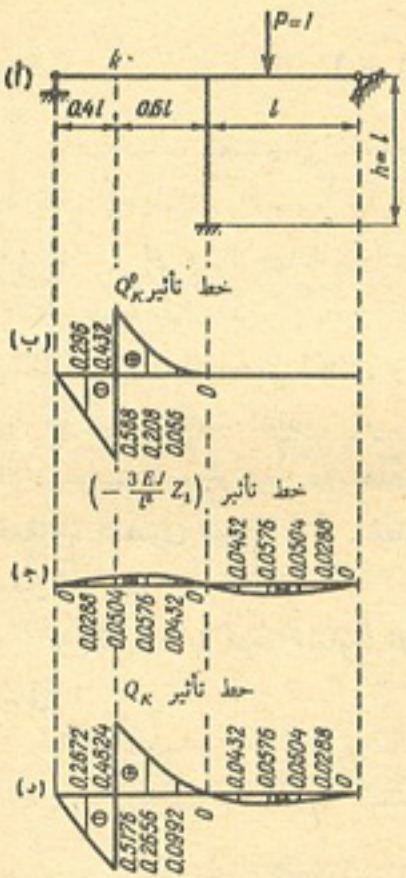
وعند وجود الحمل $P = 1$ فى حدود الباع الأيمن للإطار ، تكون الإحداثيات الرأسية للرسمين البيانيين للعزوم M_k وقوى القص Q_k ، مساوية للإحداثيات الرأسية لخط تأثير Z_1 ، (لاحظ الشكل ١٠ – ٦٨) ، مضروبة فى المعاملين التاليين على الترتيب :

$$\left(-\frac{3\,EJ}{l^2}\,a_k = -\frac{3\,EJ}{l^2}\,0.4\,l = -\frac{1.2\,EJ}{l}\right);\left(-\frac{3\,EJ}{l^2}\right)$$

ويبين الشكلان (١٠ — ٧٠) و (١٠ — ٧١) خطوط تأثير الحدود المنفردة ، الداخلة فى صيغتى M_k و Q_k . وبجمع الإحداثيات الرأسية لهذه الخطوط ، نحصل على خطى تأثير M_k و Q_k ، المبينين فى الشكلين (١٠ — ٧٠ ، د) و (١٠ — ٧١ ، د) .



الشكل ١٠ — ٧٠



الشكل ١٠ — ٧١

جدول ١٠ — ١٠

Q_k^0	M_k^0	عند تأثير الحمل $P = 1$ فى النقطة ذات الإحداثى السينى النسبى η ، التى يساوى :	Q_k^0	M_k^0	عند تأثير الحمل $P = 1$ فى النقطة ذات الإحداثى السينى النسبى η ، التى يساوى :
— 0.568	0.1728 l	0.6	0	0	0
— 0.296	0.0816 l	0.8	0.056	0.0224 l	0.2
0	0	1.0	0.208	0.0832 l	0.4
—	—	—	0.432	0.1728 l	0.6

الفصل الحادى عشر

حساب الإنشاءات بواسطة السعة الحملية

البند ١١ – ١ : معلومات أساسية

كان حساب وتصميم الإنشاءات حتى السنوات الأخيرة ، يتم عادة باستخدام طريقة الإجهادات المسموح بها (permissible stresses) ، التى تتلخص فيما يلى : تحدد الإجهادات الناشئة فى قطع الإنشاء (عزوم الإنحناء ، القوى الطولية وقوى القص) بطرق الميكانيكا الإنشائية ، على فرض أن الإنشاء ، يسلك نفس سلوك الجسم المرن . ويتم اختيار مقاطع القطع المنفردة للإنشاء ، بواسطة صيغ مقاومة المواد ، بحيث لا تزيد إجهادات التصميم القصوى على الإجهادات المسموح بها . وفى هذه الحالة يؤخذ الإجهاد المسموح به ، مساوياً للمقاومة القصوى للمادة ، أو لنقطة خضوع المادة ، مقسومة على معامل أمان معين .

ويمكن كتابة شرط المقاومة الأساسى ، تبعاً لهذه الطريقة ، على الشكل التالى :

$$\sigma \leqslant \frac{\sigma_{ult}}{K}$$

حيث σ — إجهاد التصميم ،

σ_{ult} — المقاومة القصوى (أو نقطة الخضوع) للمادة ،

K — معامل الأمان ($K > 1$) .

وبالنسبة للإنشاءات الخرسانية والخرسانية المسلحة والحجرية ، غالباً ما يؤدى الحساب أو التصميم بطريقة الإجهادات المسموح بها ، إلى نتائج تختلف مع

النتائج أو المعطيات التجريبية . ولهذا السبب ، استبدلت طريقة الإجهادات المسموح بها ، عند حساب مثل هذه الإنشاءات المذكورة ، بطريقة تسمى بـ " طريقة حمل الكسر " أو " طريقة حمل الإنهيار " وهى الطريقة التى عند استخدامها ، لا يخضع معامل الأمان للإجهاد الأقصى ، الناجم فى مواضع معينة من الإنشاء ، بل يخضع للإجهاد الناجم فى المقطع الكامل ، للقطعة الإنشائية . والشرط الأساسى للمقاومة ، عند استخدام هذه الطريقة ، يكون على الشكل التالى :

$$S \leqslant \frac{S_{ult}}{K}$$

حيث S — إجهاد التصميم فى القطعة الإنشائية ،

S_{ult} — الإجهاد الأقصى ، أى إجهاد الإنهيار أو الكسر ، لهذه القطعة الإنشائية بالذات ،

K — عامل الأمان .

ويتم تحديد الإجهادات القصوى ، بأخذ الانفعالات (النشوهات) اللدنة للمادة ، فى الاعتبار .

والنقص الوحيد فى هذه الطريقة ، وفى طريقة الإجهادات المسموح بها أيضاً ، هو ثبات عامل الأمان ، الذى يجب أن تعتمد قيمته فى الواقع ، على عدد كامل من الظروف ، المرتبطة بسلوك (تشغيل) الإنشاء .

وطبقاً للمواصفات القياسية للبناء ، يجب أن يتم تصميم وحساب الإنشاءات ، بطريقة الحالات الحدية للتصميم ، التى وضعت فى الاتحاد السوفييتى من قبل مجموعة من الباحثين بإشراف الأستاذين كيلديش وستريليتسكى .

إن الحالات الحدية للإنشاء ، هى الحالات التى عندها يفقد الإنشاء قابلية مقاومة الأحمال (المؤثرات) الخارجية ، أو لا يحقق شروط التشغيل المفروض توفرها فيه ، نتيجة لظهور تشوهات غير مسموح بها ، أو عيوب موضعية .

وفى الحالة الأكثر عموماً ، يجب بحث الحالات الحدية الثلاث التالية :

١ — الحالة الحدية لفقدان السعة الحملية (المقاومة ، الاستقرار أو الكلال — عند تأثير الإجهادات المتناوبة) ،

٢ — الحالة الحدية لتطور الانفعالات أو التشوهات المفرطة (الانحرافات ، الالتواءات وهلم جرا) ،

٣ — الحالة الحدية لتكون أو انفتاح الشروخ ، أو ظهور عيوب مرضعية أخرى ، تؤدى إلى التوقف عن تشغيل أو استخدام الإنشاء (مثلا نتيجة لفقدان اللاانفاذية فى خزانات المياه) .

إن بدء حدوث هذه الحالة الحدية أو غيرها ، يعتمد على عدد كامل من العوامل ، وأهمها هى :

١ — مقدار وطبيعة الأحمال وبقية القوى المؤثرة ،

٢ — نوعية المواد المستخدمة فى الإنشاء ، وخواصها الميكانيكية ،

٣ — ظروف إقامة وتشغيل الإنشاء .

ويجب أن يحافظ التصميم على عدم تعرض الإنشاء لظهور أية حالة حدية كانت ، خلال مدة تشغيله بأكملها ، ولا يسمح فى نفس الوقت ، بالاستهلاك الزائد لمواد البناء ، عند التصميم . وهنا يمكن وضع مسألة حساب وتصميم الإنشاء ، بثلاث حالات مختلفة :

١ — تحديد السعة الحملية للإنشاء ، أى تحدد نوعية الأحمال ، التى تؤدى إلى ظهور هذه الحالة الحدية أو غيرها ، فى الإنشاء المعلوم ،

٢ — اختيار الأبعاد الصغرى لمقاطع الإنشاء ، التى لا يمكن عندها ظهور أية حالة حدية ، عند تأثير الأحمال المعلومة ، وعند الظروف المعينة لتشغيل الإنشاء ،

٣ — تحديد درجة أمان الإنشاء ، أى تحديد وإقرار العلاقة بين الحمل المعلوم والسعة الحملية للإنشاء .

وبدلا من عامل الأمان العام ، المستخدم فى طريقة الإجهادات المسموح بها ، وفى طريقة أحمال الإنهيار ، وضعت بالنسبة لطريقة الحالات الحدية للتصميم ، مجموعة خاصة من عوامل التصميم .

ونحصل على حمل التصميم ، بضرب حمل التشغيل ، أى الحمل الأقصى ، المسموح به عند التشغيل العادى للإنشاء ، فى عامل التحميل n . وهذا العامل يأخذ فى الاعتبار زيادة (وعندما يؤدى إلى تردى ظروف تشغيل الإنشاء ، يأخذ فى الاعتبار تناقص) الحمل ، بالمقارنة مع قيمته التشغيلية . ويعتمد معامل التحميل ، على نوع الحمل . وعلى سبيل المثال ، وضع بالنسبة لوزن الإنشاءات الذاتى والضغط الأيدروستاتى للسوائل ، عامل تحميل صغير يساوى ، $n = 1.1$ أما بالنسبة للأحمال الوقتية المؤثرة على سقوف المنازل السكنية فإن هذا العامل يساوى $n = 1.4$. وهو بالنسبة لحمل الريح يساوى 1.2 ، ولحمل الثلج يساوى 1.4 ، وبالنسبة لضغط المواد السائبة ، لا يقل عن 1.2 . وعندما تؤخذ فى الاعتبار الأحمال الإضافية ، والمجموعات الخاصة للأحمال ، تدخل بالإضافة إلى عوامل التحميل ، عوامل أخرى ، هى عوامل مجموعة الأحمال ، التى تساوى على الترتيب 0.9 و 0.8 (تضاف إلى جميع الأحمال ، باستثناء وزن الإنشاء الذاتى) . وهذه العوامل تأخذ فى الاعتبار ، عدم إمكانية وصول جميع الأحمال إلى قيمها التصميمية القصوى ، فى نفس الوقت ، من الناحية العملية .

وتستخرج المقاومة التصميمية للمادة R ، بضرب المقاومة التشغيلية أو العادية R_{ser} ، المقررة فى المواصفات القياسية ، والتى تمثل طبيعة الخواص الميكانيكية للمادة ، فى عامل تجانس المادة k وهذا العامل يأخذ فى الاعتبار ، احتمال انخفاض مقاومة المادة ، بالمقارنة مع المقاومة التشغيلية (العادية) ، نتيجة لقابلية تغير الخواص الميكانيكية للمادة ، ويعتمد فقط على خواص المادة . وعلى سبيل المثال ، يؤخذ معامل التجانس بالنسبة للفولاذ المدلفن ماركة Ct. 5 و Ct. 3 ، بحيث يتراوح بين 0.8 و 0.9 ، أى $k = 0.8$ to 0.9 ، وللخشب فى حالة الإنحناء $k = 0.4$ ، وللخرسانة التى تتراوح ماركتها بين ٢٥٠ و ٦٠٠ ، فى حالتى الانضغاط الانحناء $k = 0.6$ ، وللبناء بالطوب $k = 0.4$. وتحتوى المواصفات القياسية للبناء ، على عوامل التجانس للتفاضلية ، تبعاً لماركة المادة ، وطبيعة تشوهها وظروف صنعها وهلم جرا .

إن خصائص تشغيل الإنشاءات (مثل تأثير الوسط المؤكسد أو الأكال ،

تركز الإجهادات ، احتمال حدوث التصدع القصيف (brittle failure) ، وغيرها من العوامل الضارة أو المفيدة) تؤخذ فى الاعتبار ، بإدخال عامل الخدمة m ، الذى تكون قيمته، إما أكثر أو أقل من الواحد . مثلا بالنسبة للوصلات المبرشمة ، يؤخذ هذا العامل فى حدود تتراوح بين 0.6 و 1.0 ، تبعاً لنوع البرشام وظروف اشتغاله (سلوكه) ، ويؤخذ بالنسبة للعتبات الخشبية ، التى لا تقل أبعاد أضلاعها عن ١٤ سم ، مساوياً للمقدار $m = 1.15$ ، وللقطع الخرسانية المسلحة السابقة الصنع ، مساوياً للمقدار $m = 1.1$.

وتدخل عوامل الخدمة عند حساب الإجهاد الأقصى للقطعة الإنشائية ، ولذا كلما قلت قيمة هذا العامل ، زادت قيمة عامل الأمان العام .

ولإجراء الحساب بواسطة الحالة الحدية الأولى ، التى تعتبر فى حالات كثيرة ، الطريقة الحاسمة ، تستخدم المتباينة التالية :

$$S \leqslant S_{ult}$$

حيث S — الإجهاد التصميمى (إجهاد التصميم) الناجم فى القطعة الإنشائية ، نتيجة لتأثير أحمال التصميم ، فى أكثر مجموعة غير مفضلة من الأحمال المذكورة .

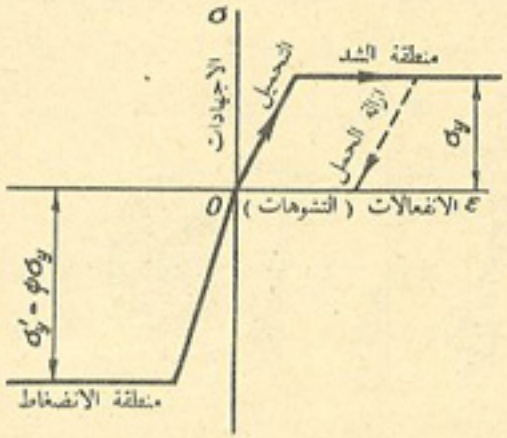
S_{ult} — السعة الحملية للقطعة الإنشائية ، المناظرة لنوع الإجهاد ، المعتمدة على الأبعاد الهندسية ، والمقاومة التصميمية للمادة ، وعامل الخدمة .

وعند حساب السعة الحملية للإنشاء ، يمكن إجراء ذلك الحساب ، فى الحالات الضرورية المتفق عليها فى الشروط الفنية ، بأخذ لدونة المواد فى الاعتبار . وهذا يساعد فى الحصول على إنشاء أكثر اقتصادية ، نظراً لاستخدام الاحتياطيات الكامنة للمقاومة ، وهى الاحتياطيات التى تبقى غير مستخدمة ، عند حساب الإنشاء كجسم مرن . ويتم الحساب بواسطة التشوهات (الانفعالات) ، انطلاقاً من اعتبار الإنشاء بمثابة إنشاء مرن ، مع وجود عوامل تحميل مساوية للواحد .

وتحتوى البنود التالية من هذا الفصل ، على شرح حساب مختلف الإنشاءات الإطاوية ، بواسطة السعة الحملية ، مع أخذ لدونة المواد فى الاعتبار .

البند ١١ — ٢ : حساب العتبات المحددة استاتيكيا

يدخل فى أساس الحساب ، بدلا من الرسم البيانى الحقيقى لشد وانضغاط المادة المرنة اللدنة ، الرسم البيانى المبسط ، المبين فى الشكل (١١ — ١) .



الشكل ١١ — ١

ولهذا الرسم البيانى ، فى منطقتى الشد والانضغاط ، قسمان ، مائل وأفقى ، يمثلان مرحلتين المرونة واللدونة ، لسلوك المادة على التوالى . ويمكن أخذ نقطتى الخضوع فى حالة الشد (σ_y) وحالة الانضغاط (σ'_y) ، بقيمتين مختلفتين ، الأمر الذى يساعد بدقة أكثر ، على إيضاح الخواص الميكانيكية لبعض المواد ، مثل الخرسانة والمواد المصنوعة من الأسبستوس والأسمنت والمواد اللدائنية .

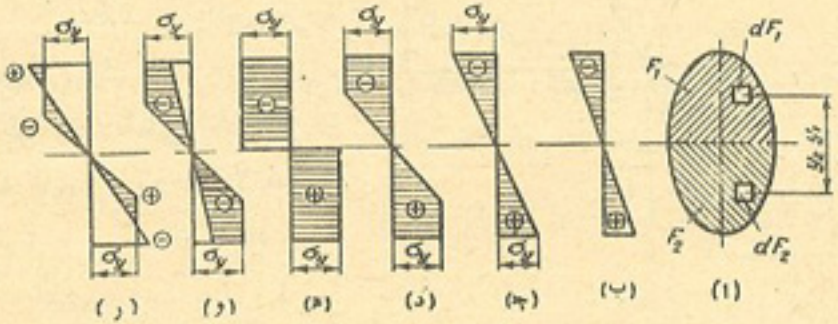
وتبدأ المرحلة اللدنة لسلوك المادة ، عندما يصل الإجهاد إلى نقطتى الخضوع σ_y أو σ'_y ، اللتين تستبدلان عند الحساب ، بالمقاومتين التصميميتين للمادة R و R' . ويمكن استخراج القيمتين الأخيرتين ، بضرب نقطتى الخضوع العاديتين ، فى عامل التجانس .

إن مساحات مناطق الخضوع ، على الرسم البيانى المبسط ، تؤخذ بأطوال لا نهائية ، ولا تؤخذ فى الاعتبار ، زيادة المقاومة التالية ، الناجمة عن الأصلاد الإنفعالى .

وبالنسبة للمواد ذات منطقة الخضوع الصغيرة ، مثل الفولاذ المدلفن ، يمكن استخدام هذا الرسم البيانى ، على وجه التدقيق ، فى حالة واحدة فقط ، هى عندما

لا تستخدم هذه المنطقة إلى نهايتها . ويعود انهيار أو تصدع القطع الخرسانية المسلحة ، إلى تصبب الفولاذ والخرسانة ، ولهذا السبب يمكن أيضاً استخدام الرسم البيانى الموضح فى الشكل (١١ — ١) ، للخرسانة المسلحة . ولا يجوز استخدام الرسم البيانى المبسط المذكور ، بالنسبة للمواد القصيفة .

ولنبحث الآن المقطع العرضى المتماثل بالنسبة المحور الرأسى ، فى العتبة المحددة استاتيكياً ، المعرضة للانحناء البحت (شكل ١١ — ٢ ، أ) . ولسهولة الحل سنعتبر بأن $\sigma'_{\gamma} = \sigma_{\gamma}$



الشكل ١١ — ٢

ما دام الإجهاد فى أحد مقاطع العتبة ، لا يصل إلى حد المرونة (الذى ينطبق مع نقطة الخضوع ، على الرسم البيانى المبسط) ، يكون الرسم البيانى للإجهادات المتعامدة فى المقطع العرضى للعتبة ، بالشكل الذى هو عليه فى الشكل (١١ — ٢ ، ب) .

وبزيادة عزم الانحناء ، سيزداد الإجهاد فى المقطع ، ويصل أخيراً إلى نقطة الخضوع σ_{γ} فى الألياف الطرفية للمقطع (شكل ١١ — ٢ ، جـ) . وعند ذلك ، تبدأ نهاية المرحلة المرنة لسلوك المقطع ، أو ما يسمى بخضوع الألياف .

وعند الحساب بطريقة الإجهادات المسموح بها ، مع ظهور الخضوع فى الألياف الطرفية ، تعتبر السعة الحملية للعتبة ، مستنفذة تماماً . وفى الواقع ، نجد بأن جميع الألياف الأخرى ، الأقل إجهاداً ، التى تكون ما يسمى بالقلب المرن

(elastic core) ، يمكن أن تقاوم أكثر ، ولذلك يمكن زيادة الحمل وعزم الانحناء ، أكثر من السابق .

وعند الزيادة اللاحقة لعزم الانحناء ، سوف تبقى الإجهادات فى الألياف ، الواصلة إلى نقطة الخضوع ، ثابتة المقدار ، أما الإجهادات فى الألياف الأخرى ، فسوف تستمر فى الزيادة . ولذلك فإن منطقة التشوهات (الانفعالات) اللدنة ، التى يخضع لها القسم المشدود والقسم المضغوط للمقطع ، سوف تنتشر فى أعماق المقطع ، وسوف يتقلص حجم القلب المرن (شكل ١١ — ٢ ، د) .

وأخيراً ، يصبح الرسم البيانى النهائى للإجهادات المتعامدة ، كما هو عليه فى الشكل (١١ — ٢ ، هـ) . وفى هذه الأثناء ، سوف تستنفذ السعة الحملية للعتبة ، ويظهر فى المقطع ما يسمى بالمفصلة اللدنة ، أو مفصلة الخضوع ، وهى تختلف عن المفصلة المثالية ، بأنها معرضة لتأثير زوجين من القوى ، متعاكسى الاتجاه بالتبادل ، يولدان عزماً ثابتاً M_{ult} ، يساوى العزم الأقصى للقوى الداخلية . وبالإضافة إلى ذلك ، تكون المفصلة اللدنة محدودة الوجود ، أى أنها تختفى عند إزالة الحمل وعند تغير علامة عزم الانحناء . وعند ذلك ، تسلك العتبة من جديد ، سلوكاً مرناً (كالعتبة المرنة) .

إن العزم الناجم فى المفصلة اللدنة ، الذى يحدد السعة الحملية للمقطع عند تعرضه للانحناء ، أكبر من ذلك العزم ، الذى عنده يظهر الخضوع فى الألياف الطرفية فقط ، ويمكن إيجاد قيمته بالطريقة التالية : عند ظهور أو تكون المفصلة اللدنة ، تتعرض كافة نقاط القسم المشدود من المقطع العرضى ، لإجهادات متساوية قدرها σ_{γ} ، وتتعرض كافة نقاط القسم المضغوط من المقطع ، إلى إجهادات متساوية أيضاً ، ولكنها فى الحالة العامة ، تساوى $\sigma'_{\gamma} = \psi\, \sigma_{\gamma}$. والقوة الطولية الناشئة فى المقطع ، فى حالة الانحناء البحت ، تساوى صفراً ، ولذلك يجب أن تكون محصلة القوى الداخلية فى القسم المضغوط ، مساوية لمحصلة القوى الداخلية فى القسم المشدود ، أى :

$$\psi\, \sigma_{\gamma} A_1 = \sigma_{\gamma} A_2$$

ومنها ينتج أن :

$$A_1 = \frac{A_2}{\psi} = \frac{A}{\psi + 1}$$

$$A_2 = \frac{\psi A}{\psi + 1}$$

حيث A — المساحة الكلية للمقطع العرضى .

وهذا يساعد على إيجاد موضع محور تعادل المقطع ، الذى قد لا ينطبق مع المحور المركزى للمقطع .

ولتحديد العزم الأقصى ، أى السعة الحملية للمقطع فى حالة الانحناء البحت ، يجب إيجاد عزم القوى الداخلية ، حول محور التعادل .

وباستبدال نقطة الخضوع σ_y ، بالمقاومة التصميمية للمادة R ، وإدخال عامل الخدمة m ، نحصل على ما يلى :

$$M_{ult} = m R \left[\psi \int_{A1} y_1 \, dA_1 + \int_{A2} y_2 \, dA_2 \right] = m R \left(\psi S_1 + S_2 \right) = m R W_p$$

حيث y_1 و y_2 — المسافتان من المساحتين الابتدائيتين dA_1 و dA_2 ، إلى محور التعادل (للقسمين العلوى والسفلى من المقطع ، على التوالى) ؛

S_1 و S_2 — العزمان الاستاتيكيان للقسمين العلوى والسفلى من المقطع A_1 و A_2 ، حول محور التعادل .

إن المقدار $W_p = \psi S_1 + S_2$ ، يسمى بمعامل المقطع المرن .

ولا تتغير قيمة العزم الأقصى ، إذا أخذنا عزم القوى الداخلية ، ليس حول محور تعادل المقطع ، بل حول المحور المركزى للمقطع .

وللمقطع العرضى المستطيل ، نجد بأن معامل المقطع المرن ، يساوى ما يلى :

$$W_p = \psi S_1 + S_2 = \frac{b}{2} \left(\psi h_1^2 + h_2^2 \right) = \frac{\psi b h^2}{2 (\psi + 1)}$$

حيث b و h — عرض وارتفاع المقطع على التوالى ؛

$$h_1 = \frac{h}{\psi + 1}$$

$$h_2 = \frac{\psi h}{\psi + 1}$$

وعند $\psi = 1$ ، كما هى الحالة بالنسبة للفولاذ مثلا ، نجد بأن $W_p = \frac{bh^2}{4}$.

إذن :

$$\frac{W_p}{W} = \frac{bh^2}{4} : \frac{bh^2}{6} = 1.5$$

حيث W — معامل المقطع المرن .

وعند $\psi = 2$ ، كما هى الحالة بالنسبة للمواد المصنوعة من الأسمنت والإسبستس ، نجد بأن :

$$W_p = \frac{bh^2}{3}$$

و

$$\frac{W_p}{W} = 2.0$$

ونستنتج من هنا ، بأن الحساب بأخذ لدونة المادة فى الاعتبار ، ويساعد على زيادة الحمل المؤثر على الإنشاء . وبالنسبة للمقطع شكل I ، عند $\psi = 1$ ، نجد بأن $\frac{W_p}{W} \approx 1.15$ ، وفى هذه الحالة سيكون التأثير الاقتصادى لأخذ الخواص اللدنة للمادة فى الاعتبار ، أقل كثيراً من السابق .

وللمواد التى تتميز بقيمة كبيرة للمقدار ψ ، يؤدى أخذ لدونة المادة فى الاعتبار ، إلى إعطاء أكبر تأثير اقتصادى ، وذلك لأنه يسمح بزياد الحمل إلى الضعفين وأكثر .

إن توزيع الإجهادات المتعامدة ومناطق الخضوع ، على طول العتبة ، يعتمد على شكل الرسم البيانى لعزوم الانحناء .

وعند إزالة الحمل ، تتناقص الإجهادات تبعاً لقانون الخط المستقيم ، المبين فى الشكل (١١ — ١) بخط منقط ، والمستقيم الموازى له ، الذى يميز طبيعة تأثير الحمل ، فى حدود المرونة . وبهذا الشكل ، تسلك المادة أثناء عملية إزالة الحمل ، سلوك الجسم المرن . والرسم البيانى للإجهادات المتعامدة فى المقطع العرضى للعتبة ، الناجمة عن إزالة الحمل ، سوف يقع على الرسم البيانى الرئيسى ، وتكون علامته معاكسة لعلامة الرسم البيانى الأخير (شكل ١١ — ٢ ، و) .

وعند إزالة الحمل عن العتبة نهائياً ، يأخذ الرسم البيانى النهائى للإجهادات المتعامدة ، الشكل المبين فى الشكل (١١ — ٢ ، ز) . وفى هذه الحالة يجب أن يكون عزم القوى الداخلية ، مساوياً للصفر ، وذلك لأن عزم الانحناء ، عند عدم وجود أحمال خارجية ، يساوى صفراً .

إن السعة الحملية للعتبة ، فى حالة الانحناء المستعرض (الانحناء غير البحت يمكن أن تقل إلى درجة ملحوظة ، بسبب اجهادات القص ، التى تظهر بوضوح وحدة ، وخاصة فى المرحلة المرنة — اللدنة (مرحلة المرونة واللدونة) .

مثال : يطلب اختيار مقطع عتبة بسيطة ، مصنوعة من الفولاذ ماركة Ct. 3 ، باعها يساوى $l = 6.0$ m ، إذا كان الحمل الساكن الموزع بانتظام ، يؤثر بشدة قدرها $q = 2.0$ t/m ، والحمل المتنقل مركز فى وسط الباع ، وقيمته تساوى $p = 5.0$ t . هذا مع العلم بأن عامل التحميل $n_q = 1.1$ و $n_p = 1.4$ على التوالى ، وعامل الخدمة يساوى $m = 0.9$.

الحل : إن عزم الانحناء التصميمى يساوى ما يلى :

$$M = \frac{n_q\, ql^2}{8} + \frac{n_p\, Pl}{4} = \frac{1.1 \times 2.0 \times 6^2}{8} + \frac{1.4 \times 5 \times 6}{4} =$$

$$= 9.9 + 10.5 = 20.4\text{tm} = 2040000 \text{ kgcm}$$

إن السعة الحملية المطلوبة ، لمقطع العتبة فى حالة الانحناء ، عند ما تكون المقاومة التصميمية للفولاذية ماركة Ct. 3 ، هى $R = 2100$ kg/cm² ، تساوى ما يلى :

$$M_{ult} = m\, R\, W_p = 0.9 \times 2100\, W_p = 1890\, W_p$$

وعندما نأخذ فى الاعتبار ، بأنه للمقطع شكل — I ، لدينا $W_p \approx 1.15\, W$ ، وبمساواة عزم الانحناء التصميمى ، لقيمة السعة الحملية المطلوبة للمقطع ، نحصل على ما يلى :

$$M = M_{ult} = 1890\, W_p$$

$$2040000 = 1890 \times 1.15\, W$$

ومنها ينتج أن :

$$W = 940 \text{ cm}^3$$

إذن نأخذ مقطع شكل — I رقم 36.c ، الذى معامل مقطعه يساوى $W = 962$ cm³ .
وعند الحساب بطريقة الإجهادات المسموح بها ، يجب أن نأخذ المقطع شكل — I رقم 40 c .

البند ١١ — ٣ : حساب العتبات غير المحددة استاتيكيا

فى الإنشاء غير المحدد استاتيكيا ، نجد بأن وصول الإجهادات فى بعض القطع ، إلى قيمها القصوى ، قد لا يؤدى إلى انهيار (تصدع) الإنشاء بأكمله ، إذا بقى ذلك الإنشاء ، بمساعدة القطع الأخرى ، محافظاً على استقراره الهندسى ، ويمكنه بالتالى ، تحمل الأحمال الإضافية الأخرى . وفى هذه الحالة ، بفضل التشوهات (الانفعالات) اللدنة للقطع ، التى وصلت فيها الإجهادات إلى قيمها القصوى ، يتم إعادة توزيع الإجهادات فى القطع ، ونتيجة لذلك تزداد السعة الحملية للإنشاء بأكمله . ويبدأ إنهيار الإنشاء أو تصدعه ، عند ما تستنفذ السعة الحملية ، لعدد معين من أربطته ، يساوى عدد الأربطة الزائدة فى الإنشاء ، زائداً واحد .

ولحساب الإنشاءات غير المحددة استاتيكياً ، بواسطة نظرية التوازن الحدى (النهائى) ، أى بأخذ الخواص اللدنة للمواد فى الاعتبار ، يمكن استخدام إحدى الطريقتين — الكينماتية أو الاستاتيكية . ولاستخدام الطريقة الكينماتية ، يجب معرفة الشكل الحقيقى للانهيار أو التصدع فى الإنشاء ، ووضع معادلات التوازن الحدى ، للإنشاء المتحرك ، الذى تحول إليه الإنشاء الأصلى بعد الانهيار . وفى هذه الحالة ، يعتبر الحمل معلوماً ، من حيث وضعه واتجاهه والنسبة بين مركباته المستقلة ، أى تعتبر كافة الأحمال ، المؤثرة فى الإنشاء ، وكأنها تزداد طرديا ، بالنسبة لقيمة متغيرة واحدة (لبارامتر واحد) . ويسمى قانون التحميل هذا بقانون التحميل

البسيط . وسيكون الشكل الحقيقى للانهيار ، هو الشكل المناظر للقيمة الصغرى للحمل الأقصى ، أى لحمل الانهيار .

ويمكن وضع معادلات التوازن الحدى ، إما على هيئة معادلات استاتيكية أو معادلات للشغل المنجز ، على أساس مبدأ الانحرافات المحتملة . وفى الحالة الأخيرة ، يجب تعريض الإنشاء المبحوث ، لانحراف لا نهائى القيمة ، يمكن حدوثه بفضل تحويل الإنشاء إلى إنشاء متحرك .

وتستند الطريقة الاستاتيكية ، إلى إيجاد كيفية توزيع الإجهادات الداخلية فى الإنشاء غير المحدد استاتيكياً ، التى تؤدى بعد أخذ إجهاداته الابتدائية أو الذاتية ، فى الاعتبار ، إلى انهياره . ولهذا الغرض ، يجب أخذ مجموعة معينة من الإجهادات الداخلية ، الواقعة فى توازن مع الحمل المعلوم ، ويضاف إليها عدد من مجموعات الإجهادات الداخلية الذاتية التوازن ، التى تناظر حمل الصفر ، يساوى عدد القوى المجهولة فى الإنشاء المعلوم غير المحدد استاتيكياً .

وفى حالة التوازن الحدى ، يجب أن تصل بعض الإجهادات الداخلية الجماعية ، إلى قيمتها القصوى .

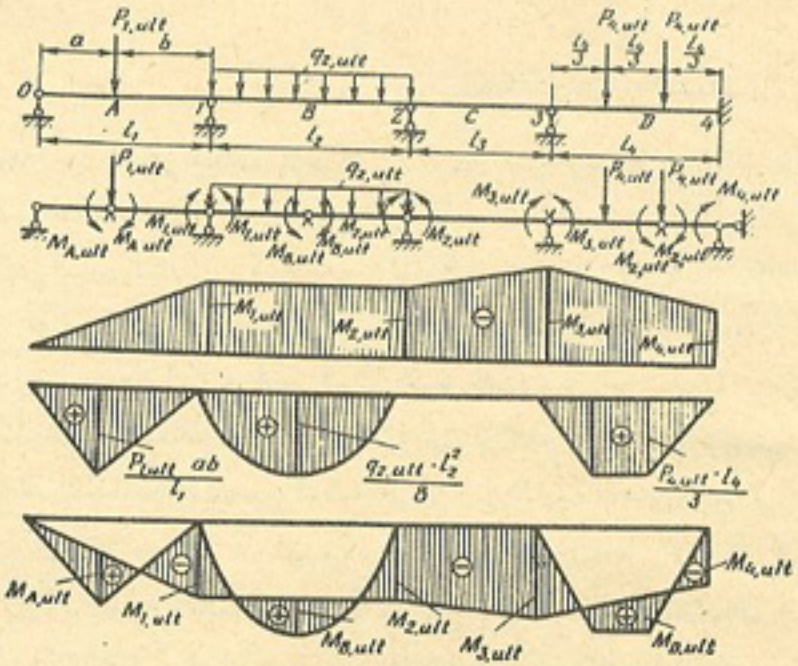
ويمكن إيجاد التوزيع الحقيقى للإجهادات الداخلية ، من شرط الحصول على أكبر حمل إنهيار ممكن ، من بين الأحمال المتوفرة .

إن الطريقتين الكينماتية والإستاتيكية لحساب الإنشاء غير المحدد استاتيكياً ، مع أخذ الخواص اللدنة للمواد فى الاعتبار ، تؤديان إلى نفس النتائج بالذات . وفى حالات كثيرة ، يمكن استخدام طريقة موازنة العزوم ، المشتقة من الطريقة الكينماتية .

إن ظهور كل مفصلة لدنة ، فى العتبة المتواصلة ، يدل على فقدان رباط واحد ، وانخفاض درجة عدم التحديد الاستاتيكى للعتبة ، بمقدار درجة واحدة . ولهذا السبب ، يجب أن يحدث الفقدان التام للسعة الحملية للعتبة المتواصلة ، عند ما يزيد عدد المفصلات اللدنة ، على درجة عدم التحديد الاستاتيكى للعتبة المتواصلة ، بواحد فقط .

ولكن السعة الحملية لأى باع منفرد من أبواع العتبة المتواصلة ، سوف تستنفد

حالا ، عند ما تظهر فيه ثلاث مفصلات لدنة . والمثال يمكن بحث كل باع من أبواع العتبة المتواصلة ، بصورة مستقلة عن الأبواع الأخرى .



الشكل ١١ — ٣

ولنبحث الآن العتبة المتواصلة ، المبينة فى الشكل (١١ — ٣ ، أ) ، التى يطلب تحديد سعتها الحملية ، عند تعرضها لتأثير الحمل ، الذى يعرف موضعه فى كل باع من الأبواع . وكما هى الحالة عند الحساب فى حالة المرونة ، ننتقل إلى الإنشاء الرئيسى ، المبين فى الشكل (١١ — ٣ ، ب) ، ونخطط على انفراد الرسوم البيانية لعزوم الانحناء ، الناجمة عن تأثير عزوم المساند القصوى (شكل ١١ — ٣ ، جـ)* ، وعن تأثير الحمل الأقصى ، المعلوم من حيث الموضع ، والمجهول من حيث القيمة (شكل ١١ — ٣ ، د) .

* إن الشكل (١١ — ٣ ، جـ) مرسوم على فرض أن أبعاد المقاطع العرضية للعتبة ، متغيرة على طول العتبة بأكله .

إن الإحداثيات الرأسية لعزوم الانحناء ، الناجمة عن تأثير عزوم المساند ، عند ظهور المفصلات اللدنة فوق المساند ، يجب أن تساوى السعات الحملية لمقاطع المساند :

$$M_{1,ult} \quad ; \quad M_{2,ult} \quad ; \quad M_{3,ult} \quad ; \quad M_{4,ult}$$

وهذا يساعد على تخطيط الرسم البيانى النهائى للعزوم ، بطريقة وضع الرسوم البيانية الموجبة للعتبات ، الناجمة عن تأثير الأحمال ، المرسومة للأبواع المنفردة ، على الرسم البيانى السالب ، الناجم عن تأثير عزوم المساند . وفى هذه الحالة ، يتم اختيار مقياس رسم هذه الرسوم البيانية الأخيرة ، فى كل باع ، بحيث تكون الإحداثيات الموجبة الكبرى للرسم البيانى النهائى للعزوم فى أبواع العتبة ، مساوية للسعات الحملية للمقاطع المناظرة (شكل ١١ — ٣ ، هـ) . وسوف نسمى هذه العملية ، بعملية موازنة الرسوم البيانية للعزوم . إن القيمة القصوى للحمل ، لكل باع من الأبواع ، يمكن أن تستخرج من الشرط الذى يجعل الإحداثى الرأسى للرسم البيانى لعزوم العتبة ، مساوياً لمجموع القيم المطلقة للإحداثيات الرأسية المناظرة ، فى الرسم البيانى الناجم عن تأثير عزوم المساند ، وإحداثيات الرسم البيانى النهائى للعزوم .

وعلى سبيل المثال ، نحصل على العلاقة التالية ، للباع الأول (الأيسر) :

$$\frac{P_{1ult}\, ab}{l_1} = \frac{M_{1ult}\, a}{l_1} + M_{A\,ult}$$

ومنها ينتج أن :

$$P_{1,ult} = \frac{M_{1,ult}}{b} + \frac{M_{A,ult}\, l_1}{ab}$$

ونحصل بالنسبة للباع الثانى ، عند تساوى عزوم المساند القصوى $M_{1,ult} = M_{2,ult}$ ، على ما يلى :

$$\frac{q_{2,ult}\, l_2^2}{8} = M_{1,ult} + M_{B,ult}$$

أو على ما يلى :

$$q_{2,ult} = \frac{8\,(M_{1\,ult} + M_{B\,ult})}{l_2^2}$$

وبالنسبة للباع الرابع ، نحصل على ما يلى :

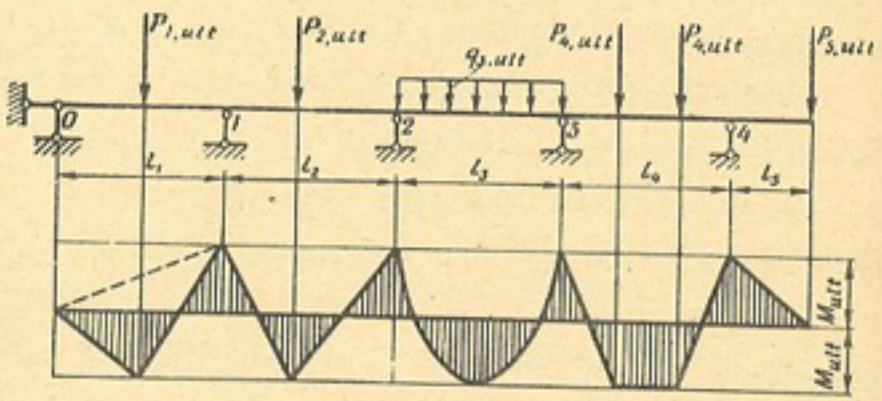
$$\frac{P_{4\,ult}\, l_4}{3} = \frac{M_{3\,ult}}{3} + \frac{2\,M_{4\,ult}}{3} + M_{D\,ult}$$

أو على ما يلى :

$$P_{4\,ult} = \frac{M_{3\,ult} + 2M_{4\,ult} + 3M_{D\,ult}}{l_4}$$

وبمعرفة قيم السعات الحملية للمقاطع فى حالة الانحناء ، يمكن تحديد الحمل الأقصى (الحدى) لكل باع من الأبواع ، أى تحديد السعة الحملية للعتبة ذاتها .

ويمكن بسهولة تامة إيجاد السعة الحملية للعتبة المتواصلة ، التى تكون السعات الحملية لكافة مقاطعها العرضية ، متساوية فيما بينها M_{ult} . ولهذه العتبة ، يكفى أن نجعل الإحداثيات الرأسية للرسم البيانى النهائى للعزوم عند المساند وفى الأبواع ، مساوية لبعضها البعض (شكل ١١ — ٤) .



الشكل ١١ — ٤

ولقيام بحل المسألة بصورة عكسية ، أى لاختيار أبعاد المقطع العرضى ، بواسطة حمل التصميم ، يجب تخطيط الرسوم البيانية لعزوم الانحناء ، لكل باع من الأبواع على انفراد ، باعتباره عتبة مستقلة ، وبعد ذلك يجب اختيار قيم عزوم الانحناء القصوى فى الباع ، وعند المساند ، بالكيفية ، التى تجعل النسبة بينها ، مساوية لنفس النسبة بين السعات الحملية للمقاطع المناظرة . ويجب معرفة هذه النسب مقدماً ، وذلك لأنه بعكس ذلك ، سنحصل على عدد لا يحصى من الحلول .

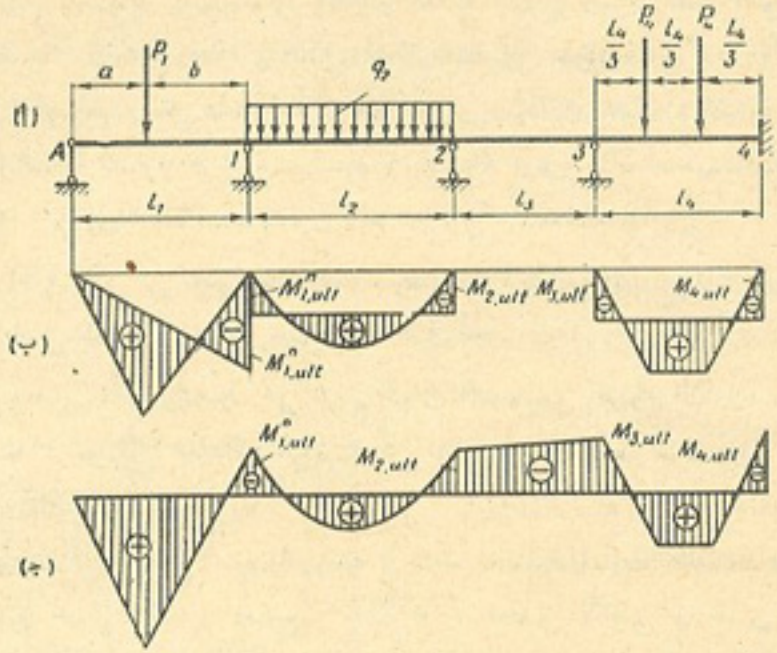
ولنفرض على سبيل المثال ، أن المطلوب تخطيط الرسم البيانى التصميمى لعزوم الانحناء ، فى عتبة المثال السابق ، على شرط أن تكون قيمة احمال التصميم معلومة أيضاً ، بالإضافة إلى معرفة موضعها .

وباعتبار أن أحمال التصميم تساوى الأحمال القصوى (الحدية) ، يمكن تخطيط الرسم البيانى المطلوب للعزوم ، باعتباره الرسم البيانى النهائى ، لكل باع من الأبواع . وفى هذه الحالة ، يجب قبل كل شئ ، تخطيط الرسم البيانى للعزوم ، لكل باع على انفراد ، الناجم عن تأثير الحمل المعلوم ، مع حساب الإحداثيات الرأسية الخاصة .

ثم نجرى فى كل باع من الأبواع ، عملية الموازنة المسبقة للرسوم البيانية لعزوم الانحناء ، كما مبين فى الشكل (١١ — ٥ ، ب) . وإذا كان من الضرورى أن تكون السعة الحملية لكافة مقاطع العتبة ، متساوية فيما بينها (عتبة ثابتة المقطع) ، عندئذ يتم اختيار هذه المقاطع ، بواسطة عزم الانحناء الأقصى . وفى هذا المثال ، يتم اختيار المقاطع بواسطة عزم الانحناء المسبق الموازنة ، فى الباع الأول . وفى بقية الأبواع ، لا يمكن ظهور المفصلات اللدنة ، عند تأثير الحمل المعلوم .

وإذا كان المطلوب تخطيط الرسم البيانى التصميمى لعزوم الانحناء ، المناظر لظهور المفصلات اللدنة فى جميع الأبواع المحملة للعتبة ، الناجم عن تأثير حمل التصميم المعلوم ، يجب عندئذ ، القيام بموازنة أخرى لعزوم الانحناء ، إلى يسار ويمين كل مسند .

ويجب أن ننتقل بالتتابع ، من الأبواع ذات عزوم الانحناء التصميمية الأقل ، إلى الأبواع ذات عزوم الانحناء التصميمية الأكبر . وبالنسبة للعتبة التى



الشكل ١١ — ٥

نبحثها الآن ، يجب أن نبدأ من الباع الثانى ، الذى يعتبر الرسم البيانى للعزوم فيه ، هو الرسم البيانى النهائى .

ثم نتناول بعد ذلك ، الباع الرابع . وبما أن الباع لا يجاور الباع الثانى ، إذن يمكن اعتبار الرسم البيانى لعزوم الانحناء ، الذى تمت موازنته (الرسم البيانى المكافئ) ، بمثابة الرسم البيانى النهائى لعزوم الانحناء .

وعند الانتقال إلى الباع الأول ، يجب أن نأخذ فى الاعتبار ، مجاورته للباع الثانى ، الذى خططنا الرسم البيانى لعزوم انحنائه من قبل . ويجب أن يخطط الرسم البيانى لعزوم الانحناء فى الباع الأول ، بعد أن نأخذ فى الاعتبار ، عزم الانحناء عند المسند رقم 1 ، المستخرج من قبل .

وفى الباع الخالى من الأحمال ، يجب أن نرسم خطاً مستقيماً يصل بين الإحداثيات الرأسية للرسم البيانى لعزوم الانحناء ، على المسندين المجاورين 2 و 3 . والرسم البيانى النهائى لعزوم الانحناء التصميمية ، مبين فى الشكل (١١ — ٥ ، ج) . وبموجب

هذا الرسم البيانى ، يجب أن يتم اختيار المقاطع لأبواع ومساند العتبة المتواصلة : وستكون هذه المقاطع مختلفة ، ولكن مقاومة العتبة تبقى متساوية فى كافة الأبواع .

ويمكن القيام بحل هذه المسألة بطرق أخرى ، إذا استندنا عند الموازنة المسبقة للرسوم البيانية لعزوم الانحناء ، ليس إلى مساواة عزوم الانحناء عند المساند وفى الأبواع ، بل إلى النسبة المحددة بين هذه العزوم ، المتخذة ساذاً .

وإذا لم يكن من الضرورى تحقيق شرط مساواة مقاومة الأبواع المنفردة ، عند تأثير الحمل المعلوم ، عندئذ يمكن إيجاد طرق أخرى للحل .

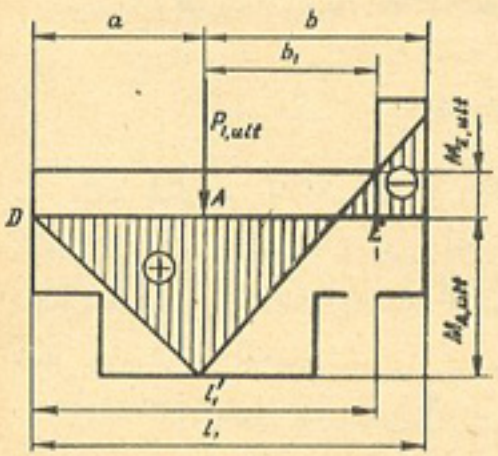
ويمكن كذلك الحصول على الرسم البيانى التصميمى لعزوم الانحناء ، للعتبة المتواصلة ، بموازنة (معادلة) الرسم البيانى المناظر ، المخطط استناداً إلى اعتبار الإنشاء بمثابة جسم مرن .

ولمعرفة درجة أمان العتبة المتواصلة ، ذات الحماية المعلومة لكافة مقاطعها ، عند تأثير حمل التصميم المعلوم ، يجب تحديد الحمل الأقصى (الحدى) لكل باع من الأبواع . ولهذا الغرض ، نقوم بموازنة الرسوم البيانية لعزوم الانحناء ، كما مبين فى الشكلين (١١ — ٣) و (١١ — ٤) ، مع فرق واحد هو أن السعات الحملية لمقاطع العتبة ، يجب أن تحدد بدون استخدام عامل الخدمة . ويحدد عامل الخدمة لكل باع من الأبواع ، بصورة مستقلة ، باعتباره مساوياً للنسبة بين احمال التصميم والأحمال القصوى .

وتوجد طريقة أخرى لحل هذه المسألة . يمكن تخطيط الرسم البيانى المكافئ لعزوم الانحناء ، كما فعلنا فى الشكل (١١ — ٥) ، وتحديد السعة الحملية المطلوبة للمقاطع فى كل باع من الأبواع . وبمقارنتها مع السعات الحملية المعلومة (عند $m = 1$) ، يمكن الحصول على القيم الحقيقية لعوامل الخدمة .

وفى المثال الذى نبحثه ، اعتبرنا بأن المفصلات اللدنة ، يجب أن تظهر عند المساند ، وفى مقاطع الأبواع ، التى تظهر فيها عزوم انحناء قصوى . ولكن عند التغير الحاد للسعات الحملية ، مثل التغير التدريجى للسعات الحملية للمقاطع على طول العتبة (مثل العتبة الخرسانية المسلحة) ، يحدث بأننا لا نستطيع أن نحدد سلفاً ، المواضع التى تظهر أو تتكون فيها المفصلات اللدنة .

وفى هذه الحالات ، يجب أن نخطط لكل باع من الأبواع ، الرسم البيانى للمواد (شكل ١١ — ٦) ، أى الرسم البيانى ، الذى يوضح قانون تغير السعات الحملية للمقاطع ، على طول الباع . ويتألف هذا الرسم البيانى من قسمين ، أحدهما موجب والثانى سالب ، وذلك لأن كل مقطع ، يمكن أن يقاوم — ولو بدرجة مختلفة — عزوم انحناء مختلفة العلامة .



الشكل ١١ — ٦

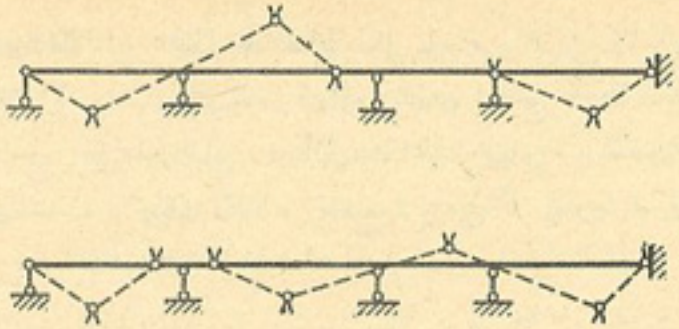
إن الرسم البيانى لعزوم الانحناء للعتبة البسيطة ، يجب أن يرسم ضمن الرسم البيانى للمواد ، بحيث يمس الرسم الأخير فى ثلاثة مقاطع . وفى هذه المقاطع بالذات ، يجب أن تظهر المفصلات اللدنة .

ولنفرض بأن الرسم البيانى للمواد ، للباع الأول من العتبة المبينة فى الشكل (١١ — ٤) ، يكون على الهيئة المبينة فى الشكل (١١ — ٦) ، (خط مدرج) : وبتخطيط الرسم البيانى لعزوم انحناء العتبة البسيطة ، فى داخل الرسم البيانى للمواد ، نجد بأن المفصلات اللدنة يجب أن تظهر فى المقطعين A و E .

وتستخرج القيمة القصوى للحمل P ، من النسبة بين الأحداثيات الرأسية للرسوم البيانية ، وهذه القيمة تساوى ما يلى :

$$P_{1\,ult} = \frac{M_{E\,ult}}{b_1} + \frac{M_{A\,ult}\,(a + b_1)}{ab_1}$$

وفى العتبة المتواصلة المتعددة الأبواع ، ذات السعات الحملية المختلفة لمقاطعها المنفردة ، يمكن أن تتكون المفصلات اللدنة فى مختلف الأبواع ، كما مبين فى الشكل (١١ — ٧) على سبيل المثال .



الشكل ١١ – ٧

ولكل شكل من أشكال الانهيار (التصدع) ، قيمة مناظرة له من الحمل الأقصى . ولأجل الحساب ، يجب أخذ القيمة الصغرى من قيم الحمل P_{ult} ، المناظرة لمختلف الأشكال المحتملة للانهيار . ويجب أن يهمل من الحساب ، شكل الانهيار غير المحتمل .

وإذا كان الحمل المؤثر على العتبة المتواصلة ، يتألف من حمل ساكن وحمل متنقل ، معبر عنهما بقيمة متغيرة (بارامتر) واحدة ، أى توجد بينهما علاقة معينة ، عندئذ لإيجاد القيم الحدية أو القصوى لهذين الحملين ، يجب تخطيط الرسم البيانى المغلف لعزوم الانحناء (envelope diagram) ، الذى يجب أن يعبر عن إحداثياته الرأسية ، بواسطة بارامتر الحمل . وتتم موازنة (معادلة) الرسم البيانى المغلف ، مع أخذ السعات الحملية المعلومة للمقاطع ، على طول العتبة ، فى الاعتبار . وبعد ذلك يتم إيجاد الحمل الأقصى .

إن حل المسألة بصورة عكسية ، أى تحديد السعة الحملية المطلوبة للمقاطع المنفردة ، باستخدام الحملين التصميميين (حملى التصميم) الساكن والمتنقل المعلومين ، يتم أيضاً بطريقة موازنة (معادلة) الرسم البيانى المغلف لعزوم الانحناء ، وهو فى هذه الحالة الرسم الناجم عن تأثير أحمال التصميم .

وهكذا نجد بأنه من الممكن حساب الإنشاء غير المحدد استاتيكياً ، بأخذ لدونة المادة فى الاعتبار ، بدون وضع وحل معادلات التشوه (الانفعال) .

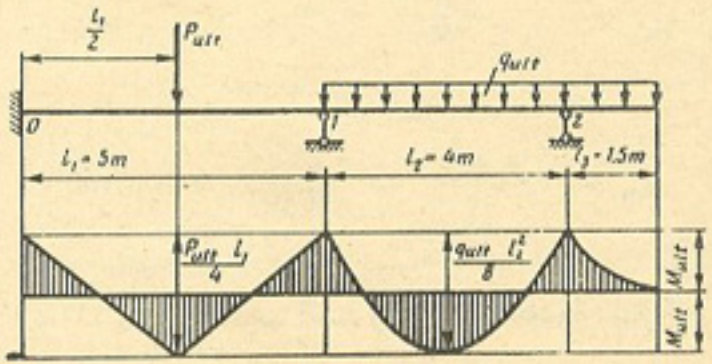
وبما أن العتبة تتحول فى الحالة الحدية ، إلى إنشاء غير مستقر ، وفى هذا

الإنشاء ، لا تؤدى انحرافات المساند إلى نشوء الإجهادات ، إذن نجد بأن هبوط المساند أو الطرف المبيت المرن للعتبة ، لا يؤثر على قيمة الحمل الأقصى ، ولا على الحالة الحدية للإجهاد فى العتبة . وهذا ينطبق أيضاً ، على تأثير درجة الحرارة وعدم دقة تجميع الإنشاء . إن الطرف المبيت المرن ، يكافئ الجسوءة .

وإذا أزلنا الحمل عن العتبة غير المحددة استاتيكياً ، التى ظهرت فى بعض مقاطعها ، مناطق خضوع ، فإنه عند إزالة الحمل تبقى الانفعالات (التشوهات) المتخلفة والإجهادات المتخلفة ، التى سوف لا تكون فى هذه المقاطع ، ذاتية التوازن بعد الآن ، كما يحدث ذلك فى العتبات المحددة استاتيكياً .

وبالإضافة إلى تلك الإجهادات التى تعتبر ذاتية التوازن ، تظهر أيضاً إجهادات ناشئة عن ردود فعل الأربطة الزائدة . ولكن هذه الإجهادات لا تؤثر على السعة الحملية للإنشاء ، ولهذا السبب ، لا تكون لمسألة تحديد هذه الإجهادات ، المعقدة جداً ، أية أهمية عملية فى الواقع .

مثال : يطلب تحديد السعة الحملية للعتبة المتواصلة المدلفنة ، التى على شكل I (من العتبة I رقم 20 a) ، المبينة فى الشكل (١١ – ٨) . هذا مع العلم بأن معامل مقطع العتبة يساوى $W = 237\ cm^3$ وأن المقاومة التصميمية للفولاذ ماركة Gt. 3 تساوى $R = 2100\ kg/cm^2$ ، وعامل الخدمة يساوى $m = 1.0$.



الشكل ١١ – ٨

الحل : إن السعة الحملية لمقاطع العتبة ، فى حالة الانحناء ، تساوى ما يلى :

$$M_{ult} = m\ R\ W_p = m\ R \times 1.15\ W = 1.0 \times 2100 \times 1.15 \times$$
$$\times\ 237 = 573000\ \text{kg.cm} = 5.73\ \text{tm}$$

وللباع الأول ، تكون النسبة بين الإحداثيات الرأسية لعزوم كما يلى (لاحظ الشكل ١١–٨) :

$$\frac{P_{ult}\ l_1}{4} = 2\ M_{ult}$$

ومنها ينتج أن :

$$P_{ult} = \frac{8\ M_{ult}}{l_1} = \frac{8 \times 5.73}{5.0} = 9.18\ \text{tons}$$

وللباع الثانى :

$$\frac{q_{ult}\ l_2^2}{8} = 2\ M_{ult}$$

ومنها ينتج أن :

$$q_{ult} = \frac{16\ M_{ult}}{l_2^2} = \frac{16 \times 5.73}{4.0^2} = 5.73\ \text{t/m}$$

وللكابول :

$$\frac{q_{ult}\ l_3^2}{2} = M_{ult}$$

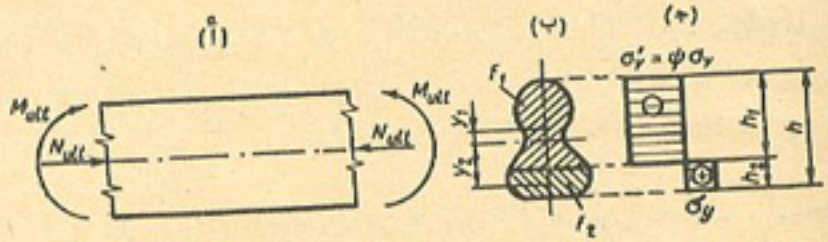
ومنها ينتج أن :

$$q_{ult} = \frac{2\ M_{ult}}{l_3^2} = \frac{2 \times 5.73}{1.5^2} = 5.10\ \text{t/m}$$

البند ١١ – ٤ : حساب العقود والأطر غير المحددة استاتيكيا

إن قضبان (قطع) العقد والإطار ، تتعرض للتأثير الموحد لعزوم الانحناء والقوى الطولية ، ولهذا سنبحث مقدماً ، حالة المقاومة الموحدة ، فى مرحلة اللدونة .

وسوف نبحث القضيب المصنوع من مادة مرنة – لدنة ، ذى المقاومات القصوى المختلفة فى حالة الشد (σ_y) وفى حالة الانضغاط ($\sigma'_y = \psi\ \sigma_y$) . وسنقتصر فى هذا المجال ، على بحث الحالة التى يكون فيها للمقطع العرضى للقضيب ، محور تماثل واحد على الأقل ، يؤثر فى مستواه عزم الانحناء الأقصى M_{ult} . وبالإضافة إلى ذلك ، تؤثر على امتداد محور القضيب ، القوة الطولية القصوى N_{ult} (شكل ١١ – ٩) .



الشكل ١١ – ٩

وعند ذلك ، تتكون المفصلة اللدنة ، عندما يصبح شكل الرسم البيانى للإجهادات المتعامدة ، كما هو عليه فى الشكل (١١ – ٩ ، جـ) . وفى هذه الحالة ، كلما زاد انحراف محور التعادل نحو طرف المقطع ، كلما قل الاختلاف المركزى (اللامركزية) $e = \frac{M_{ult}}{N_{ult}}$.

إن القوة الطولية القصوى (الحدية) ، تساوى محصلة القوى الداخلية ، الموجودة فى مساحة المقطع العرضى بأكمله ، ويعبر عنها كما يلى :

$$N_{ult} = \sigma_y\ (\psi\ A_1 - A_2)$$

حيث A_1 و A_2 – مساحتا القسمين المضغوط والمشدود للمقطع العرضى ، على التوالى .

وبما أن $A_1 + A_2 = A$ ، إذن يمكن إيجاد مساحتى القسمين المضغوط والمشدود ، للمقطع العرضى ، الأمر الذى يساعد على تحديد موضع خط الصفر (zero line) :

$$A_1 = \frac{A}{1+\psi}\left(1+\psi\,\frac{N_{ult}}{N^0_{ult}}\right)$$

$$A_2 = \frac{\psi A}{1+\psi}\left(1-\frac{N_{ult}}{N^0_{ult}}\right)$$

حيث $N^0_{ult} = \psi\,\sigma_y\,A$ ، أى تمثل قوة الانضغاط القصوى فى حالة الإنضغاط البحت .

إن القيمة القصوى لعزم الانحناء ، عند وجود القوة الطولية N_{ult} ، تساوى ما يلى :

$$M_{ult} = \sigma_y\,(\psi A_1 y_1 + A_2 y_2) = M^0_{ult} \times \nu$$

حيث y_1 و y_2 — تمثلان المسافتين من مركزى ثقل القسمين المضغوط والمشدود ، إلى مركز ثقل المقطع بأكمله .

$\sigma_y\,W_p = M^0_{ult}$ ، تمثل القيمة القصوى لعزم الانحناء فى حالة الانحناء البحت :

ν — تمثل المعامل الذى يأخذ فى الاعتبار ، تأثير القوة الطولية على السعة الحملية للمقطع عند تعرضه للانحناء ، ويساوى ما يلى :

$$\nu = \frac{\psi A_1 y_1 + A_2 y_2}{W_p}$$

حيث W_p — معامل المقطع اللدن ، المستخرج بأخذ مختلف نقاط الخضوع فى الاعتبار ، عند الانضغاط والشد .

وبالنسبة للمقطع العرضى المستطيل ، الذى أبعاده هى b و h ، ومعامل مقطعه يساوى $W_p = \frac{\psi\,bh^2}{2\,(1+\psi)}$ ، نجد ما يلى :

$$h_1 = \frac{h}{1+\psi}\left(1+\psi\,\frac{N_{ult}}{N^0_{ult}}\right)$$

$$h_2 = \frac{\psi h}{1+\psi}\left(1-\frac{N_{ult}}{N^0_{ult}}\right)$$

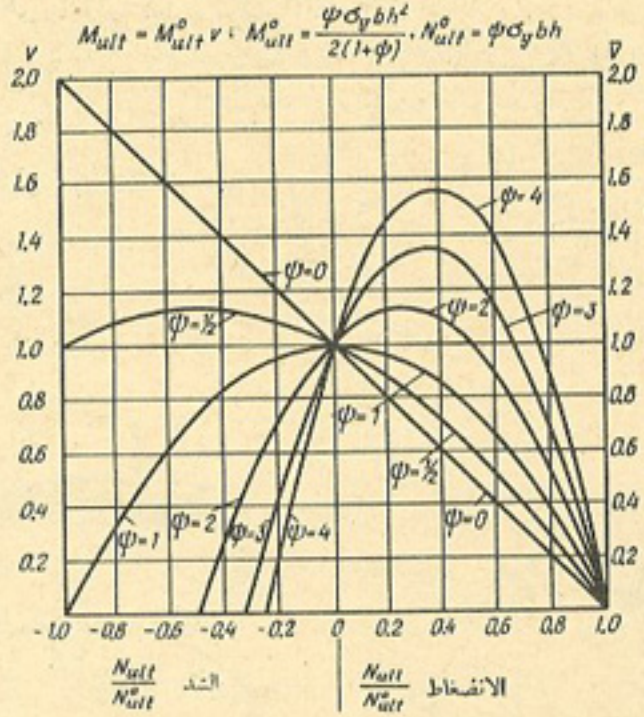
$$N^0_{ult} = \psi\,\sigma_y\,bh$$

$$y_1 = \frac{h-h_1}{2} = \frac{h_2}{2}$$

$$y_2 = \frac{h-h_2}{2} = \frac{h_1}{2}$$

$$\nu = \frac{(\psi h_1 h_2 + h_1 h_2)\,(1+\psi)}{\psi h^2} = \left(1+\psi\,\frac{N_{ult}}{N^0_{ult}}\right)\left(1-\frac{N_{ult}}{N^0_{ult}}\right)$$

ويبين الشكل (١١ — ١٠) ، منحنيات تغير العامل ν ، تبعاً للنسبة $\frac{N_{ult}}{N^0_{ult}}$ ، لمختلف قيم ψ . ويمكن تخطيط الرسوم البيانية المناظرة ، للقطاع الخرسانية المسلحة أيضاً .



الشكل ١١ — ١٠

ومن دراسة المنحنيات المذكورة ، يمكن التوصل إلى النتيجة التالية : إذا كانت قيمة العامل ν ، للقضيب ذى نقاط الخضوع المتساوية ، فى حالتى الشد

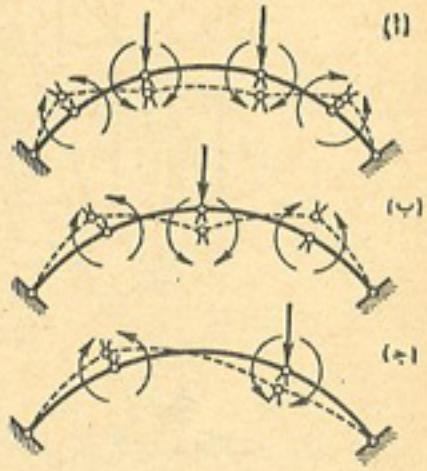
والانضغاط ($\psi = 1$) أقل من الواحد دائماً ، إذن يمكن أن تكون قيمة العامل ν ، للقضبان ذات نقاط الخضوع المختلفة ($\psi \neq 1$) ، أكبر من الواحد أيضاً . وهذا يعنى أنه فى هذه الحالات ، لا تنخفض السعة الحملية للقضيب ، فى حالة الانحناء الناجم عن تأثير القوة الطولية ، بل على العكس ، تزداد . وليس للحالة التى تكون فيها $\psi = 0$ ، أية أهمية ، سوى من الناحية النظرية .

وعند إجراء الحسابات ، تستبدل قيمة نقطة الخضوع σ_y ، بقيمة mR_r ، أى بالمقاومة التصميمية الاصطلاحية للمادة ، فى حالة الشد .

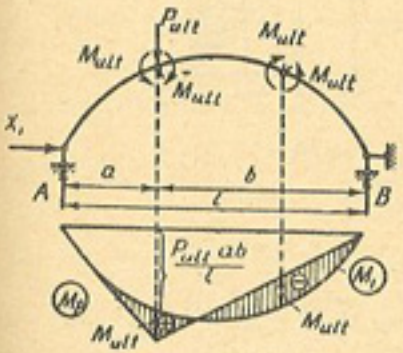
وتتلخص الصعوبة الأساسية عند حساب العقود والأطر غير المحددة إستاتيكياً ، مع أخذ لدونة المادة فى الاعتبار ، فى إيجاد الشكل الحقيقى لانهيارها أو تصدعها ، أى تتلخص الصعوبة فى تحديد موضع المفصلات اللدنة .

وفى بعض الأحيان ، يكون من المفيد حساب الإنشاء مقدماً ، باعتباره جسماً ، وإيجاد مواضع المفصلات اللدنة على أساس هذا الحساب .

ويمكن أن يكون شكل انهيار (تصدع) العقد المتصل بمفصلتين ، تبعاً لترتيب مواضع الأحمال ، إما متماثلا أو غير متماثل . وفى حالة الانهيار المتماثل ، يجب أن تتكون أربع مفصلات لدنة (شكل ١١ — ١١ ، أ) ، أو ثلاث مفصلات عند اندماج المفصلتين المتوسطتين فى مفصلة واحدة (شكل ١١—١١ ، ب) .



الشكل ١١ — ١١



الشكل ١١ — ١٢

وفى حالة الانهيار غير المتماثل ، يكون عدد المفصلات اللدنة ، مساوياً لاثنين فقط (شكل ١١ — ١١ ، ج) .

والآن نثبت بأنه يمكن استخدام طريقة موازنة العزوم ، لحساب العقود المتصلة بمفصلتين (شكل ١١ — ١٢) .

وبالانتقال من الإنشاء الأصلى إلى الإنشاء الرئيسى ، نخطط له الرسم البيانى لعزوم الانحناء M_1 ، الناجمة عن القوة الدفعية X_1 ، والرسم البيانى للعتبة البسيطة M_p ، الناجم عن الحمل المعلوم الموضع . وللحصول على الرسم البيانى النهائى للعزوم M ، يجب جمع الرسمين البيانيين للعزوم M_1 و M_p ، اللذين يختلفان فى العلامة . وفى هذه الحالة ، يكون الرسم البيانى للعزوم M_1 ، مشابهاً لمحور العقد من حيث الشكل التخطيطى . ويجب اختيار مقياس الرسم البيانى ، بالكيفية التى تجعل النسبة بين القيم المطلقة للاحداثيات الرأسية الكبرى الأربعة أو الثلاثة أو الاحداثيين الإثنين (تبعاً لشكل الإنهيار) ، مساوية للنسبة بين السعات الحملية للمقاطع المناظرة .

ولحساب القوى الطولية ، يجب تحديد السعات الحملية للمقاطع فى حالة الانحناء ، مع أخذ العامل ν فى الاعتبار . وهنا ، نظراً لعدم معرفة القوى الطولية ، المؤثرة فى كل مقطع من المقاطع ، يجب إعطاء قيم العامل ν سلفاً . وفى حالة التقريب الأولى ، يمكن اعتبار القيم المذكورة ، مساوية للواحد .

وبعد تخطيط الرسم البيانى النهائى لعزوم الانحناء ، يجب إيجاد الحمل الأقصى من النسبة بين الاحداثيات الرأسية لهذا الرسم البيانى ، كما فعلنا أعلاه بالنسبة للعتبة المتواصلة .

ويحدد موضع المفصلات اللدنة ، من موضع الإحداثيات الرأسية الكبرى للرسم البيانى النهائى للعزوم .

وعند حل المسألة بالعكس ، أى عند تخطيط الرسم البيانى للعزوم ، الناجمة عن تأثير حمل التصميم المعلوم ، الذى يؤخذ مساوياً للحمل الأقصى ، ستعتبر المعطيات الأساسية ، هى الاحداثيات الرأسية للرسم البيانى للعزوم فى العتبة البسيطة .

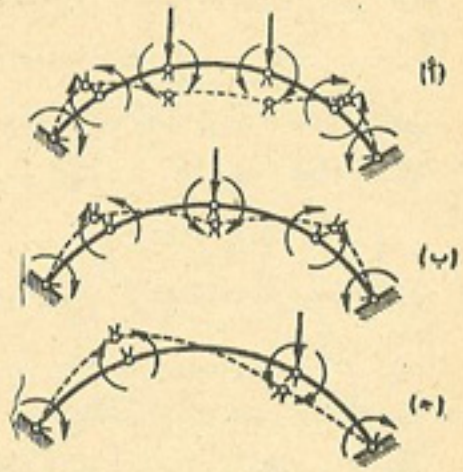
وبواسطتها يمكن بعدئذ إيجاد الإحداثيات الرأسية للرسم البيانى النهائى للعزوم ، أى للرسم البيانى المكافئ .

إن شكل انهيار (تصدع) العقد المتماثل الخالى من المفصلات ، قد يكون متماثلا أو غير متماثل ، تبعاً لموضع الحمل .

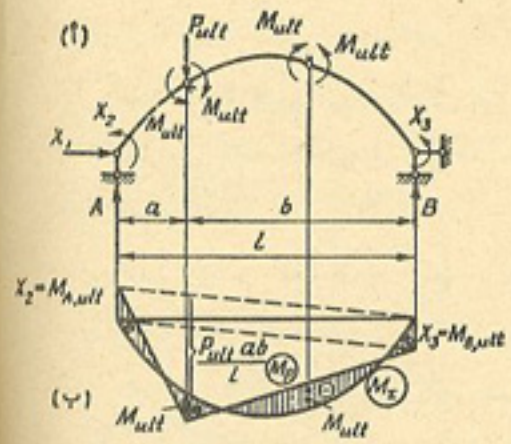
وفى حالة الانهيار المتماثل ، يجب أن يكون عدد المفصلات اللدنة مساوياً لست مفصلات ، أو خمس مفصلات عند اندماج المفصلتين المتوسطتين فى مفصلة واحدة (شكل ١١ — ١٣ ، أ و ب) .

وفى حالة الانهيار غير المتماثل ، يجب أن يتكون فى العقد الخالى من المفصلات ، ما لا يقل عن أربع مفصلات لدنة (شكل ١١ — ١٣ ، ج) .

وعند حساب السعة الحملية للعقد الخالى من المفصلات ، ننتقل إلى الإنشاء الرئيسى المبين فى الشكل (١١ — ١٤ ، أ) ، ونخطط له الرسم البيانى الإجمالى (الكلى) لعزوم الانحناء M_Σ ، الناجمة عن تأثير الإجهادات المجهولة X_1 ، X_2 و X_3 ، وكذلك نخطط الرسم البيانى للعزوم M_p ، الناجمة عن تأثير الحمل المعلوم الموضع . إن قيم وعلامات الإحداثيات الرأسية للرسم البيانى الإجمالى للعزوم $M_\Sigma = M_1 + M_2 + M_3$ ، غير معلومة لحد الآن .



الشكل ١١ — ١٣



الشكل ١١ — ١٤

ولحصول على الرسم البيانى النهائى للعزوم ، فى العقد الخالى من المفصلات (شكل ١١ — ١٤ ، ب) ، يجب جمع الرسمين البيانيين للعزوم M_p و M_Σ ، انطلاقاً من أن شكل انهيار العقد ، عند تأثير الحمل غير المتماثل ، سيكون شكلا غير متماثل أيضاً ، وأنه يجب أن تتكون أربع مفصلات لدنة ، تنفتح فى اتجاهات مختلفة . وفى هذه الحالة ، يجب أن تكون للإحداثيات الرأسية الكبرى ، من حيث القيمة المطلقة ، علامات مختلفة على التوالى ، وتكون مساوية للسعات الحملية المعلومة ، المناظرة لمقاطع العقد .

وعندما يكون حمل التصميم للعقد الخالى من المفصلات ، معلوماً لدينا ، ستكون المجاهيل هى الإحداثيات الرأسية للرسم البيانى للعزوم فى العتبة البسيطة ، والتى يمكن استناداً إلى قيمها ، إيجاد الإحداثيات الرأسية للرسم البيانى النهائى لعزوم الانحناء .

ويؤخذ فى الاعتبار أيضاً ، تأثير القوى الطولية على السعة الحملية للمقاطع ، كما هى الحالة بالنسبة للعقد المتصل بمفصلتين .

مثال : يطلب تخطيط الرسم البيانى المكافئ ، لعزوم الانحناء ، للعقد الخالى من المفصلات المخطط على هيئة قطع مكافئ مخروطى ، وسهم انحنائه يساوى $f = 3$ m وباعه يساوى $l = 12$ m عند تعرضه لتأثير حمل التصميم المركز $P_{ult} = 20$ t ، المؤثر فى المقطع C (شكل ١١ — ١٥ ، أ) . هذا مع العلم بأن السعة الحملية لكافة مقاطع العقد ، فى حالة الانحناء ، متساوية تماماً .

الحل : للحصول على الرسم البيانى النهائى للعزوم ، يجب جمع الرسم البيانى الناجم عن القوة الدفعية $H = X_1$ ، وعن عزوم المساند $M_A = M_B = X_2$ وعن الحمل المعلوم P_{ult} ، وهى الرسوم المخططة للإنشاء الرئيسى . وهذا الإنشاء الرئيسى ، مبين فى الشكل (١١ — ١٥ ، ب) .

وبما أنه عند انهيار العقد بتأثير الحمل المتماثل المعلوم ، يجب أن تتكون خمس مفصلات لدنة ، إذن سيكون شكل الرسم البيانى النهائى للعزوم ، كما هو عليه فى الشكل (١١ — ١٥ ، ج) .

ولإيجاد القوة الدفعية ، نستخدم العلاقة بين الإحداثيات الرأسية لهذا الرسم البيانى ، فى المقطع C

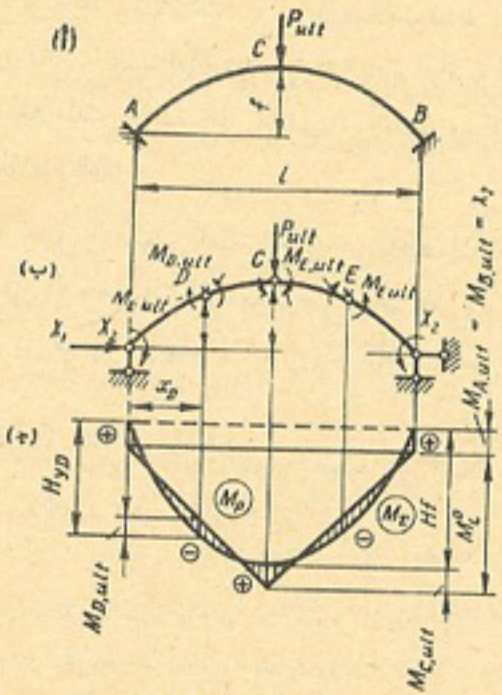
$$M_{A'ult} + M_C^0 = Hf + M_{C\,ult}$$

وبما أن

$$M_{A\,ult} = M_{C\,ult}$$

إذن :

$$H = \frac{M_C^0}{l} = \frac{P_{ult}\, l}{4f} = \frac{20 \times 12}{4 \times 3} = 20 \text{ tons}$$



الشكل ١١ – ١٥

ويعبر عن عزم الانحناء فى المقطع المجهول X_D ، الذى يحدد موضع المفصلة اللدنة D ، بالصيغة التالية :

$$M_{D\,ult} = M_{A\,ult} + M_D^0 - H y_D = M_{A\,ult} + \frac{P_{ult}}{2} X_D - H \frac{4 f X_D}{l^2} \times$$
$$\times (l - X_D) = M_{A\,ult} - 10\, X_D + \frac{5}{3} X_D^2$$

وبما أن هذا العزم يجب أن يكون عزم الانحناء الأقصى من حيث القيمة المطلقة ، إذن نأخذ المشتقة ونجعلها مساوية للصفر :

$$\frac{dM_D}{dX_D} = -10 + \frac{10}{3} X_D = 0$$

ومنها ينتج أن :

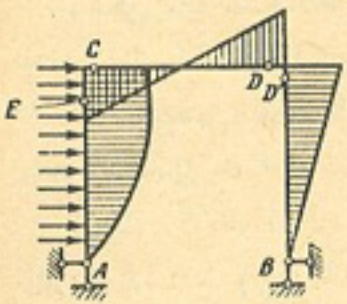
$$X_D = 3 \text{ m}$$

والآن يمكن إيجاد ما يلى :

$$M_{D\,ult} = M_{A\,ult} - 10 X_D + \frac{5}{3} X_D^2 = -M_{D\,ult} - 30 + 15$$

أو .

$$M_{D\,ult} = -7.5 \text{ tm}$$
$$M_{A\,ult} = M_{C\,ult} = -M_{D\,ult} = 7.5 \text{ tm}$$



الشكل ١١ – ١٦

ان الإطار البسيط ، المبين فى الشكل (١١ – ١٦) ، والمعرض لتأثير الحمل الأفقى الموزع بانتظام ، يفقد سعته الحملية (مقاومته القصوى) عند تكون مفصلتين لدنتين . ويبين الشكل (١١ – ١٦) الرسم البيانى لعزوم الانحناء فى مرحلة المرونة ، لهذا الإطار .

ونظراً لثبات قيمة القوة الطولية فى العارضة ، يمكن أن تظهر فيه مفصلات لدنة ، فى المقطعين C و D فقط ، اللذين تكون فيهما قيم عزوم الانحناء ، هى القيم القصوى . ولنفس السبب ، يمكن ظهور المفصلات اللدنة فى الأضلاع القائمة ، فى المقطعين D' و E فقط : وهكذا نجد بأن العدد النظرى للمجموعات المؤلفة للمفصلات يساوى ستة ، ولكنه من الناحية العملية يساوى أربعة فقط ، وهو عندما تظهر المفصلات اللدنة فى المقطعين C و D أو المقطعين C و D' أو المقطعين E و D أو أخيراً فى المقطعين E و D' . ويجب بحث جميع هذه الأوجه ، وإيجاد السعة الحملية للإطار لكل وجه من الأوجه ، وهى السعة الحملية التى يعبر عنها بقيمة الحمل الأقصى ، ثم نأخذ أقل قيمة من قيمها .

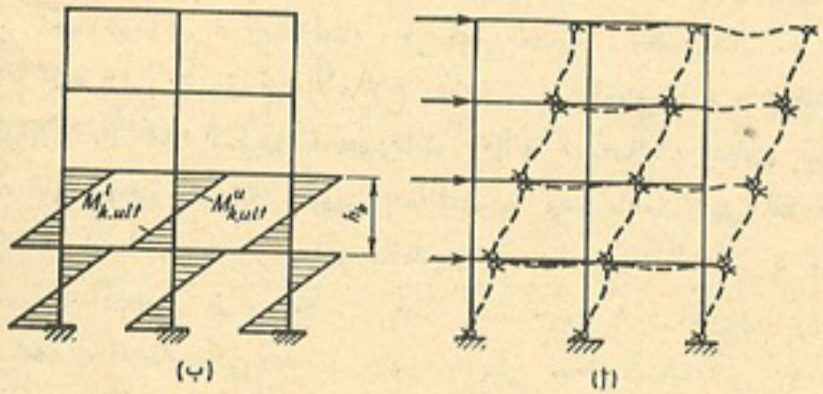
وفى هذه الحالة ، يتم إيجاد السعة الحملية للإطار ، من شرط التوازن النهائى (الحدى) للإنشاء المتحرك ، الناجم عند تكوّن مفصلتين لدنتين ، مع عزوم ثابتة .

إن الحساب الدقيق للاطر المتعددة الأبواع والمتعددة الطوابق ، مع أخذ لدونة المواد فى الاعتبار ، هو لحد الآن يبدو صعباً للغاية ، ولكن الحساب التقريبى بسيط جداً .

ولحساب هذه الاطر ، تبعا لتأثير الحمل الرأسى ، يمكن استخدام الطريقة المبينة على أساس تبسيط المخطط التصميمى ، مع الموازنة المتتالية لعزوم الانحناء ، فى كل باع من الأبواع ، طبقاً للسعات الحملية المأخوذة للمقاطع فى الأبواع وعند المساند .

ويمكن عملياً التصرف بطريقة أسهل — يهمل الوضع غير المناسب جداً ، للحمل المتنقل ، بالنسبة لمقاطع المساند ، فى الأبواع المتجاورة . وهذا يؤدى فى الحالة التى لا يزيد فيها الحمل المتنقل على خمسة أضعاف الحمل الساكن ، إلى تقليل قيم عزوم المساند إلى حد ٣٥٪ :

ولحساب الإطار المتعدد الأبواع والطوابق ، بالنسبة لتأثير الحمل الأفقى المؤثر فى الوصلات (غير المباشر) ، يمكن استخدام إحدى الطرق المبنية على أساس تبسيط المخطط التصميمى ، التى تكون فى هذه الحالة ، أى عند أخذ التشوهات (الانفعالات) اللدنة فى الاعتبار ، مبنية على مايلى (شكل ١١—١٧) :



الشكل ١١ — ١٧

يفترض بأن محصلة جميع القوى الأفقية العليا ، فى كل طابق ، المساوية لمجموع قوى القص الناشئة فى جميع الأضلاع القائمة للطابق المذكور ، تتوزع بين الأضلاع القائمة للطابق نفسه ، بصورة تتناسب مع النسبة بين سعتها الحملية Φ فى حالة الانحناء ، وبين الارتفاع ، أما عندما تكون القوائم متساوية الارتفاع ، عندئذ تتناسب مع سعاتها الحملية فقط . وفى الحالة الأخيرة ، ستكون عزوم الانحناء القصوى ، فى أعلى وأسفل أى ضلع من الأضلاع القائمة k ، مساوية لما يلى :

$$M''_{k,ult} = M^{L}_{k,ult} = \frac{h_k \, \Phi_k \, \Sigma Q_{ult}}{2 \, \Sigma \Phi}$$

وعند توازن الوصلات المتوسطة ، نجد بأن مجموع العزوم فى الضلعين القائمين العلوى والسفلى ، المجاورين للوصلة المعاومة ، تتوزع بين الباعين الأيسر والأيمن للعارضة ، بصورة تتناسب مع سعتيهما الحمليتين (مقاومتيهما القصويين) فى حالة الانحناء .

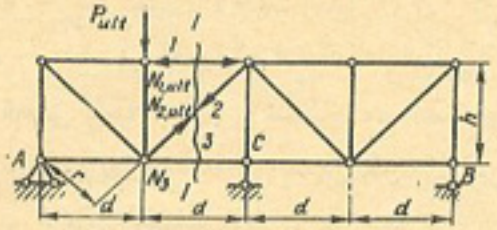
إن السعات الحملية لقضبان الإطار فى حالة الانحناء ، يمكن أن تؤخذ فى التقريب الأولى ، بدون أخذ القوى الطولية فى الاعتبار .

البند ١١ — ٥ : حساب الجمالونات غير المحددة استاتيكيا

يمكن إجراء حساب الجمالونات غير المحددة استاتيكيا ، على أساس نفس الاعتبارات السابقة ، المبحوثة أعلاه . ولكن المسألة تتعقد جداً ، كما هى الحالة فى مسألة الإطار ، وذلك لأن شكل انهيار الإنشاء غير معلوم سلفاً ، ولهذا يجب بحث عدة أشكال مختلفة ، من الأشكال المحتملة للانهيار وأحياناً يجب بحث عدد كبير منها .

ومن بين هذه الأشكال ، سيكون الشكل الحقيقى للانهيار ، هو ذلك الشكل الذى يطابق القيمة الصغرى للحمل الأقصى .

وسنبحث على سبيل المثال ، الجمالون المحتوى على قضيب زائد واحد ، المبين فى الشكل (١١ — ١٨) .



الشكل ١١ – ١٨

ولاجل - لحدوث انهيار (تصدع) الجمالون، يجب أن يصل قضيبان من القضبان السبعة عشر ، الداخلة فى تركيب الجمالون ، إلى مرحلة الخضوع ولكن عدد المجموعات المؤلفة من قضيبين ، من بين السبعة عشر قضيباً ، حتى عند عدم أخذ المجموعات غير الممكنة فى الاعتبار ، يبقى كبيراً بعد ، بحيث لا يمكن بحثه بأكمله من الناحية العملية . ولذلك يكون من المفيد ، أن نجرى فى البداية ، حساب الجمالون غير المحدد استاتيكيا ، باعتباه جمالوناً مرناً ، ونوجد ذلك القضيب الذى ينشأ فيه أقصى إجهاد ، والذى يتعرض تبعاً لذلك ، للتصبب (الخضوع) قبل غيره : و بعد إيجاد هذا القضيب ، يجب أن نعرضه لتأثير الإجهاد $N_{ult} = m\,R\,A$ ونقوم بحساب الجمالون مرة ثانية باعتباره مرناً ، واعتبار ذلك الإجهاد ثابتاً . وسنحصل بنتيجة الحساب ، على القضيب الثانى ، والذى سيتصبب (يصل إلى مرحلة الخضوع) بعد القضيب الأول .

ويجب إجراء هذه الحسابات ، بعدد من المرات ، يساوى عدد القضبان الزائدة زائداً واحد .

وبعد إيجاد شكل انهيار الجمالون ، يمكن تحديد الحمل الأقصى من شرط توازن الإنشاء المتحرك ، الذى تحول إليه الجمالون المعلوم .

لنفرض بأن أول قضيبين واصلين إلى مرحلة الخضوع ، هما القضيبان 1 و 2 ، الذى يكون الإجهاد الأقصى فى كل منهما ، مساوياً لما يلى ، على الترتيب :

$$N_{1ult} = mRA_1$$

و

$$N_{2ult} = mRA_2$$

عندئذ يمكن إيجاد القيمة القصوى للحمل P ، أو بعبارة أخرى السعة الحملية للجمالون ، من معادلة عزوم القسم الأيسر المقطوع للجمالون ، حول النقطة A :

$$\Sigma M_A = 0$$

$$P_{ult}\, d - N_{1ult}\, h - N_{2ult}\, r = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$P_{ult} = \frac{N_{1ult}\, h + N_{2ult}\, r}{d} = \frac{mR\,(hA_1 + rA_2)}{d}$$

وتزداد صعوبة حساب الجمالون غير المحدد استاتيكيا ، إلى درجة أكبر ، نظراً لأن القضبان المضغوطة ، يمكن أن تفقد استقرارها ، أى تتعرض للانحناء الجانبى (التحدب) ، قبل أن تصل الإجهادات فيها إلى القيمة $m\,R\,A$. وفى هذه الحالة ، نجد بأن القضبان تفقد مقاومتها ، حالما ينشأ فيها الإجهاد الحرج .

وبالاضافة إلى ذلك ، نجد بأن الجمالون ، خلافا للانشاء المصمت ، يمكن أن يتشوه (يصيبه العطب) ، ليس عند تعرضه لتأثير الحمل فحسب ، بل وعند إزالة الحمل أيضاً . وهذه المسألة مبحوثة بالتفصيل ، فى دراسات العالمين السوفيتيين بيرنشتين وستريليتسكى .

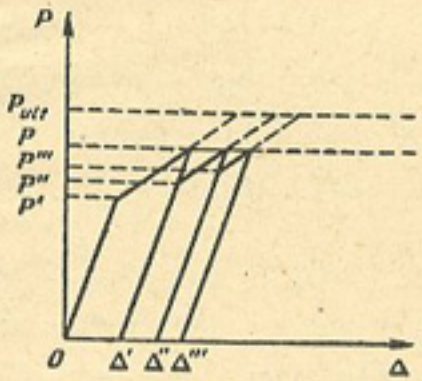
البند ١١ – ٦ : حساب الإنشاءات غير المحددة استاتيكيا ، تبعاً لتأثير الأحمال المتكررة

بعد إزالة الحمل عن الإنشاء غير المحدد استاتيكيا ، الموجود فى مرحلة المرونة واللدونة (المرحلة المرنة – اللدنة) ، تبقى فيه الإجهادات والتشوهات المتخلفة ،

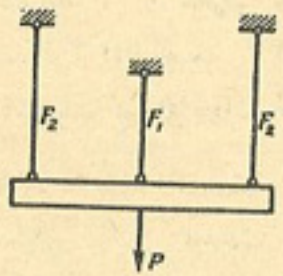
التى يمكن أن تزداد مع كل حمل جديد يتعرض له الإنشاء ، وتؤدى أخيراً إلى انهيار الإنشاء . أن لهذه المسألة أهمية كبيرة ، وذلك لأن الإنشاء فى فترة تشغيله (خدمته) بأكملها ، يتعرض بصورة عامة لتأثير الأحمال المختلفة — الساكنة والمتنقلة .

وسنبحث قبل كل شيء ، الحالة البسيطة لتعرض الإنشاء غير المحدد استاتيكيا ، لتأثير نفس الحمل المتكرر .

ولهذا الغرض ، نعود إلى أبسط أمثلة الإنشاء ، المبين فى الشكل (١١ — ١٩). ويمثل هذا الإنشاء ، عتبة جاسئة ، معلقة فى ثلاثة قضبان رأسية (عمودية) ، مصنوعة من مادة مرنة — لدنة ، وهى معرضة لتأثير الحمل P ، المسلط فى وسطها . أن عملية تشوه الإنشاء ، عند تعرضه للتحميل وإزالة الحمل على التوالى مبينة تخطيطياً فى الشكل (١١ — ٢٠) .



الشكل ١١ — ٢٠



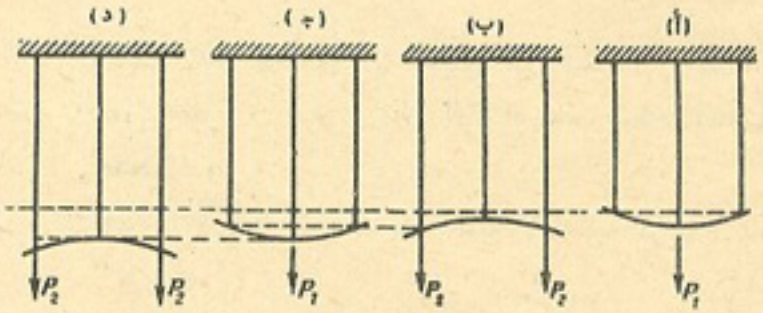
الشكل ١١ — ١٩

وإذا كان الحمل أقل من الحمل الأقصى للإنشاء بأكمله ، ولكنه يؤدى فى نفس الوقت إلى ظهور تشوهات (انفعالات) لدنة فى القضيب المتوسط ، عند بعض قيمه المتوسطة ، مثل P' ، نجد بأن القضيب المتوسط يحافظ على اجهاداته (تشوهاته) المتخلفة ، بعد إزالة الحمل . وفى هذه الحالة نجد بأن القضيبين الطرفيين ، اللذين كانا موصولين مع ذلك القضيب المتوسطة ، عن طريق العتبة ، لا يعودان إلى حالتهما الأولية أيضاً ، أى إلى طولهما الأولى ،

بغض النظر عن كون الإجهادات الناشئة فيهما ، عند تحميل الإنشاء ، لم تخرج عن حد المرونة . ولذلك بعد إزالة الحمل ، يصبح القضيبان الطرفيان ، مشدودين ، بينما يصبح القضيب المتوسط ، مضغوطاً ، وسيكون مجموع مساقط كافة الإجهادات الثلاثة ، على المحور الرأسى ، مساوياً للصفر . وسوف تكون هذه الإجهادات ، التى تسمى بالإجهادات الابتدائية أو الخاصة ، ذاتية التوازن . وسوف نرمز إلى التشوه المتخلف للقضبان Δ' . وعند تأثير الحمل للمرة الثانية ، تختفى إجهادات الانضغاط فى القضيب المتوسط ، عند قيمة معينة للحمل P ، وبعد ذلك سيتمدد القضيب مرة أخرى ، ويتصيب (يتعرض للخضوع) من جديد .. ولكن هذا يحدث ، بعد تأثير قيمة كبيرة من قيم الحمل هى P'' وسيكون التشوه المتخلف عندئذ ، وهو $\Delta'' - \Delta'$ ، أقل من التشوه المتخلف الابتدائى (الأولى) . وعند وصول الحمل إلى قيمته الابتدائية ، يصل الإجهاد فى والقضيب المتوسط ، إلى المقدار $\sigma_y A$ من جديد ، وتبلغ الإجهادات فى القضيبين الطرفيين ، نفس القيم السابقة .

وعند كل تحميل وإزالة حمل متتاليين ، ستظهر فى القضيب المتوسط ، استطالة متخلفة ، أقل فأقل من السابق ، إلى أن يتوقف ظهور الاستطالة المتخلفة تماماً . وبعد ذلك ، سيسلك الإنشاء ، سلوك الجسم المرن بالضبط . أما فيما يتعلق بالقيمة القصوى للحمل المتكرر المؤثر على الإنشاء ، فسوف تبقى كما كانت عليه فى حالة تأثير الحمل مرة واحدة فقط .

وننتقل الآن إلى بحث حالة تعرض الإنشاء ، لتأثير الأحمال المتكررة المختلفة . لنفرض بأن الإنشاء الذى على هيئة عتبة مرنة ، معلقة فى أربعة قضبان (شكل ١١—



الشكل ١١ — ٢١

٢١) ، معرض لتأثير الحملين P_1 و P_2 ، المسلطين عليه بالتتابع ، مع العلم بأن الحمل P_1 ، يؤدى إلى ظهور التصبب (الخضوع) فى القضيب المتوسط فقط ، وأن الحمل P_2 ، يؤدى إلى ظهور الخضوع فى القضيبين الطرفيين فقط . هذا وأن العتبة ، تشتغل فى حدود المرونة (سلوكها محصور فى حدود المرونة) .

وبعد تحميل الإنشاء بالحمل P_1 ، وإزالة الحمل بعد ذلك ، تبقى فيه إجهادات وتشوهات متخلفة ، تصبح العتبة نتيجة لها ، محدبة إلى الأسفل (شكل ١١ — ٢١ ، أ) . وبعد تعرض العتبة لتأثير الحمل P_2 ، وإزالة الحمل ، تصبح العتبة فى هذه الحالة ، محدبة إلى الأعلى (شكل ١١ — ٢١ ، ب) .

وعند إعادة دورة التحميل هذه ، نجد بأن وسط العتبة يتسابق مع طرفيها ، فى الهبوط إلى الأسفل (شكل ١١ — ٢١ ، ج ، د) إلى أن تصل درجة تمدد القضبان ، إلى الحد الذى يؤدى إلى انفصامها (تصدعها) .

ولكى يحافظ الإنشاء على سعته الحملية (مقاومته القصوى) ، عند تعرضه لتأثير الأحمال المتكررة المختلفة ، يجب بعد تكرار التحميل عدداً كافياً من المرات الكثيرة ، أن تتوقف زيادة (تطور) التشوهات المتخلفة ، وأن تكون الإجهادات الكلية ، الناجمة عن التأثير الموحد للحمل ، بالإضافة إلى (مجموعة مع) الإجهادات المتخلفة ، أقل من السعة الحملية المناظرة للإنشاء . ويمكن التعبير عن هذا الشرط ، بالمتباينة التالية :

$$S + S_0 \leqslant S_{ult}$$

حيث S — الإجهاد الذى ينشأ فى أى قضيب من القضبان ، نتيجة لتأثير الحمل المعلوم ، عند اشتغال الإنشاء غير المحدد استاتيكيا فى حدود المرونة ؛

S_0 — الإجهاد الناشئ فى القضيب فى الحالة الابتدائية للإنشاء عند عدم تأثير الحمل ؛

S_{ult} — السعة الحملية للقضيب .

وهكذا ، إذا استطعنا إيجاد ذلك التوزيع للإجهادات ، الذى يعطى بإضافته إلى الإجهادات الناجمة عن تأثير كل حالة ممكنة من حالات تحميل الإنشاء ، إجهادات إجمالية ، لا تخرج عن حدود السعة الحملية للإنشاء فسوف تكون تشوهاته محدودة ، عند أى عدد كان من مرات التحميل ، وعند تسليط الأحمال المنفردة بأى تتابع كان ، وهى الأحمال المعلومة القيمة والاتجاه والموضع . وإذا لم يكن فى الإمكان اختيار حالة الإجهاد الابتدائية ، التى تحقق الشرط الأخير ، عندئذ ستزداد (تتطور) التشوهات ، زيادة غير محددة ، وينهار الإنشاء فى آخر الأمر .

إن استخدام هذه القاعدة ، التى وضعها الأستاذ بليخ ، لتحديد الحمل الأقصى للعتبة المتواصلة ، يتلخص فى موازنة (معادلة) الرسم البيانى المغلف لعزوم الانحناء ، المخطط لجميع حالات تحميل العتبة الممكنة وقد بحثت هذه المسألة بالتفصيل ، فى دراسات العالمين السوفيتيين كفوزديف ورجانيتسين .

المحتويات

المقدمة ٥

الفصل الأول . التحليل الكينماتى للإنشاءات

البند ١ — ١ : المساند ٩
البند ١ — ٢ : شروط الاستقرار الهندسى للإنشاءات الإطارية . . . ١٢
البند ١ — ٣ : الإنشاءات (الأنظمة) الإطارية المحددة استاتيكيا ، المستقرة هندسياً ٢٣

الفصل الثانى . العتبات

البند ٢ — ١ : معلومات عامة ٢٩
البند ٢ — ٢ : خطوط تأثير ردود فعل المساند فى العتبات البسيطة والعتبات الكابولية ٣٦
البند ٢ — ٣ : خطوط تأثير عزوم الانحناء وقوى القص ، للعتبة البسيطة والعتبة الكابولية ٤٢
البند ٢ — ٤ : خطوط التأثير فى العتبة المثبتة من طرف واحد . . . ٥٣
البند ٢ — ٥ : خطوط التأثير فى حالة تسليط الحمل بصورة غير مباشرة (تسليط الحمل فى الوصلات) ٥٤
البند ٢ — ٦ : تحديد القوى والعزوم بواسطة خطوط التأثير . . . ٥٩
البند ٢ — ٧ : تحديد الوضع غير الملائم للحمل على الإنشاء . . . ٦٧
البند ٢ — ٨ : تحديد القوى والعزوم القصوى باستخدام الأحمال المكافئة . . ٨١
البند ٢ — ٩ : العتبات المتعددة الأبواع المحددة استاتيكياً . . . ٩٠
البند ٢ — ١٠ : تحديد العزوم والقوى الناجمة فى العتبات المتعددة الأبواع ، المحددة استاتيكياً ، نتيجة لتأثير الأحمال الساكنة . . . ١٠٠
البند ٢ — ١١ : خطوط تأثير القوى والعزوم فى العتبات المتعددة الأبواع ، المحددة استاتيكياً ١٠٩
البند ٢ — ١٢ : تحديد عزوم الانحناء وقوى القص الناجمة عن تأثير الأحمال الساكنة ، فى العتبات المحنية ، المحددة استاتيكياً . . . ١١٦

الفصل الثالث . العقود والاطر المتصلة بثلاث مفصلات

البند ٣ — ١ : الأنظمة أو الإنشاءات المتصلة بثلاث مفصلات . . . ١٢٦
البند ٣ — ٢ : تحديد ردود فعل المساند ، فى العقد المتصل بثلاث مفصلات . . ١٣٠
البند ٣ — ٣ : تحديد القوى الداخلية (الإجهادات) فى العقد المتصل بثلاث مفصلات ١٤٠
البند ٣ — ٤ : تصاميم العقود المتصلة بثلاث مفصلات ، الأكثر ملاءمة من الناحية الاقتصادية ١٥٦
البند ٣ — ٥ : تصميم العقود المتصلة بثلاث مفصلات ، المعرضة لتأثير الأحمال المتنقلة ١٥٨
البند ٣ — ٦ : عزوم القلب والإجهادات المتعامدة فى العقد المتصل بثلاث مفصلات . ١٧٤
البند ٣ — ٧ : حساب وتصميم العقود والإطر المتصلة بثلاث مفصلات ، والمربوطة بشدادات ١٧٧

الفصل الرابع . الجمالونات

البند ٤ — ١ : معلومات عن الجمالونات وأصنافها ١٨٥
البند ٤ — ٢ : الطرق التحليلية لتحديد الإجهادات (القوى) فى قطع الجمالونات البسيطة ١٩٠
البند ٤ — ٣ : الطريقة التخطيطية لتحديد الإجهادات فى قضبان (قطع) الجمالونات البسيطة ٢١٥
البند ٤ — ٤ : الطريقة التحليلية لتحديد الإجهادات فى قضبان الجمالونات المعقدة . ٢٢٧
البند ٤ — ٥ : توزيع الإجهادات فى قضبان الجمالونات المختلفة الأشكال . . ٢٣٤
البند ٤ — ٦ : الطرق التحليلية لبحث الاستقرار الهندسى للجمالونات . . . ٢٤١
البند ٤ — ٧ : خطوط تأثير الإجهادات فى قضبان الجمالونات البسيطة . . ٢٥٣
البند ٤ — ٨ : خطوط تأثير الإجهادات فى قضبان الجمالونات المعقدة . . ٢٧١
البند ٤ — ٩ : الجمالونات التى تحتوى أجزاؤها الهيكلية على عتبات جمالونية . . ٢٧٥
البند ٤ — ١٠ : الجمالونات الدقية (العقود الجمالونية) ٢٨٦
البند ٤ — ١١ : أنواع العقود الجمالونية ٣٠٢

الفصل الخامس . الجمالونات المجسمة

البند ٥ — ١ : معلومات عامة ٣١٥
البند ٥ — ٢ : مساند الجمالونات المجسمة ٣١٨
البند ٥ — ٣ : تكوين الجمالونات المجسمة المحددة استاتيكياً . . . ٣٢٢
البند ٥ — ٤ : طرق تحديد الإجهادات فى قضبان الجمالونات المجسمة . . . ٣٢٧
البند ٥ — ٥ : أمثلة لتحديد الإجهادات فى قضبان الجمالون المجسم . . . ٣٣٧

الفصل السادس . نظرية طاقة الانفعال والطرق العامة لتحديد الإزاحات

البند ٦ — ١ : ملاحظات عامة ٣٤١
البند ٦ — ٢ : شغل القوى الخارجية ٣٤١
البند ٦ — ٣ : طاقة الانفعال ٣٤٩
البند ٦ — ٤ : نظرية تبادل الشغل (الشغل المتبادل) ٣٥٧
البند ٦ — ٥ : نظرية الإزاحات المتبادلة ٣٦٢
البند ٦ — ٦ : صيغ حساب الإزاحات ٣٦٥
البند ٦ — ٧ : الانفعالات الحرارية ٣٧٨
البند ٦ — ٨ : الطرق الفنية لتحديد الإزاحات ٣٨٢
البند ٦ — ٩ : أمثلة لتحديد الإزاحات أو الانحرافات باستخدام طريقة فيريشاجين . ٣٩١
البند ٦ — ١٠ : طريقة طاقة الانفعال لتحديد الإزاحات ٤٠١
البند ٦ — ١١ : تحديد الإزاحات (الانحرافات) بواسطة الأحمال المرنة ٤٠٤
البند ٦ — ١٢ : الصيغة التفصيلية للأحمال المرنة ، فى الإنشاءات المصمتة ٤١٢
البند ٦ — ١٣ : الصيغة التفصيلية للأحمال المرنة ، فى الجمالونات ٤١٧
البند ٦ — ١٤ : انحرافات الإنشاءات المحددة استاتيكياً ، الناجمة عن إزاحة المساند . ٤٢٥
البند ٦ — ١٥ : انحرافات (تشوهات) السلسلة الكينماتية ، الناجمة عن تغير الزوايا المحصورة بين حلقاتها ٤٣٠
البند ٦ — ١٦ : تحديد انحرافات الإنشاءات الإطارية المجسمة ٤٣٣

الفصل السابع . حساب الإنشاءات البسيطة غير المحددة استاتيكياً ، بطريقة القوى

البند ٧ — ١ : الإنشاءات غير المحددة استاتيكياً ٤٤٠
البند ٧ — ٢ : المعادلات القانونية المستنتجة من طريقة القوى ٤٤٨
البند ٧ — ٣ : حساب أبسط الإنشاءات غير المحددة استاتيكياً ٤٥٥
البند ٧ — ٤ : حساب الإجهادات الناجمة عن تغير درجة الحرارة فى الإنشاءات غير المحددة استاتيكياً ٤٧٣
البند ٧ — ٥ : وضع المعادلات القانونية لحساب انحرافات مساند الإنشاءات . . . ٤٧٥
البند ٧ — ٦ : تخطيط الرسوم البيانية لقوى القص والقوى الطولية ، ومراجعة تلك الرسوم البيانية ٤٨٢
البند ٧ — ٧ : تحديد انحرافات الإنشاءات غير المحددة استاتيكياً ٤٩٣
البند ٧ — ٨ : طريقة المركز المرن ٤٩٨
البند ٧ — ٩ : خطوط تأثير أبسط الإنشاءات غير المحددة استاتيكياً . . . ٥٠٤

الفصل الثامن . العقود المصمتة

البند ٨ — ١ : خواص العقود وأشكال محاورها ٥١٨
البند ٨ — ٢ : تغير مقاطع العقد على طوله ٥٢٠
البند ٨ — ٣ : الإنشاءات الرئيسية المستخدمة لحساب العقود الخالية من المفصلات . ٥٢٣
البند ٨ — ٤ : حساب العقد الخالى من المفصلات ٥٢٧
البند ٨ — ٥ : حساب تأثير تغير درجة الحرارة ، وانكماش الخرسانة ، عند حساب العقود الخالية من المفصلات ٥٧٢
البند ٨ — ٦ : الحساب التحليلى للعقد الخالى من المفصلات الذى على شكل قطع مكافىء . ٥٧٦
البند ٨ — ٧ : العقد المتصل بمفصلتين ٥٨٥

الفصل التاسع . حساب الإنشاءات غير المحددة استاتيكياً المعقدة ، بطريقة القوى

البند ٩ — ١ : استخدام التماثل ٥٨٧
البند ٩ — ٢ : مجموعة القوى المجهولة ٥٩٢
البند ٩ — ٣ : الأحمال المتماثلة والأحمال العكسية التماثل ٥٩٦
البند ٩ — ٤ : طريقة تحويل الحمل ٥٩٩
البند ٩ — ٥ : مراجعة المعادلات والحدود المطلقة لمجموعة المعادلات القانونية . . . ٦٠٤
البند ٩ — ٦ : حل مجموعة المعادلات القانونية بالطريقة المختصرة ٦٠٨
البند ٩ — ٧ : أمثلة لحساب الاطر ٦١٤
البند ٩ — ٨ : الجمالونات غير المحددة استاتيكياً ٦٤٦
البند ٩ — ٩ : حساب الإنشاءات غير المحددة استاتيكياً ، بواسطة الإنشاءات الرئيسية غير المحددة استاتيكياً ٦٥٤
البند ٩ — ١٠ : « نماذج » خصوص تأثير الإجهادات للعتبات المتواصلة ٦٥٩

الفصل العاشر . طرق الانحرافات المختلطة والموحدة

البند ١٠ — ١ : اختيار المجاهيل فى طريقة الانحرافات ٦٦٢
البند ١٠ — ٢ : تحديد عدد المجاهيل ٦٦٤
البند ١٠ — ٣ : الإنشاء الرئيسى لطريقة الانحرافات ٦٦٨
البند ١٠ — ٤ : المعادلات القانونية لطريقة الانحرافات ٦٧٩
البند ١٠ — ٥ : الطريقة الاستاتيكية لتحديد المعاملات والحدود المطلقة لمجموعة المعادلات القانونية ٦٨٦

البند ١٠ — ٦ : تحديد المعاملات والحدود المطلقة لمجموعة المعادلات القانونية ، بطريقة ضرب الرسوم البيانية ٦٩٢
البند ١٠ — ٧ : مراجعة المعاملات والحدود المطلقة لمجموعة المعادلات القانونية لطريقة الانحرافات ٦٩٧
البند ١٠ — ٨ : تخطيط الرسوم البيانية للعزوم M وقوى القص Q والقوى الطولية N ، الناجمة فى الإنشاء المعلوم ٧٠٠
البند ١٠ — ٩ : حساب تأثير درجة الحرارة ، بطريقة الانحرافات ٧٠١
البند ١٠ — ١٠ : استخدام التماثل عند حساب الاطر بطريقة الانحرافات ٧٠٨
البند ١٠ — ١١ : مثال لحساب الإطار بطريقة الانحرافات ٧١٢
البند ١٠ — ١٢ : الطريقة المختلطة ٧٢٨
البند ١٠ — ١٣ : الطريقة الموحدة ٧٣٧
البند ١٠ — ١٤ : رسم خطوط التأثير بطريقة الانحرافات ٧٤٠

الفصل الحادى عشر . حساب الإنشاءات بواسطة السعة الحملية

البند ١١ — ١ : معلومات أساسية ٧٤٨
البند ١١ — ٢ : حساب العتبات المحددة استاتيكياً ٧٥٣
البند ١١ — ٣ : حساب العتبات غير المحددة استاتيكياً ٧٥٩
البند ١١ — ٤ : حساب العقود والاطر غير المحددة استاتيكياً ٧٧٠
البند ١١ — ٥ : حساب الجمالونات غير المحددة استاتيكياً ٧٨١
البند ١١ — ٦ : حساب الإنشاءات غير المحددة استاتيكياً ، تبعاً لتأثير الأحمال المتكررة . ٧٨٣